Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Лиу Ланже, Оценки в крайних точках для мультилинейных дробных сингулярных интегральных операторов на некоторых пространствах Харди, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 735–752

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 07:49:36

Оценки в крайних точках для мультилинейных дробных сингулярных интегральных операторов на некоторых пространствах Харди

Лиу Ланже

В данной работе получены оценки в крайних точках для некоторых мультилинейных операторов, соответствующих дробным сингулярным интегральным операторам, на пространстве Харди и пространстве Харди типа Герца.

Библиография: 15 названий.

1. Введение и обозначения. Пусть T – сингулярный интегральный оператор Кальдерона–Зигмунда и $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$; классический результат Койфмана, Рочберга и Вайса (см. [1]) гласит, что коммутатор $[b, T]f = T(bf) - bTf$ ограничен на пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$. Чанилло (см. [2]) доказал аналогичное утверждение для случая, когда T – дробный интегральный оператор. В работе [3] доказана ограниченность коммутаторов для крайних значений числа p . Заметим, что коммутатор $[b, T]$ не ограничен при ограниченности оператора в крайних точках (т.е. при $p = 1$ и $p = \infty$). Недавно теория пространств Герца и Харди типа Герца, как некоторой локальной версии пространств Лебега и Харди, получила дальнейшее развитие (см. [4]–[7]). Главная цель этой работы – исследовать свойства ограниченности в крайних точках ($p = 1$ и $p = \infty$) для мультилинейных операторов, соответствующих дробным сингулярным интегральным операторам несверточного типа на некоторых пространствах Харди и Харди типа Герца. В действительности мы докажем ограниченность мультилинейных операторов в крайних точках только при условии ограниченности операторов на пространствах Лебега, т.е. из ограниченности операторов из $L^r(\mathbb{R}^n)$ в $L^s(\mathbb{R}^n)$ при $r, s \in (1, +\infty]$ и $0 \leq \delta < n$, где $1 < r < n/\delta$ и $1/s = 1/r - \delta/n$, следует ограниченность мультилинейных операторов из $L^{n/\delta}(\mathbb{R}^n)$ в $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ при $p = n/\delta$ и из $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $L^{n/(n-\delta)}(\mathbb{R}^n)$ при $p = 1$. В качестве приложений получим ограниченность в крайних точках для мультилинейных операторов, соответствующих сингулярному интегральному оператору Кальдерона–Зигмунда и дробному интегральному оператору с грубым ядром.

Сначала введем обозначения (см. [4]–[9]). Всюду в дальнейшем $Q = Q(x, r)$ обозначает куб в пространстве $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям, с центром в точке x и ребром r . Для куба Q и локально интегрируемой функции f положим

$$f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x) dx, \quad f^\#(x) = \sup_{x \in Q} |Q|^{-1} \int_Q |f(y) - f_Q| dy.$$

Работа выполнена при поддержке Фонда NNSF (грант № 10671117).

Кроме того, будем говорить, что f принадлежит пространству $\text{ВМО}(\mathbb{R}^n)$, если $f^\# \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, и положим $\|f\|_{\text{ВМО}} = \|f^\#\|_{L^\infty}$. Также определим центральное ВМО пространство $\text{СМО}(\mathbb{R}^n)$, которое является пространством функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{\text{СМО}} = \sup_{r \geq 1} |Q(0, r)|^{-1} \int_Q |f(y) - f_Q| dy < \infty.$$

Известно, что (см. [5], [8])

$$\|f\|_{\text{СМО}} \approx \sup_{r \geq 1} \inf_{c \in \mathbb{C}} |Q(0, r)|^{-1} \int_Q |f(x) - c| dx.$$

Также мы введем понятия атома и пространства H^1 . Функция a называется *атомом* пространства H^1 , если существует куб Q такой, что функции a имеет носитель на Q , $\|a\|_{L^\infty} \leq |Q|^{-1}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0$. Известно, что пространство Харди $H^1(\mathbb{R}^n)$ характеризуется атомарными разложениями (см. [8]).

Для $k \in \mathbb{Z}$ определим $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$ и $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$. Через χ_k обозначим характеристическую функцию множества C_k , через $\tilde{\chi}_k$ обозначим характеристическую функцию множества C_k при $k \geq 1$ и через $\tilde{\chi}_0$ обозначим характеристическую функцию множества B_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $0 < p < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) *Однородное пространство Герца* $\dot{K}_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ определено как

$$\dot{K}_p^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_p^\alpha} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{\dot{K}_p^\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_{L^p}.$$

(2) *Неоднородное пространство Герца* $K_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ определено как

$$K_p^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_p^\alpha} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{K_p^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha} \|f\tilde{\chi}_k\|_{L^p}.$$

Если $\alpha = n(1 - 1/p)$, то будем писать $\dot{K}_p^\alpha(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_p(\mathbb{R}^n)$, $K_p^\alpha(\mathbb{R}^n) = K_p(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $0 < \delta < n$ и $1 < p \leq n/\delta$. Будем говорить, что $B_p^\delta(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций f на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|f\|_{B_p^\delta} = \sup_{r \geq 1} r^{-n(1/p - \delta/n)} \|f\chi_{Q(0,r)}\|_{L^p} < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $p = n/\delta$, то $B_p^\delta(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$.

(1) *Однородное пространство Харди типа Герца* $H\dot{K}_p(\mathbb{R}^n)$ определено как

$$H\dot{K}_p(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : G(f) \in \dot{K}_p(\mathbb{R}^n)\},$$

где

$$\|f\|_{HK_p} = \|G(f)\|_{K_p}.$$

(2) Неоднородное пространство Харди типа Герца $HK_p(\mathbb{R}^n)$ определено как

$$HK_p(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : G(f) \in K_p(\mathbb{R}^n)\},$$

где

$$\|f\|_{HK_p} = \|G(f)\|_{K_p};$$

здесь $G(f)$ – общая максимальная функция от f , т.е.

$$G(f)(x) = \sup_{\varphi \in K_m} \sup_{|x-y|<t} |f * \varphi_t(y)|,$$

где

$$K_m = \{\varphi \in S(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} (1 + |u|)^{m+n} |D^\alpha \varphi(u)| \leq 1\},$$

$\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(x/t)$ при $t > 0$, m – положительное целое число и $S(\mathbb{R}^n)$ – класс Шварца (см. [9; с. 88]).

Пространства Харди типа Герца характеризуются атомарными разложениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $1 < p < \infty$. Функция $a(x)$ на $\mathbb{R}^n$ называется *центральной* $(n(1-1/p), p)$ -атомом (или *центральной* $(n(1-1/p), p)$ -атомом ограниченного типа), если

- 1) $\text{Supp } a \subset B(0, r)$ для некоторого $r > 0$ (или для некоторого $r \geq 1$);
- 2) $\|a\|_{L^p} \leq |B(0, r)|^{1/p-1}$;
- 3) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0$.

ЛЕММА 1 [5], [7]. Пусть $1 < p < \infty$. Умеренное распределение f принадлежит $HK_p(\mathbb{R}^n)$ (или $HK_p(\mathbb{R}^n)$) тогда и только тогда, когда существуют центральные $(n(1-1/p), p)$ -атомы (или центральные $(n(1-1/p), p)$ -атомы ограниченного типа) a_j с носителем на $B_j = B(0, 2^j)$ и константы λ_j , $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ такие, что $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$ (или $f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$) в смысле класса $S'(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{HK_p} \text{ (или } \|f\|_{HK_p}) \approx \sum_j |\lambda_j|.$$

2. Теоремы. В данной работе рассматривается класс мультилинейных операторов, соответствующих некоторым сингулярным интегральным операторам несверточного типа, которые определены следующим образом.

Пусть m_j , $j = 1, \dots, l$, – положительные целые числа, $m_1 + \dots + m_l = m$, и A_j – функции на $\mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, l$). Положим

$$R_{m_j+1}(A_j; x, y) = A_j(x) - \sum_{|\beta| \leq m_j} \frac{1}{\beta!} D^\beta A_j(y)(x-y)^\beta.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $0 \leq \delta < n$. Пусть $T_\delta: S \rightarrow S'$ – линейный оператор, и пусть на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$ существует локально интегрируемая функция $K(x, y)$ такая, что

$$T_\delta g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) g(y) dy$$

для любой ограниченной функции g с компактным носителем, где функция K удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n+\delta},$$

$$|K(y, x) - K(z, x)| + |K(x, y) - K(x, z)| \leq C|y - z|^\varepsilon |x - z|^{-n-\varepsilon+\delta},$$

если $2|y - z| \leq |x - z|$. Мультилинейный оператор T_δ^A , соответствующий T_δ , определяется соотношением

$$T_\delta^A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(A_j; x, y)}{|x - y|^m} K(x, y) f(y) dy.$$

Заметим, что если $m = 0$, то T_δ^A — просто мультилинейные коммутаторы для T_δ и A (см. [1]–[3]). Хорошо известно, что понятие мультилинейного оператора, как нетривиального расширения коммутатора, представляет большой интерес для гармонического анализа, и оно широко изучалось многими авторами (см. [10]–[13]). В работе [14] была доказана взвешенная L^p -ограниченность ($p > 1$) мультилинейного оператора, соответствующего некоторому сингулярному интегральному оператору. В работе [15] была получена слабая (H^1, L^1) -ограниченность мультилинейного оператора, соответствующего некоторому сингулярному интегральному оператору, и было показано, что, в общем случае мультилинейный оператор из $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$ не является ограниченным (см. [15]). Для изучения $(H^1(\mathbb{R}^n), L^{n/(n-\delta)}(\mathbb{R}^n))$ -ограниченности мультилинейного оператора, введем новый мультилинейный оператор, который является некоторой версией оператора T_δ^A и задается соотношением

$$\tilde{T}_\delta^A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^l Q_{m_j+1}(A_j; x, y)}{|x - y|^m} K(x, y) f(y) dy,$$

где

$$Q_{m_j+1}(A_j; x, y) = R_{m_j}(A_j; x, y) - \sum_{|\beta|=m_j} \frac{1}{\beta!} D^\beta A_j(x) (x - y)^\beta.$$

Заметим, что существует форма коммутаторов, соответствующих оператору $\tilde{T}_\delta^A$, и таким образом, эта версия мультилинейного оператора весьма эффективна при изучении $(H^1(\mathbb{R}^n), L^{n/(n-\delta)}(\mathbb{R}^n))$ -ограниченности (см. теорему 2 ниже). С другой стороны, очевидно, что

$$Q_{m+1}(A; x, y) = R_{m+1}(A; x, y) - \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\beta!} (x - y)^\beta (D^\beta A(x) - D^\beta A(y));$$

тогда

$$\tilde{T}_\delta^A(f)(x) = T_\delta^A(f)(x) - \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x - y)^\beta (D^\alpha A(x) - D^\alpha A(y))}{|x - y|^m} K(x, y) f(y) dy,$$

и таким образом, из ограниченности оператора T_δ^A в крайних точках следует ограниченность оператора $\tilde{T}_\delta^A$ в крайних точках.

В данной работе изучается ограниченность в крайних точках для мультилинейных операторов T_δ^A и $\tilde{T}_\delta^A$ на пространствах Харди и Харди типа Герца. Сформулируем полученные результаты следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq \delta < n$ и $D^\beta A_j \in \text{ВМО}(\mathbb{R}^n)$ для всех β при $|\beta| = m_j$ и $j = 1, \dots, l$. Предположим, что T_δ – ограниченный оператор из $L^r(\mathbb{R}^n)$ в $L^s(\mathbb{R}^n)$ для любых $r, s \in (1, +\infty]$ при $1 < r < n/\delta$ и $1/s = 1/r - \delta/n$. Тогда T_δ^A – ограниченный оператор из $L^{n/\delta}(\mathbb{R}^n)$ в $\text{ВМО}(\mathbb{R}^n)$ и из $B_p^\delta(\mathbb{R}^n)$ в $\text{СМО}(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < n/\delta$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 \leq \delta < n$ и $D^\beta A_j \in \text{ВМО}(\mathbb{R}^n)$ для всех β при $|\beta| = m_j$ и $j = 1, \dots, l$. Предположим, что $\tilde{T}_\delta^A$ – ограниченный оператор из $L^r(\mathbb{R}^n)$ в $L^s(\mathbb{R}^n)$ для любых $r, s \in (1, +\infty]$ при $1 < r < n/\delta$ и $1/s = 1/r - \delta/n$. Тогда $\tilde{T}_\delta^A$ – ограниченный оператор из $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $L^{n/(n-\delta)}(\mathbb{R}^n)$ и из $H\dot{K}_p(\mathbb{R}^n)$ в $\dot{K}_q^\alpha(\mathbb{R}^n)$ при $\alpha = n(1 - 1/p)$, $1 < p < n/\delta$ и $1/q = 1/p - \delta/n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 также верна для неоднородных пространств Харди и Харди типа Герца.

3. Применения. Теперь приведем примеры применения теорем, доказанных в данной статье, в случае некоторых конкретных операторов таких как сингулярный интегральный оператор Кальдерона–Зигмунда и дробный интегральный оператор.

ПРИМЕНЕНИЕ 1. Сингулярный интегральный оператор Кальдерона–Зигмунда.

Пусть T – оператор Кальдерона–Зигмунда (см. [8], [9], [13]), и мультилинейный оператор, соответствующий T , задается соотношением

$$T^A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(A_j; x, y)}{|x - y|^m} K(x, y) f(y) dy.$$

Тогда легко видеть, что T удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 и, таким образом, утверждения теорем 1 и 2 выполняются для T^A при $\delta = 0$.

ПРИМЕНЕНИЕ 2. Дробный интегральный оператор с грубым ядром.

Пусть T_δ , $0 < \delta < n$, – дробный интегральный оператор с грубым ядром, определяемый соотношением (см. [14], [15])

$$T_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x - y)}{|x - y|^{n-\delta}} f(y) dy,$$

мультилинейный оператор, соответствующий T_δ , задается соотношением

$$T_\delta^A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^l R_{m_j+1}(A_j; x, y)}{|x - y|^{m+n-\delta}} \Omega(x - y) f(y) dy,$$

где Ω – однородная степени нуль функция на $\mathbb{R}^n$, $\int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0$ и $\Omega \in \text{Lip}_\varepsilon(S^{n-1})$ при некоторых $0 < \varepsilon \leq 1$, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что $|\Omega(x) - \Omega(y)| \leq M|x - y|^\varepsilon$ при любых $x, y \in S^{n-1}$. Тогда T_δ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, и, таким образом, утверждения теорем 1 и 2 выполняются для T_δ^A .

4. Доказательства теорем. Для доказательства теорем нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2 [12]. Пусть A – функция на $\mathbb{R}^n$ и $D^\beta A \in L^q(\mathbb{R}^n)$ при $|\beta| = m$ и некотором $q > n$. Тогда

$$|R_m(A; x, y)| \leq C|x - y|^m \sum_{|\beta|=m} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}(x, y)|} \int_{\tilde{Q}(x, y)} |D^\beta A(z)|^q dz \right)^{1/q},$$

где $\tilde{Q}(x, y)$ – куб с центром в точке x и стороной длины $5\sqrt{n}|x - y|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства того, что T_δ^A – ограниченный оператор из $L^{n/\delta}(\mathbb{R}^n)$ в $\text{ВМО}(\mathbb{R}^n)$, достаточно доказать, что существует константа C_Q такая, что неравенство

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta^A(f)(x) - C_Q| dx \leq C \|f\|_{L^{n/\delta}}$$

выполняется для любого куба Q . Без ограничения общности предположим, что $l = 2$. Выберем куб $Q = Q(x_0, d)$. Пусть $\tilde{Q} = 5\sqrt{n} Q$ и

$$\tilde{A}_j(x) = A_j(x) - \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\beta!} (D^\beta A_j)_{\tilde{Q}} x^\beta.$$

Тогда $R_m(A_j; x, y) = R_m(\tilde{A}_j; x, y)$ и $D^\beta \tilde{A}_j = D^\beta A_j - (D^\beta A_j)_{\tilde{Q}}$ при $|\beta| = m_j$. Для $f_1 = f\chi_{\tilde{Q}}$ и $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{Q}}$ имеем

$$\begin{aligned} & T_\delta^A(f)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{A}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j+1}(\tilde{A}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) f_2(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) f_1(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{\beta_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)(x-y)^{\beta_1}}{|x-y|^m} D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) K(x, y) f_1(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y)(x-y)^{\beta_2}}{|x-y|^m} D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) K(x, y) f_1(y) dy \\ &\quad + \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-y)^{\beta_1+\beta_2} D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)}{|x-y|^m} K(x, y) f_1(y) dy. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |T_\delta^A(f)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)}{|x-y|^m} K(x, y) f_1(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{\beta_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)(x-y)^{\beta_1}}{|x-y|^m} D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) K(x, y) f_1(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \sum_{|\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y)(x-y)^{\beta_2}}{|x-y|^m} D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) K(x, y) f_1(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-y)^{\beta_1+\beta_2} D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)}{|x-y|^m} K(x, y) f_1(y) dy \right| \\ &\quad + |T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)| \end{aligned}$$

$$:= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x) + I_5(x)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta^A(f)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)| dx \\ & \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q I_1(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_2(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_3(x) dx \\ & \quad + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_4(x) dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q I_5(x) dx \\ & := I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Теперь оценим I_1 , I_2 , I_3 , I_4 и I_5 . Сначала при $x \in Q$ и $y \in \tilde{Q}$ в силу леммы 2 имеем

$$R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y) \leq C|x - y|^{m_j} \sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}},$$

и, таким образом, в силу $(L^{n/\delta}, L^\infty)$ -ограниченности оператора T_δ получим

$$\begin{aligned} I_1 & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(f_1)(x)| dx \\ & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|T_\delta(f_1)\|_{L^\infty} \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

Для I_2 , в силу (L^p, L^q) -ограниченности оператора T_δ при $1/q = 1/p - \delta/n$ и $n/\delta > p > 1$ и из неравенства Гёльдера получим

$$\begin{aligned} I_2 & \leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{ВМО}} \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 f_1)(x)| dx \\ & \leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{ВМО}} \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 f_1)(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{ВМО}} \sum_{|\beta_1|=m_1} |Q|^{-1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) f_1(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{ВМО}} \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\beta_1} A_1(x) - (D^{\beta_1} A_1)_{\tilde{Q}}|^q dx \right)^{1/q} \|f\|_{L^{n/\delta}} \\ & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

Для I_3 , аналогично доказательству для I_2 , имеем

$$I_3 \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}.$$

Аналогично, для I_4 , выбирая $1 < p < n/\delta$ и $q, r_1, r_2 > 1$ так, чтобы $1/q = 1/p - \delta/n$ и $1/r_1 + 1/r_2 + p\delta/n = 1$, и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
 I_4 &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 D^{\beta_2} \tilde{A}_2 f_1)(x)| dx \\
 &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 D^{\beta_2} \tilde{A}_2 f_1)(x)|^q dx \right)^{1/q} \\
 &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} |Q|^{-1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) f_1(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x)|^{pr_1} dx \right)^{1/pr_1} \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x)|^{pr_2} dx \right)^{1/pr_2} \|f\|_{L^{n/\delta}} \\
 &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}.
 \end{aligned}$$

Для I_5 имеем

$$\begin{aligned}
 &T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x_0) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{K(x, y)}{|x - y|^m} - \frac{K(x_0, y)}{|x_0 - y|^m} \right) \prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y) f_2(y) dy \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) - R_{m_1}(\tilde{A}_1; x_0, y)) \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)}{|x_0 - y|^m} K(x_0, y) f_2(y) dy \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{A}_2; x_0, y)) \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x_0, y)}{|x_0 - y|^m} K(x_0, y) f_2(y) dy \\
 &\quad - \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{\beta_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)(x - y)^{\beta_1}}{|x - y|^m} K(x, y) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x_0, y)(x_0 - y)^{\beta_1}}{|x_0 - y|^m} K(x_0, y) \right] D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) f_2(y) dy \\
 &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y)(x - y)^{\beta_2}}{|x - y|^m} K(x, y) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x_0, y)(x_0 - y)^{\beta_2}}{|x_0 - y|^m} K(x_0, y) \right] D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) f_2(y) dy \\
 &\quad + \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{(x - y)^{\beta_1 + \beta_2}}{|x - y|^m} K(x, y) - \frac{(x_0 - y)^{\beta_1 + \beta_2}}{|x_0 - y|^m} K(x_0, y) \right] \\
 &\quad \quad \times D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) f_2(y) dy \\
 &= I_5^{(1)} + I_5^{(2)} + I_5^{(3)} + I_5^{(4)} + I_5^{(5)} + I_5^{(6)}.
 \end{aligned}$$

В силу леммы 1 и неравенства (см. [9])

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \leq C \log \left(\frac{|Q_2|}{|Q_1|} \right) \|b\|_{\text{ВМО}} \quad \text{для } Q_1 \subset Q_2$$

получим, что при $x \in Q$ и $y \in 2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}$

$$\begin{aligned} |R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)| &\leq C|x-y|^{m_j} \sum_{|\beta|=m_j} (\|D^\beta A_j\|_{\text{ВМО}} + |(D^\beta A_j)_{\tilde{Q}(x,y)} - (D^\beta A_j)_{\tilde{Q}}|) \\ &\leq Ck|x-y|^{m_j} \sum_{|\beta|=m_j} \|D^\beta A_j\|_{\text{ВМО}}. \end{aligned}$$

Заметим, что $|x-y| \sim |x_0-y|$ при $x \in Q$ и $y \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{Q}$ и, следовательно, в силу условий для функции K имеем

$$\begin{aligned} |I_5^{(1)}| &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{m+n+1-\delta}} + \frac{|x-x_0|^\varepsilon}{|x_0-y|^{m+n+\varepsilon-\delta}} \right) \prod_{j=1}^2 |R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)| |f_2(y)| dy \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} k^2 \left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}} + \frac{|x-x_0|^\varepsilon}{|x_0-y|^{n+\varepsilon-\delta}} \right) |f(y)| dy \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) \|f\|_{L^{n/\delta}} \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

Для $I_5^{(2)}$ из формулы (см. [12])

$$R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y) - R_{m_j}(\tilde{A}_j; x_0, y) = \sum_{|\gamma| < m} \frac{1}{\gamma!} R_{m-|\gamma|}(D^\gamma \tilde{A}_j; x, x_0)(x-y)^\gamma$$

и леммы 1 следует, что

$$|R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y) - R_{m_j}(\tilde{A}_j; x_0, y)| \leq C \sum_{|\gamma| < m_j} \sum_{|\beta|=m_j} |x-x_0|^{m_j-|\gamma|} |x-y|^{|\gamma|} \|D^\beta A_j\|_{\text{ВМО}};$$

таким образом,

$$\begin{aligned} |I_5^{(2)}| &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} k \frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}} |f(y)| dy \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$|I_5^{(3)}| \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}.$$

Для $I_5^{(4)}$, выбирая $r > 1$ так, чтобы $1/r + \delta/n = 1$, получим

$$\begin{aligned} |I_5^{(4)}| &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(x-y)^{\beta_1} K(x,y)}{|x-y|^m} - \frac{(x_0-y)^{\beta_1} K(x_0,y)}{|x_0-y|^m} \right| \\ &\quad \times |R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)| |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)| |f_2(y)| dy \\ &\quad + C \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} |R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{A}_2; x_0, y)| \\ &\quad \times \frac{|(x_0-y)^{\beta_1} K(x_0, y)|}{|x_0-y|^m} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)| |f_2(y)| dy \\ &\leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{ВМО}} \\ &\quad \times \sum_{|\beta_1|=m_1} \sum_{k=1}^{\infty} k(2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) \left(\frac{1}{|2^k \tilde{Q}|} \int_{2^k \tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)|^r dy \right)^{1/r} \|f\|_{L^{n/\delta}} \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$|I_5^{(5)}| \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}.$$

Для $I_5^{(6)}$, выбирая $r_1, r_2 > 1$ так, чтобы $\delta/n + 1/r_1 + 1/r_2 = 1$, получим

$$\begin{aligned} |I_5^{(6)}| &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(x-y)^{\beta_1+\beta_2} K(x,y)}{|x-y|^m} - \frac{(x_0-y)^{\beta_1+\beta_2} K(x_0,y)}{|x_0-y|^m} \right| \\ &\quad \times |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)| |D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)| |f_2(y)| dy \\ &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) \|f\|_{L^{n/\delta}} \left(\frac{1}{|2^k \tilde{Q}|} \int_{2^k \tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)|^{r_1} dy \right)^{1/r_1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{|2^k \tilde{Q}|} \int_{2^k \tilde{Q}} |D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)|^{r_2} dy \right)^{1/r_2} \\ &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$I_5 \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \|f\|_{L^{n/\delta}},$$

и это неравенство завершает доказательство первого утверждения теоремы 1. Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что существует константа C_Q такая, что неравенство

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta^A(f)(x) - C_Q| dx \leq C \|f\|_{B_p^\delta}$$

выполняется для любого куба $Q = Q(0, d)$ при $d \geq 1$. Без ограничения общности предположим, что $l = 2$. Выберем куб $Q = Q(0, d)$ при $d \geq 1$. Для $f_1 = f\chi_{\tilde{Q}}$ и $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{Q}}$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta^A(f)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(0)| dx \\ & \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)}{|x - y|^m} K(x, y) f_1(y) dy \right| dx \\ & \quad + \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{\beta_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)(x - y)^{\beta_1}}{|x - y|^m} D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) K(x, y) f_1(y) dy \right| dx \\ & \quad + \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \sum_{|\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y)(x - y)^{\beta_2}}{|x - y|^m} D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) K(x, y) f_1(y) dy \right| dx \\ & \quad + \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x - y)^{\beta_1 + \beta_2} D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)}{|x - y|^m} \right. \\ & \quad \quad \quad \left. \times K(x, y) f_1(y) dy \right| dx \\ & \quad + \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(0)| dx \\ & := L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5. \end{aligned}$$

Аналогично, при $1/s = 1/r - \delta/n$, $1 < r < p$, $1 < t_1, t_2 < \infty$ и $1/t_1 + 1/t_2 + r/p = 1$, получим

$$\begin{aligned} L_1 & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(f_1)(x)| dx \\ & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(f_1)(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) d^{-n(1/p - \delta/n)} \|f\chi_{\tilde{Q}}\|_{L^p} \\ & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\ L_2 & \leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{BMO}} \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 f_1)(x)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{BMO}} \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 f_1)(x)|^s dx \right)^{1/s} \\
&\leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{BMO}} \sum_{|\beta_1|=m_1} |Q|^{-1/s} \|(D^{\beta_1} A_1 - (D^{\beta_1} A_1)_{\tilde{Q}}) f_1\|_{L^r} \\
&\leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{BMO}} \\
&\quad \times \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)|^{pr/(p-r)} dy \right)^{(p-r)/pr} |Q|^{\delta/n-1/p} \|f_1\|_{L^p} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) d^{-n(1/p-\delta/n)} \|f \chi_{\tilde{Q}}\|_{L^p} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\
L_3 &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\
L_4 &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 D^{\beta_2} \tilde{A}_2 f_1)(x)| dx \\
&\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\delta(D^{\beta_1} \tilde{A}_1 D^{\beta_2} \tilde{A}_2 f_1)(x)|^s dx \right)^{1/s} \\
&\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} |Q|^{-1/s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) f_1(x)|^r dx \right)^{1/r} \\
&\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x)|^{rt_1} dx \right)^{1/rt_1} \\
&\quad \times \sum_{|\beta_2|=m_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x)|^{rt_2} dx \right)^{1/rt_2} |Q|^{\delta/n-1/p} \|f_1\|_{L^p} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}.
\end{aligned}$$

Для L_5 при $x \in Q$ имеем

$$\begin{aligned}
&T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(x) - T_\delta^{\tilde{A}}(f_2)(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{K(x, y)}{|x - y|^m} - \frac{K(0, y)}{|y|^m} \right) \prod_{j=1}^2 R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y) f_2(y) dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) - R_{m_1}(\tilde{A}_1; 0, y)) \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)}{|y|^m} K(0, y) f_2(y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^n} (R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{A}_2; 0, y)) \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; 0, y)}{|y|^m} K(0, y) f_2(y) dy \\
& - \sum_{|\beta_1|=m_1} \frac{1}{\beta_1!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)(x-y)^{\beta_1}}{|x-y|^m} K(x, y) \right. \\
& \quad \left. - \frac{R_{m_2}(\tilde{A}_2; 0, y)(-y)^{\beta_1}}{|y|^m} K(0, y) \right] D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) f_2(y) dy \\
& - \sum_{|\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y)(x-y)^{\beta_2}}{|x-y|^m} K(x, y) \right. \\
& \quad \left. - \frac{R_{m_1}(\tilde{A}_1; 0, y)(-y)^{\beta_2}}{|y|^m} K(0, y) \right] D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) f_2(y) dy \\
& + \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{(x-y)^{\beta_1+\beta_2}}{|x-y|^m} K(x, y) - \frac{(-y)^{\beta_1+\beta_2}}{|y|^m} K(0, y) \right] \\
& \quad \times D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y) f_2(y) dy \\
& = L_5^{(1)} + L_5^{(2)} + L_5^{(3)} + L_5^{(4)} + L_5^{(5)} + L_5^{(6)}.
\end{aligned}$$

Аналогично, при $1 < r_1, r_2 < \infty$ и $1/r_1 + 1/r_2 + 1/p = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
|L_5^{(1)}| & \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x|}{|y|^{m+n+1-\delta}} + \frac{|x|^\varepsilon}{|y|^{m+n+\varepsilon-\delta}} \right) \prod_{j=1}^2 |R_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)| |f_2(y)| dy \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \\
& \quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} k^2 \left(\frac{|x|}{|y|^{n+1-\delta}} + \frac{|x|^\varepsilon}{|y|^{n+\varepsilon-\delta}} \right) |f(y)| dy \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) (2^k d)^{-n(1/p-\delta/n)} \|f \chi_{2^k\tilde{Q}}\|_{L^p} \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) \|f\|_{B_p^\delta} \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\
|L_5^{(2)}| & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q} \setminus 2^k\tilde{Q}} k \frac{|x|}{|y|^{n+1-\delta}} |f(y)| dy \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\
|L_5^{(3)}| & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|L_5^{(4)}| &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(x-y)^{\beta_1} K(x,y)}{|x-y|^m} - \frac{(-y)^{\beta_1} K(0,y)}{|y|^m} \right| \\
&\quad \times |R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y)| |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)| |f_2(y)| dy \\
&\quad + C \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} |R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{A}_2; 0, y)| \\
&\quad \times \frac{|(-y)^{\beta_1} K(0, y)|}{|y|^m} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)| |f_2(y)| dy \\
&\leq C \sum_{|\beta_2|=m_2} \|D^{\beta_2} A_2\|_{\text{BMO}} \sum_{k=1}^{\infty} k(2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) (2^k d)^{-n(1/p-\delta/n)} \|f \chi_{2^k \tilde{Q}}\|_{L^p} \\
&\quad \times \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|2^k \tilde{Q}|} \int_{2^k \tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)|^{p'} dy \right)^{1/p'} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\
|L_5^{(5)}| &\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}, \\
|L_5^{(6)}| &\leq C \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(x-y)^{\beta_1+\beta_2} K(x,y)}{|x-y|^m} - \frac{(-y)^{\alpha_1+\alpha_2} K(0,y)}{|y|^m} \right| \\
&\quad \times |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)| |D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)| |f_2(y)| dy \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k} + 2^{-\varepsilon k}) (2^k d)^{-n(1/p-\delta/n)} \|f \chi_{2^k \tilde{Q}}\|_{L^p} \\
&\quad \times \sum_{|\beta_1|=m_1} \left(\frac{1}{|2^k \tilde{Q}|} \int_{2^k \tilde{Q}} |D^{\beta_1} \tilde{A}_1(y)|^{r_1} dy \right)^{1/r_1} \\
&\quad \times \sum_{|\beta_2|=m_2} \left(\frac{1}{|2^k \tilde{Q}|} \int_{2^k \tilde{Q}} |D^{\beta_2} \tilde{A}_2(y)|^{r_2} dy \right)^{1/r_2} \\
&\leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_5 \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{B_p^\delta},$$

что завершает доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточно только показать, что существует константа $C > 0$ такая, что для любого H^1 -атома a (т.е. для a такого, что $\text{supp } a \subset Q =$

$Q(x_0, d)$, $\|a\|_{L^\infty} \leq |Q|^{-1}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} a(y) dy = 0$ (см. [11])) выполняется следующее неравенство:

$$\|\tilde{T}_\delta^A(a)\|_{L^{n/(n-\delta)}} \leq C.$$

Без ограничения общности положим $l = 2$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\tilde{T}_\delta^A(a)(x)]^{n/n-\delta} dx = \left[\int_{|x-x_0| \leq 2d} + \int_{|x-x_0| > 2d} \right] [\tilde{T}_\delta^A(a)(x)]^{n/(n-\delta)} dx := J_1 + J_2.$$

Для J_1 в силу (L^p, L^q) -ограниченности оператора $\tilde{T}_\delta^A$ при $1/q = 1/p - \delta/n$ и $n/\delta > p > 1$ имеем

$$J_1 \leq C \|\tilde{T}_\delta^A(a)\|_{L^q}^{n/((n-\delta)q)} |2Q|^{1-n/((n-\delta)q)} \leq C \|a\|_{L^p}^{n/(n-\delta)} |Q|^{1-n/((n-\delta)q)} \leq C.$$

Чтобы получить оценку для J_2 , введем обозначение

$$\tilde{A}_j(x) = A_j(x) - \sum_{|\beta_j|=m_j} \frac{1}{\beta_j!} (D^{\beta_j} A_j)_{2Q} x^{\beta_j}.$$

Тогда $Q_{m_j}(A_j; x, y) = Q_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)$. Так как момент атома a убывает, то

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\delta^A(a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)}{|x - y|^m} - \frac{K(x, x_0)}{|x - x_0|^m} \right] R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) a(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x, x_0)}{|x - x_0|^m} [R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) \\ &\quad \quad - R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, x_0) R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, x_0)] a(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)(x - y)^{\beta_2}}{|x - y|^m} - \frac{K(x, x_0)(x - x_0)^{\beta_2}}{|x - x_0|^m} \right] \\ &\quad \quad \times R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) a(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x, x_0)(x - x_0)^{\beta_2}}{|x - x_0|^m} \\ &\quad \quad \times [R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) - R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, x_0)] D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) a(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)(x - y)^{\beta_1}}{|x - y|^m} - \frac{K(x, x_0)(x - x_0)^{\beta_1}}{|x - x_0|^m} \right] \\ &\quad \quad \times R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) a(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x, x_0)(x - x_0)^{\beta_1}}{|x - x_0|^m} \\ &\quad \quad \times [R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, x_0)] D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) a(y) dy \\ &\quad + \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)(x - y)^{\beta_1+\beta_2}}{|x - y|^m} - \frac{K(x, x_0)(x - x_0)^{\beta_1+\beta_2}}{|x - x_0|^m} \right] \\ &\quad \quad \times D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) a(y) dy. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получим

$$J_2 \leq C \left[\prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{ВМО}} \right) \right]^{n/(n-\delta)} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [2^{-kn/(n-\delta)} + 2^{-kn\varepsilon/(n-\delta)}] \leq C,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы 2. Для доказательства второго утверждения, без ограничения общности, возьмем $l = 2$. Пусть $f \in H\dot{K}_p(\mathbb{R}^n)$. В силу леммы 1 имеем $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$, где a'_j является центральным $(n(1-1/p), p)$ -атомом с $\text{supp } a_j \subset B_j = B(0, 2^j)$ и $\|f\|_{H\dot{K}_p} \approx \sum_j |\lambda_j|$. Получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_\delta^A(f)\|_{\dot{K}_q^\alpha} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kn(1-1/p)} \|\chi_k \tilde{T}_\delta^A(f)\|_{L^q} \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kn(1-1/p)} \sum_{j=-\infty}^{k-1} |\lambda_j| \|\chi_k \tilde{T}_\delta^A(a_j)\|_{L^q} \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kn(1-1/p)} \sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j| \|\chi_k \tilde{T}_\delta^A(a_j)\|_{L^q} \\ &= M_1 + M_2. \end{aligned}$$

Для M_2 из (L^p, L^q) -ограниченности оператора $\tilde{T}_\delta^A$ при $1/q = 1/p - \delta/n$ следует, что

$$\begin{aligned} M_2 &\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kn(1-1/p)} \sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j| \|a_j\|_{L^p} \leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kn(1-1/p)} \sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j| 2^{jn(1/p-1)} \\ &\leq C \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j| \sum_{k=-\infty}^j 2^{(k-j)n(1-1/p)} \leq C \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j| \leq C \|f\|_{H\dot{K}_p}. \end{aligned}$$

Чтобы получить оценку для M_1 , введем обозначение

$$\tilde{A}_j(x) = A_j(x) - \sum_{|\beta_j|=m_j} \frac{1}{\beta_j!} (D^{\beta_j} A_j)_{2Q} x^{\beta_j}.$$

Тогда $Q_{m_j}(A_j; x, y) = Q_{m_j}(\tilde{A}_j; x, y)$. Так как момент атома a убывает, то

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\delta^A(a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)}{|x-y|^m} - \frac{K(x, 0)}{|x|^m} \right] R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) a(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x, 0)}{|x|^m} [R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) \\ &\quad \quad - R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, 0) R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, 0)] a(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)(x-y)^{\beta_2}}{|x-y|^m} - \frac{K(x, 0)x^{\beta_2}}{|x|^m} \right] \\ &\quad \quad \times R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) a(y) dy \\ &\quad - \sum_{|\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x, 0)x^{\beta_2}}{|x|^m} [R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, y) - R_{m_1}(\tilde{A}_1; x, 0)] D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) a(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)(x - y)^{\beta_1}}{|x - y|^m} - \frac{K(x, 0)x^{\beta_1}}{|x|^m} \right] \\
& \quad \times R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) a(y) dy \\
& - \sum_{|\beta_1|=m_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x, 0)x^{\beta_1}}{|x|^m} [R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, y) - R_{m_2}(\tilde{A}_2; x, 0)] D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) a(y) dy \\
& + \sum_{|\beta_1|=m_1, |\beta_2|=m_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{K(x, y)(x - y)^{\beta_1+\beta_2}}{|x - y|^m} - \frac{K(x, 0)x^{\beta_1+\beta_2}}{|x|^m} \right] \\
& \quad \times D^{\beta_1} \tilde{A}_1(x) D^{\beta_2} \tilde{A}_2(x) a(y) dy.
\end{aligned}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, получим

$$\begin{aligned}
M_1 & \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kn(1-\delta/n)} \sum_{j=-\infty}^{k-1} |\lambda_j| \left[\frac{2^j}{2^{k(n+1-\delta)}} + \frac{2^{j\varepsilon}}{2^{k(n+\varepsilon-\delta)}} \right] \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j| \sum_{k=j+1}^{\infty} [2^{j-k} + 2^{(j-k)\varepsilon}] \\
& \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j| \leq C \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{|\beta_j|=m_j} \|D^{\beta_j} A_j\|_{\text{BMO}} \right) \|f\|_{H\dot{K}_p},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, “Factorization theorems for Hardy spaces in several variables”, *Ann. of Math.* (2), **103**:3 (1976), 611–635.
- [2] S. Chanillo, “A note on commutators”, *Indiana Univ. Math. J.*, **31**:1 (1982), 7–16.
- [3] E. Harboure, C. Segovia, J. L. Torrea, “Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p ”, *Illinois J. Math.*, **41**:4 (1997), 676–700.
- [4] J. García-Cuerva, “Hardy spaces and Beurling algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **39**:3 (1989), 499–513.
- [5] J. García-Cuerva, M.-J. L. Herrero, “A theory of Hardy spaces associated to the Herz spaces”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **69**:3 (1994), 605–628.
- [6] Lu Shanzhen, Yang Dachun, “The decomposition of weighted Herz space on $\mathbf{R}^n$ and its applications”, *Sci. China Ser. A*, **38**:2 (1995), 147–158.
- [7] Lu Shanzhen, Yang Dachun, “The weighted Herz-type Hardy space and its applications”, *Sci. China Ser. A*, **38**:6 (1995), 662–673.
- [8] J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. Stud., **116**, Notas de Matemática, 104, North-Holland Publ., Amsterdam, 1985.
- [9] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Monographs in Harmonic Analysis, III, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

- [10] J. Cohen, “A sharp estimate for a multilinear singular integral in $\mathbb{R}^n$ ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:5 (1981), 693–702.
- [11] J. Cohen, J. Gosselin, “On multilinear singular integral operators on $\mathbb{R}^n$ ”, *Studia Math.*, **72**:3 (1982), 199–223.
- [12] J. Cohen, J. Gosselin, “A BMO estimate for multilinear singular integrals”, *Illinois J. Math.*, **30**:3 (1986), 445–465.
- [13] Y. Meyer, R. Coifman, *Wavelets, Calderón–Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., **48**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [14] Ding Yong, Lu Shan Zhen, “Weighted boundedness for a class of rough multilinear operators”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **17**:3 (2001), 517–526.
- [15] Chen Wengu, Hu Guoen, “Weak type (H^1, L^1) estimate for a multilinear singular integral operator”, *Adv. Math. (China)*, **30**:1 (2001), 63–69.

Лиу Ланже

Университет науки и техники города Чанша, КНР

E-mail: lanzheliu@163.com

Поступило

09.12.2009