Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, К теореме о конечном приращении
для комплексных полиномов, *Матем. заметки*, 2010,
том 88, выпуск 5, 673–682

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:47:36

К теореме о конечном приращении для комплексных полиномов

В. Н. Дубинин

Для произвольного полинома P степени не выше n и любых точек z_1 и z_2 на комплексной плоскости устанавливаются оценки вида

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq d_n |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|,$$

где ζ – один из корней уравнения $P(z) = P(z_2)$, а d_n – положительная постоянная, зависящая только от числа n .

Библиография: 10 названий.

1. Введение и формулировки результатов. Комплексный полином P степени n определяется как алгебраический полином

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$$

с комплексными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $c_n \neq 0$. Общая теорема о конечном приращении дифференцируемых отображений в случае комплексных полиномов имеет вид

$$|P(z_1) - P(z_2)| \leq |P'(\xi)| |z_1 - z_2|, \quad (1)$$

где z_1 и z_2 – произвольные комплексные числа, а ξ – некоторая точка отрезка $[z_1, z_2]$. Естественнo поставить вопрос об уточнении и дополнении неравенства (1) с использованием специфики отображения, осуществляемого полиномом P . В частности, для каких точек z_1 и z_2 справедливо неравенство (1) с возможным положительным множителем в правой части, зависящим только от степени n , если точка ξ является концом отрезка $[z_1, z_2]$? Имеет ли место неравенство, противоположное неравенству (1) и также с некоторым положительным множителем в правой части? Несмотря на обилие литературы по полиномам, указанный вопрос мало изучен (см., например, [1]–[3]). Отметим аналог неравенства (1) в случае, когда одна из точек z_k является критической:

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq 4 |P'(z)| |z - \zeta|.$$

Здесь z – произвольная не критическая точка полинома P , а ζ – некоторая его критическая точка. Доказательство выписанного неравенства получено Смейлом [4],

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00028) и ДВО РАН (грант № 09-I-П4-02).

который предположил также, что константу 4 можно заменить на 1 либо $1 - 1/n$ [3; §7.2]. В недавней работе [5] поставлен вопрос о получении противоположного неравенства (с другой константой) и, в частности, установлено, что для некоторой критической точки ζ справедлива оценка

$$|P(z) - P(\zeta)| \geq \left| \frac{P'(z)}{n4^n} \right| |z - \zeta|. \quad (2)$$

Следующее утверждение можно рассматривать как первый шаг в получении нижних оценок модуля приращения полинома для произвольных точек комплексной плоскости (не обязательно критических).

ТЕОРЕМА 1. *Для любого полинома P степени не выше n и любых точек z_1 и z_2 комплексной плоскости $\mathbb{C}$ существует точка $\zeta \in \mathbb{C}$ такая, что $P(\zeta) = P(z_2)$ и выполняется неравенство*

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq \frac{4^{1/n-1}}{n} |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|. \quad (3)$$

В общем случае точку ζ в неравенстве (3) нельзя заменить на z_2 . Например, для полинома

$$P(z) = \frac{1 - (1 - z)^n}{n} = z + c_2 z^2 + \dots,$$

для точки $z_1 = 0$ и для точек z_2 , достаточно близких к корням P , отличным от z_1 , величина $|P(z_2)/z_2|$ принимает сколь угодно малые значения ($< 4^{1/n-1}/n$). Доказательство теоремы 1 опирается на результаты Хеймана [6] и свойства диссимметризации областей [7]. Ранее диссимметризацию в оценках для полиномов применяли в работе [8]. Интересно отметить, что для полинома P степени n и произвольных точек z_1, z_2 легко устанавливается существование точки ζ такой, что $P(\zeta) = P(z_1)$ и выполняется неравенство

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq \left| \frac{P'(\zeta)}{n} \right| |\zeta - z_2|.$$

Действительно, считая корни $\zeta_k, k = 1, \dots, n$, уравнения $P(\zeta) = P(z_1)$ различными, имеем для любых $z \in \mathbb{C}$

$$1 = \left| \sum_{k=1}^n \frac{P(z) - P(z_1)}{P'(\zeta_k)(z - \zeta_k)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{P(z) - P(z_1)}{P'(\zeta_k)(z - \zeta_k)} \right|,$$

что дает требуемое неравенство при некотором $\zeta = \zeta_k, 1 \leq k \leq n$. Равенство достигается в случае полинома $P(z) = 1 + z^n$ и точек $\zeta = z_1 = 1, z_2 = 0$.

Известная теорема покрытия Кебе–Бибераха утверждает, что если функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ регулярна и однолистка в круге $|z| < 1$, то образ круга $|z| < 1$ при отображении этой функцией целиком покрывает круг $|w| < 1/4$, т.е. круг один и тот же для всех функций такого рода. Соответствующая теорема для всего класса функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, регулярных в $|z| < 1$, не верна, т.е. нельзя указать круга абсолютного радиуса и с центром в начале, который покрывался бы целиком образом круга $|z| < 1$ при отображении каждой такой функцией. Тем не менее, из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого вещественного числа $R > 0$ образ круга $|z| < R$ при отображении полиномом $P(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ степени не выше n целиком покрывает круг $|w| < R 4^{1/n-1}/n$.

Как показывает пример приведенного выше полинома P , указанное в следствии 1 накрытие не обязано быть n -кратным. Данное следствие по-существу эквивалентно полученной теореме о конечном приращении для комплексных полиномов. Интересно было бы найти радиус наибольшего круга в следствии 1, покрываемого кругом $|z| < R$ при отображении P .

ТЕОРЕМА 2. Пусть P – полином степени не выше n , z_1 и z_2 – произвольные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть γ – связная компонента прообраза отрезка $[P(z_1), P(z_2)]$ при отображении P , содержащая точку z_1 . Тогда для любой точки $\zeta \in \gamma$ выполняется неравенство

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq \frac{1}{n^2} |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|. \quad (4)$$

Равенство в (4) достигается для полинома Чебышева $T_n(z)$, точек $z_1 = 1$, $\zeta = -1$ и для произвольной точки z_2 , удовлетворяющей условию $T_n(z_2) = -1$.

Напомним, что в терминах конформных отображений полином

$$T_n(z) = 2^{n-1} z^n + \dots$$

определяется как суперпозиция обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_n(z) = \frac{1}{2} ((z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, в частности, легко следует равенство в соотношении (4) для полинома $T_n(z)$ и точек, указанных в теореме 2. Доказательство теоремы 2 восходит в идейном плане к доказательству гипотезы Хеймана о покрытии вертикальных отрезков при конформном отображении круга [9]. В случае, когда континуум γ в теореме 2 есть отрезок, неравенство (4) вытекает из классического неравенства Маркова. Немного сложнее увидеть, что неравенство Маркова содержится в теореме 2. Действительно, можно считать, что полином P имеет вещественные коэффициенты, $P([-1, 1]) = [-1, 1]$ и $P(\pm 1) = \pm 1$. Применяя теорему 2 к подходящему континууму из $P^{-1}([-1, P(x)])$ либо $P^{-1}([P(x), 1])$, получим неравенство Маркова

$$|P'(x)| \leq n^2,$$

где $|P'(x)| = \max\{|P'(z)| : z \in [-1, 1]\}$, $-1 \leq x \leq 1$. Можно показать, что из теоремы 2 следует усиление неравенства 2 с заменой константы $n 4^n$ на n^2 . Сравнительно недавно Еременко [10] установил замечательное неравенство марковского типа для произвольного континуума, из которого вытекает, в частности, ослабленная версия неравенства (4) с дополнительным множителем $2^{1/n}$ в его левой части, а также неравенство (3) теоремы 1 с меньшей константой в правой части.

2. Доказательство теоремы 1. Можно считать, что степень полинома P равна n , $z_1 \neq z_2$ и $P'(z_1) \neq 0$. Линейной заменой общий случай сводится к ситуации, когда $z_2 = P(z_2) = 0$ и, следовательно, неравенство (3) имеет вид

$$|P(z_1)| \geq \frac{4^{1/n-1}}{n} |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|. \quad (3')$$

Предположим, что неравенство (3') не выполняется ни при каких ζ , $P(\zeta) = 0$, и пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ – все различные корни полинома P , $m \leq n$. Введем следующие обозначения:

- пусть

$$\alpha = \min_{1 \leq k \leq m} |z_1 - \zeta_k| > \frac{n|P(z_1)|}{4^{1/n-1}|P'(z_1)|}; \quad (5)$$

- D – плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами вдоль лучей

$$\{z : \arg(z - z_1) = \arg(\zeta_k - z_1), |z - z_1| \geq \alpha\}, \quad k = 1, \dots, m;$$

- φ – функция, конформно и однолистно отображающая круг $|\omega| < 1$ на область D так, что $\varphi(0) = z_1$, $\varphi'(0) > 0$;
- D^* – плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами вдоль лучей

$$\left\{z : \arg(z - z_1) = \frac{2\pi(k-1)}{n}, |z - z_1| \geq \alpha\right\}, \quad k = 1, \dots, n;$$

- φ^* – функция, конформно и однолистно отображающая круг $|\omega| < 1$ на D^* , $\varphi^*(0) = z_1$, $\varphi^{*'}(0) > 0$.

По лемме 1.4 работы [7] существует диссимметризация области D^* в подмножество области D . Применяя следствие 1.4 этой работы, получаем, что

$$|\varphi'(0)| \geq |\varphi^{*'}(0)| = \alpha^{1/n}. \quad (6)$$

Обозначим через $F(\omega)$ одну из регулярных ветвей функции $\log P(\varphi(\omega))$ в круге $|\omega| < 1$. Область $F(\{\omega : |\omega| < 1\})$ пересекает любую вертикальную прямую по семейству интервалов суммарной длины $< 2\pi n$. Из теоремы Хеймана [6; теорема 4.10] вытекает неравенство

$$|F'(0)| \leq 4n. \quad (7)$$

С другой стороны, с учетом (6) имеем неравенство

$$|F'(0)| = \left| \frac{P'(z_1)\varphi'(0)}{P(z_1)} \right| \geq \left| \frac{\alpha^{1/n}P'(z_1)}{P(z_1)} \right|,$$

которое вместе с (5) и (7) приводит к противоречию. Теорема доказана.

Использование логарифма в доказательстве теоремы 1 можно избежать, применив к функции $P(\varphi(\omega))$ результат Хеймана о p -листных отображениях [6; теорема 5.1].

3. Вспомогательные построения и утверждения. Следующие построения необходимы для доказательства теоремы 2. Пусть полином P нормирован условиями $P(1) = 1$ и $P'(1) \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{R}$ риманову поверхность функции $\mathcal{P}^{-1}$, обратной полиному P . Далее рассматриваем функцию $\mathcal{P}^{-1}$ как однозначную функцию, заданную на поверхности $\mathcal{R}$, и пусть $\mathcal{P}: \overline{\mathbb{C}}_z \rightarrow \mathcal{R}$ есть функция, обратная $\mathcal{P}^{-1}$ в этом смысле. Под проекцией точки $W \in \mathcal{R}$ понимается точка $P(\mathcal{P}^{-1}(W)) \in \overline{\mathbb{C}}_w$. Предположим, что луч $\{w: \operatorname{Im} w = 0, 1 < \operatorname{Re} w < \infty\}$ не содержит критических значений полинома P (т.е. точек $P(\zeta)$, для которых $P'(\zeta) = 0$ при некотором ζ). Обозначим через $\mathcal{L}$ луч на поверхности $\mathcal{R}$, точнее жорданову кривую, однолистно лежащую над указанным выше лучом сферы $\overline{\mathbb{C}}_w$ и соединяющую точки $\mathcal{P}(1)$ и $\mathcal{P}(\infty)$. Пусть

$$T = \{t_k\}_{k=0}^m, \quad 1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \infty,$$

– разбиение промежутка $1 \leq t \leq \infty$, содержащее все те значения t из $1 < t < \infty$, при которых эллипс $\gamma(t) := \{w: |w+1| + |w-1| = t+1/t\}$ содержит, по крайней мере, одно критическое значение полинома P . Наконец, обозначим через $\mathcal{C}(t)$ замкнутую жордановую кривую на $\mathcal{R}$, пересекающую луч $\mathcal{L}$, лежащую над эллипсом $\gamma(t)$ и ориентированную соответственно с положительной ориентацией на проекции $\gamma(t)$, $1 < t < \infty$, $t \notin T$, $c(t)$ – образ кривой $\mathcal{C}(t)$ при отображении $\mathcal{P}^{-1}$.

ЛЕММА 1. *Приращение аргумента*

$$\Delta_{c(t)} \arg P(z)$$

есть неубывающая функция от t на множестве $\{t: 1 < t < \infty, t \notin T\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < t' < t'' < \infty$, $t', t'' \notin T$. Точки $\mathcal{P}(1)$ и $\mathcal{P}(\infty)$ находятся по разные стороны от кривой $\mathcal{C}(t')$ и от кривой $\mathcal{C}(t'')$ на поверхности $\mathcal{R}$. Следовательно, непересекающиеся жордановы кривые $c(t')$ и $c(t'')$ отделяют точку 1 от ∞ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$. Поэтому одна из кривых лежит во внутренности другой. Далее, двигаясь по лучу $\mathcal{L}$ от $\mathcal{P}(1)$ до $\mathcal{P}(\infty)$, сначала встречаем кривую $\mathcal{C}(t')$, а затем $\mathcal{C}(t'')$. Это означает, что кривая $c(t')$ лежит во внутренности кривой $c(t'')$. Следовательно, число $N_{t'}$ нулей полинома P , лежащих внутри $c(t')$, не превосходит числа нулей $N_{t''}$ внутри $c(t'')$ (с учетом их кратностей). Осталось воспользоваться принципом аргумента:

$$2\pi N_t = \Delta_{c(t)} \arg P(z), \quad t = t', t''.$$

Лемма доказана.

Пусть γ – связная компонента прообраза $P^{-1}([-1, 1])$, содержащая точку $z = 1$, и пусть точка $\zeta_0 \in \gamma$, $\zeta_0 \neq 1$. Введем обозначения

$$W_0 = \mathcal{P}(\zeta_0), \quad H = \{z: 1 + (\zeta_0 - 1)\tau, 1 \leq \tau \leq \infty\}.$$

Кривая $\mathcal{C}(t)$ разбивает односвязную риманову поверхность $\mathcal{R}$ на две области. Двигаясь в одной такой области от точки $\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{L}$ вдоль жордановой дуги на $\mathcal{L}$ в направлении вещественной оси, мы встретим точку $\mathcal{P}(\infty)$. С другой стороны, мы встретим точку W_0 , двигаясь в другой области от точки $\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{L}$ сначала вдоль

дути на луче $\mathcal{L}$ до точки $\mathcal{P}(1)$, а затем вдоль кривой $\mathcal{P}(\gamma)$ до точки W_0 . Итак, точки W_0 и $\mathcal{P}(\infty)$ расположены по разные стороны от кривой $\mathcal{C}(t)$ при любом t , $1 < t < \infty$, $t \notin T$. Отсюда следует, что для каждого $k = 1, \dots, m$ двусвязная область

$$\mathcal{G}_k = \bigcup_{t_{k-1} < t < t_k} \mathcal{C}(t)$$

также отделяет точки W_0 и $\mathcal{P}(\infty)$. В то же время кривая $\mathcal{P}(H)$ соединяет эти точки. Поэтому для каждого $k = 1, \dots, m$ на кривой $\mathcal{P}(H)$ найдется, по крайней мере, одна жорданова дуга $\mathcal{H}_k$, лежащая в области $\mathcal{G}_k$ и соединяющая ее граничные компоненты. Таким образом, в принятых выше обозначениях справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Для любого $k = 1, \dots, m$ область $\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k$ односвязная.*

Далее нам понадобится понятие емкости конденсатора (см., например, [7]). Для достаточно малых положительных r и ρ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$ рассмотрим конденсаторы

$$\begin{aligned} C(r) &= (H, \{z : |z - 1| \leq r\}), \\ C(r, \rho) &= \left(H \cup \{z : |z - \zeta_0| \leq \rho\} \cup \left\{ z : |z| \geq \frac{1}{\rho} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cup \bigcup_{P'(z)=0} \{z : |z - \tilde{z}| \leq \rho\}, \{z : |z - 1| \leq r\} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *При фиксированном r , $0 < r < |\zeta_0 - 1|$, для емкостей конденсаторов справедливо равенство*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{cap } C(r, \rho) = \text{cap } C(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся непрерывностью емкости и тем фактом, что добавление к пластинам конденсатора конечного числа точек не меняет емкости этого конденсатора:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{cap } C(r, \rho) = \text{cap} \left(H \cup \bigcup_{P'(\tilde{z})=0} \{\tilde{z}\}, \{z : |z - 1| \leq r\} \right) = \text{cap } C(r)$$

(см. предложения 1.4 и 1.6 из статьи [7]). Лемма доказана.

Введем следующие ниже обозначения и дадим некоторые комментарии к ним:

- $\omega = \Psi(w)$ – функция в области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [-1, 1]$, обратная функции Жуковского $w = (\omega + 1/\omega)/2$ и переводящая эллипсы $\gamma(t)$ в окружности $|\omega| = t$, $1 < t < \infty$;
- $\zeta = f_k(W)$ – однозначная ветвь функции $\zeta = \log \Psi(W)$, конформно и однолистно отображающая область $\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k$ в “полосу”

$$\Pi_k := \{\zeta : \xi_{k-1} < \text{Re } \zeta < \xi_k\}, \quad k = 1, \dots, m;$$

здесь $\xi_k = \log t_k$, $k = 0, 1, \dots, m$; выбор такой ветви возможен ввиду леммы 2; при $k = m$ Π_k – полуплоскость;

- $u(z)$ – потенциальная функция конденсатора $C(r, \rho)$, т.е. вещественнозначная непрерывная на $\overline{\mathbb{C}}_z$ функция, равная нулю на первой пластине конденсатора $C(r, \rho)$, единице на второй и гармоническая в дополнении этих пластин;

- $v_k(\zeta)$ – функция, определенная равенством

$$v_k(\zeta) = \begin{cases} u(\mathcal{P}^{-1}(f_k^{-1}(\zeta))), & \zeta \in f_k(\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k), \\ 0, & \zeta \in \Pi_k \setminus f_k(\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k), \end{cases}$$

$k = 1, \dots, m$; доопределим функцию v_k на $\partial\Pi_k$ по непрерывности; полученную при этом функцию будем вновь обозначать v_k ; нетрудно видеть, что функция v_k удовлетворяет условию Липшица в полосе $\bar{\Pi}_k$, $k = 1, \dots, m$, а функция v_1 к тому же равна единице на множестве

$$f_1(\mathcal{P}(\{z : |z - 1| \leq r\}) \cap \mathcal{G}_1);$$

- $v_k^*(\zeta)$ – результат симметризации Штейнера функции $v_k(\zeta)$, $\zeta \in \bar{\Pi}_k$, относительно вещественной оси (см. [6]); каждая функция $v_k^*(\zeta)$ липшицева в $\bar{\Pi}_k$ и равна нулю на множестве

$$\{\zeta \in \bar{\Pi}_k : |\operatorname{Im} \zeta| \geq \pi n\}, \quad k = 1, \dots, m;$$

из леммы 1 вытекают неравенства

$$v_k^*(\xi_k + i\eta) \leq v_{k+1}^*(\xi_k + i\eta), \quad -\infty < \eta < \infty, \quad k = 1, \dots, m-1; \quad (8)$$

- $\zeta = F(z)$ – функция, конформно и однолистно отображающая единичный круг $|z| < 1$ на полосу $|\operatorname{Im} \zeta| < \pi n$ так, что $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$;
- $\tilde{r}$ – верхняя грань всех r , при которых множество

$$F(\{z : |z| < r\}) \cap \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta > 0\}$$

принадлежит результату симметризации Штейнера относительно вещественной оси множества

$$f_1(\mathcal{P}(\{z : |z - 1| \leq r\}) \cap \mathcal{G}_1);$$

- $v(\zeta)$ – потенциальная функция конденсатора

$$\tilde{C}(\tilde{r}) = (\bar{\mathbb{C}}_\zeta \setminus \{\zeta : |\operatorname{Im} \zeta| < \pi n\}, F(\{z : |z| \leq \tilde{r}\}));$$

легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0 & \text{на прямой} & & \operatorname{Re} \zeta &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &\leq 0 & \text{на любой прямой} & & \operatorname{Re} \zeta &= \xi > 0; \end{aligned} \quad (9)$$

определение конденсатора $\tilde{C}(\tilde{r})$ можно было бы упростить, взяв в качестве его второй пластины круг с центром в начале и подходящего радиуса; однако в этом случае существенно усложняется проверка условий (9); в нашем случае линии уровня потенциальной функции v совпадают с линиями уровня функции F (т.е. с кривыми $|F^{-1}(\zeta)| = \text{const}$).

Для достаточно гладкой функции λ на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ положим

$$I(\lambda, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla \lambda|^2 d\sigma.$$

ЛЕММА 4. *Справедливо неравенство*

$$2 \sum_{k=1}^m I(v_k^*, \Pi_k) \geq I(v, \mathbb{C}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} G_k &= \{\zeta \in \Pi_k : |\operatorname{Im} \zeta| < \pi n\}, & k &= 1, \dots, m, \\ l_k &= \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta = \xi_k, |\operatorname{Im} \zeta| < \pi n\}, & k &= 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Для каждого k , $1 \leq k \leq m$, имеем

$$\begin{aligned} I(v_k^*, \Pi_k) &= I(v_k^*, G_k) = I(v_k^* - v + v, G_k) \\ &= I(v_k^* - v, G_k) + I(v, G_k) + 2 \iint_{G_k} \left[\frac{\partial(v_k^* - v)}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial(v_k^* - v)}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\ &\geq I(v, G_k) - 2 \int_{\partial G_k} (v_k^* - v) \frac{\partial v}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе области G_k (угловые точки исключаются). Учитывая соотношения (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m I(v_k^*, \Pi_k) &\geq \sum_{k=1}^m I(v, G_k) - 2 \sum_{k=1}^m \int_{\partial G_k} (v_k^* - v) \frac{\partial v}{\partial n} ds \\ &= \sum_{k=1}^m I(v, G_k) - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \int_{l_k} \left[(v_k^* - v) \left(-\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + (v_{k+1}^* - v) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] ds \\ &= \sum_{k=1}^m I(v, G_k) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \int_{l_k} (v_k^* - v_{k+1}^*) \frac{\partial v}{\partial \xi} ds \geq \sum_{k=1}^m I(v, G_k) = \frac{1}{2} I(v, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Достаточно рассмотреть случай $P'(z_1) \neq 0$. Также можно считать, что $z_1 = 1$, $P(z_1) = 1$ и $P(z_2) = -1$. Иначе рассмотрим полином

$$Q(z) = 2 \frac{P(z_2) - P(z + z_1 - 1)}{P(z_2) - P(z_1)} - 1,$$

для которого $Q(1) = 1$ и $Q(\tilde{z}_2) = -1$, $\tilde{z}_2 = z_2 - z_1 + 1$. Если для этого полинома теорема верна, то найдется такая точка ζ , что $Q(\zeta) = -1$ и

$$2 \geq \left| \frac{Q'(1)}{n^2} \right| |1 - \tilde{\zeta}|.$$

Это означает, что для полинома P и точки $\zeta = \tilde{\zeta} + z_1 - 1$ имеем $P(\zeta) = P(z_2)$ и выполняется неравенство (4).

В приведенных выше предположениях относительно полинома P примем обозначения, введенные в п. 3. Следующая цепочка соотношений вытекает последовательно из конформной инвариантности интеграла Дирихле, теоремы Поля и Сегё о симметризации функций (см. [6]) и леммы 4:

$$\operatorname{cap} C(r, \rho) = I(u, \mathbb{C}) \geq \sum_{k=1}^m I(v_k, \Pi_k) \geq \sum_{k=1}^m I(v_k^*, \Pi_k) \geq \frac{1}{2} I(v, \mathbb{C}) = \frac{1}{2} \operatorname{cap} \tilde{C}(\tilde{r}).$$

Привлекая лемму 3, имеем в итоге

$$\operatorname{cap} C(r) \geq \frac{1}{2} \operatorname{cap} \tilde{C}(\tilde{r}). \quad (10)$$

Для вычисления асимптотики емкости конденсаторов при $r \rightarrow 0$ воспользуемся известными формулами (см., например, [7; формулы (1.6), (1.8)]), в которых $r(B, a)$ означает внутренний радиус области B относительно точки $a \in B$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} C(r) &= -\frac{2\pi}{\log r} - \frac{1}{2\pi}(\log r(\mathbb{C}_z \setminus H, 1)) \left(\frac{2\pi}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi(\log[4|\zeta_0 - 1|]) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Далее, вторая пластина конденсатора $\tilde{C}(\tilde{r})$ представляет собой “почти круг” радиуса $(2|P'(1)|r)^{1/2}(1 + o(1))$ при $r \rightarrow 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{cap} \tilde{C}(\tilde{r}) &= -\frac{\pi}{\log(2|P'(1)|r)^{1/2}} \\ &\quad - \pi(\log r(\{\zeta : |\operatorname{Im} \zeta| < \pi n\}, 0)) \left(\frac{1}{\log(2|P'(1)|r)^{1/2}} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log(2|P'(1)|r)} - 4\pi(\log(4n)) \left(\frac{1}{\log(2|P'(1)|r)} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log r} \left(1 - \frac{\log(2|P'(1)|)}{\log r} + o\left(\frac{1}{\log r} \right) \right) \\ &\quad - 4\pi(\log(4n)) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi \left(\log \left(\frac{8n^2}{|P'(1)|} \right) \right) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Подставляя найденные асимптотические выражения в неравенство (10), приходим к заключению

$$|\zeta_0 - 1| \leq \frac{2n^2}{|P'(1)|}.$$

В наших предположениях полученное неравенство совпадает с неравенством (4) ($\zeta_0 = \zeta$). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Sci. Publ., Singapore, 1994.
- [2] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Grad. Texts in Math., **161**, Springer-Verlag, New York, NY, 1995.
- [3] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [4] S. Smale, “The fundamental theorem of algebra and complexity theory”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **4**:1 (1981), 1–36.

- [5] V. Dubinin, T. Sugawa, “Dual mean value problem for complex polynomials”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **85**:9 (2009), 135–137.
- [6] W. K. Hayman, *Multivalent Functions*, Cambridge Tracts in Math., **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [7] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76.
- [8] A. F. Beardon, D. Minda, T. W. Ng, “Smale’s mean value conjecture and the hyperbolic metric”, *Math. Ann.*, **322**:4 (2002), 623–632.
- [9] В. Н. Дубинин, “О покрытии вертикальных отрезков при конформном отображении”, *Матем. заметки*, **28**:1 (1980), 25–32.
- [10] A. Eremenko, “A Markov-type inequality for arbitrary plane continua”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:5 (2007), 1505–1510.

В. Н. Дубинин

Институт прикладной математики ДВО РАН

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

27.01.2010