Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Лебедева, Об одном обобщении теоремы Р. Йенча,
Матем. заметки, 2010, том 88, выпуск 5, 753–758

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:48:56

Об одном обобщении теоремы Р. Йенча

Е. А. Лебедева

В работе исследуется асимптотическое поведение корней полиномов, определенных линейным методом суммирования частичной суммы ряда Фурье.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Изучение структуры корней полиномов – классическая задача теории функций. В данной работе изучаются свойства корней полиномов, определенных линейным методом суммирования частичной суммы ряда Фурье, причем ряд Лорана, получающийся из данного ряда Фурье заменой $e^{i\omega} \rightarrow z$, имеет непустую область сходимости. Установлена ограниченность данных корней с ростом степени полинома. Последнее свойство используется для обобщения классического результата теории алгебраических полиномов (см. [1], [2]): любая граничная точка круга сходимости степенного ряда является предельной для множества корней его частичных сумм. Также полученный результат распространяет на случай полиномов, полученных линейным методом суммирования из частичных сумм Фурье, утверждение, сформулированное в работе [3] для полиномов Бернштейна: предельной кривой для корней полиномов Бернштейна, приближающих кусочно-аналитическую функцию, является граница сходимости этих полиномов на комплексной плоскости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим ряд Лорана $Q(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k z^k$. В дальнейшем считаем, что $d_{-k} = d_k$. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|d_k|} = r$, причем $0 < r < 1$. Тогда область сходимости ряда Лорана – непустое кольцо $\{z \mid r < |z| < 1/r\}$. Потребуем выполнения для коэффициентов d_k дополнительных условий. Определим коэффициенты c_k равенством: $c_k := d_k r^{-|k|}$. Отметим, что тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1, \quad (1)$$

и рассмотрим функцию $p(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega}$. Предполагаем, что p имеет непрерывные производные до порядка $h - 1$ включительно, причем $h \geq 2$, а функция $p^{(h)}$ непрерывна, исключая точки ξ_μ , в которых $p^{(h)}$ претерпевает скачки δ_μ , $\mu = 0, \dots, m$. Тогда для коэффициентов c_k применима оценка (см. [4; с. 513])

$$c_k = \begin{cases} (-1)^{(h-1)/2} A_k k^{-h} + O(k^{-h-1}), & h \text{ нечетное,} \\ (-1)^{h/2} B_k k^{-h} + O(k^{-h-1}), & h \text{ четное,} \end{cases} \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00162-а) и программы президента РФ (грант № МК-7413-2010-1).

где

$$A_k := -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu} \sin k\xi_{\mu}, \quad B_k := -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_{\mu} \cos k\xi_{\mu}.$$

Предположим, что для коэффициентов A_k, B_k существуют абсолютные константы a и b такие, что

$$0 < a < \left| \frac{A_k}{A_{k-1}} \right| < b, \quad 0 < a < \left| \frac{B_k}{B_{k-1}} \right| < b. \quad (3)$$

Рассмотрим также сходящийся для всех непрерывных функций линейный метод суммирования, определенный коэффициентами своей треугольной матрицы: $\lambda_{n,k}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = 0, \dots, n$. Тогда, как известно (см. [5; с. 474–475]), последовательность $\lambda_{n,k}$ равномерно ограничена: $|\lambda_{n,k}| \leq C$, где C – абсолютная константа, и имеет место сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,k} = 1$. Потребуем дополнительно, чтобы данная сходимость была равномерной по $k \in \mathbb{N}$. Тогда выполнено условие, аналогичное (3):

$$0 < a < \left| \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,k-1}} \right| < b. \quad (4)$$

Доопределим коэффициенты для отрицательных значений k : $\lambda_{n,-k} := \lambda_{n,k}$. Определим последовательность полиномов

$$Q_{n,r}(z) := \sum_{k=-n}^n \lambda_{n,k} d_k z^k = \sum_{k=-n}^n \lambda_{n,k} c_k r^{|k|} z^k.$$

Изучим асимптотическое поведение корней полиномов $Q_{n,r}(z)$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого фиксированного r , $0 < r < 1$ в любой окрестности точки вида $re^{i\omega}$, $1/re^{i\omega}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, находится бесконечное множество корней функций $Q_{n,r}$.*

Доказательству предположим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Модули корней полиномов $Q_{n,r}$ ограничены при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном r .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся понятием границы Коши (the Cauchy bound). Для полинома $A_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, границей Коши $\rho(A_n)$ называют единственный положительный корень полинома

$$A_n^0(z) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| z^k.$$

Известно, что все корни полинома A_n лежат в круге $|z| \leq \rho(A_n)$ (см. [6; § 8.1], [7; § 1.2]). Поэтому для доказательства ограниченности по $n \in \mathbb{N}$ модулей корней полиномов $Q_{n,r}$ достаточно установить ограниченность по $n \in \mathbb{N}$ границ Коши $\rho(Q_{n,r})$ данных полиномов.

Воспользуемся теоремой 8.1.7 из [6], а именно оценкой 8.1.7: если

$$f(z) = \sum_{j=0}^k b_j z^{m(j)}, \quad 0 \leq m(j) < m(j+1), \quad m(k) = n,$$

$r_0 = 0$, $r_k = 1$, $r_j > 0$ при $j = 1, \dots, k-1$, то

$$\rho(f) \leq \max_{1 \leq j \leq k} \left(\frac{1+r_{j-1}}{r_j} \left| \frac{b_{j-1}}{b_j} \right| \right)^{1/(m(j)-m(j-1))}.$$

Пусть $m(j) = j$, $r_j = 1$ при $j \neq 0$ и $r_0 = 0$. Тогда

$$\rho(f) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1+r_{j-1}}{r_j} \left| \frac{b_{j-1}}{b_j} \right| \right) = \max \left\{ \left| \frac{b_0}{b_1} \right|, 2 \left| \frac{b_1}{b_2} \right|, \dots, 2 \left| \frac{b_{n-1}}{b_n} \right| \right\}.$$

Применим данную оценку к семейству полиномов $Q_{n,r}$. Так как $c_k = c_{-k}$ и $\lambda_{n,k} = \lambda_{n,-k}$, то

$$\frac{\lambda_{n,-k-1} c_{-k-1} r^{|-k-1|}}{\lambda_{n,-k} c_{-k} r^{|-k|}} = \frac{\lambda_{n,k+1} c_{k+1} r^{|k+1|}}{\lambda_{n,k} c_k r^{|k|}};$$

следовательно, достаточно рассмотреть только $\lambda_{n,k} c_k r^{|k|}$, $k = 0, \dots, n$, но при этом требуется доказать уже двойное неравенство

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{r \lambda_{n,k+1} c_{k+1}}{\lambda_{n,k} c_k} \right| \leq C_2, \quad \text{где } C_1, C_2 - \text{абсолютные константы.}$$

В силу свойства (4) коэффициентов $\lambda_{n,k}$ достаточно доказать неравенство

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \leq C_2, \quad k \in \mathbb{N},$$

C_1, C_2 – абсолютные константы. Но оно немедленно следует из оценки (2) для коэффициентов c_k и условия (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если при некоторых k имеем $c_k = 0$, то достаточно воспользоваться оценкой 8.1.7 из [6] и оценкой (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Повторяя дословно доказательство леммы 1 для семейства функций $\tilde{Q}_{n,r}(z) := \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{n,k} c_k r^{|k|} z^k$, получаем ограниченность корней семейства $\tilde{Q}_{n,r}$ по n при фиксированном r .

ЛЕММА 2. При фиксированном r и $n \rightarrow \infty$ последовательность функций $Q_{n,r}$ сходится в кольце $r \leq |z| \leq 1/r$ к аналитической функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой Витали. Покажем, что при фиксированном r последовательность функций $|Q_{n,r}|$ равномерно ограничена в кольце $r \leq |z| \leq 1/r$. Из определения $\lambda_{n,k}$, асимптотического равенства (2) для c_k (не умаляя общности, считаем, что h нечетно) и неравенства $r \leq |z| \leq 1/r$ следует, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-n}^n \lambda_{n,k} d_k z^k \right| &= \left| \sum_{k=-n}^n \lambda_{n,k} c_k r^{|k|} z^k \right| \leq \sum_{k=-n}^n |\lambda_{n,k}| |c_k| r^{|k|} |z|^k \leq \sum_{k=-n}^n |\lambda_{n,k}| |c_k| \\ &\leq C \sum_{k=-n}^n |c_k| \leq C |c_0| + 2C \sum_{k=1}^n \left| (-1)^{(h-1)/2} A_k k^{-h} + O(k^{-h-1}) \right|. \end{aligned}$$

Последнее выражение конечно в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-h}$.

Покажем, что при фиксированном r последовательность функций $|Q_{n,r}|$ сходится на множестве точек $|z| = 1$. А именно, докажем, что последовательность $|Q_{n,r}(e^{i\omega})|$ фундаментальна по n . Действительно, используя определения $Q_{n,r}$ и $\lambda_{n,k}$, последовательно имеем

$$\begin{aligned} & |Q_{n+p}(e^{i\omega}) - Q_{n,r}(e^{i\omega})| \\ &= 2 \left| \sum_{k=1}^{n+p} \lambda_{n+p,k} c_k r^k \cos(k\omega) - \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} c_k r^k \cos(k\omega) \right| \\ &\leq 2 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_{n+p,k} c_k r^k \cos(k\omega) \right| + 2 \left| \sum_{k=1}^n (\lambda_{n+p,k} - \lambda_{n,k}) c_k r^k \cos(k\omega) \right|. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $|\cos(k\omega)| \leq 1$, $r < 1$, коэффициенты $|\lambda_{n,k}|$ равномерно ограничены, то слагаемое

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_{n+p,k} c_k r^k \cos(k\omega) \right| < C_3 \sum_{k=n+1}^{n+p} r^k,$$

и может быть сделано сколь угодно малым при больших n и любых $p \in \mathbb{N}$. Для второго слагаемого этот вывод следует из равномерной по $k \in \mathbb{N}$ сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,k} = 1$, а значит, и фундаментальности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим противное. Зафиксируем точку $z_0 := 1/re^{i\omega}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, и пусть существует число $0 < \varepsilon < 1$ такое, что круг $|z - z_0| < \varepsilon$ не содержит корней функций $Q_{n,r}$. Обозначим

$$D := \left\{ z \mid r < |z| < \frac{1}{r} \right\} \cap \{ z \mid |z - z_0| < \varepsilon \}.$$

В лемме 2 установлено, что последовательность функций $Q_{n,r}$ равномерно сходится в кольце $r < |z| < 1/r$ к аналитической функции. Обозначим эту функцию Q_0 . Тогда из теоремы Гурвица следует, что $Q_0(z) \neq 0$ при $z \in D$.

Выберем ветвь функции $\sqrt[n]{Q_{n,r}}$ так:

$$\sqrt[n]{Q_{n,r}} := \sqrt[n]{|Q_{n,r}|} \exp\left(\frac{i \arg(Q_{n,r})}{n}\right),$$

и возьмем открытый круг $u \subset D$. Тогда выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_{n,r}(z)| = |Q_0(z)| \neq 0$ равномерно по $z \in u$, и $-\pi \leq \arg(Q_{n,r}(z)) \leq \pi$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при $z \in u$ имеют место равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(i \arg(Q_{n,r}(z))/(n)) = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Q_{n,r}(z)|} = 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{Q_{n,r}(z)} = 1$.

Так как для функций $Q_{n,r}$ выполняется свойство $Q_{n,r}(z) \equiv Q_{n,r}(1/z)$, то множество всех корней функций $Q_{n,r}$ можно представить в виде $z_{n,k}$, $1/z_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\begin{aligned} Q_{n,r}(z) &= z^{-n} c_n \prod_{k=1}^n \left(\frac{z}{z_{n,k}} - 1 \right) (zz_{n,k} - 1), \\ |Q_{n,r}(z)| &\leq |z|^{-n} |c_n| \prod_{k=1}^n \left(\left| \frac{z}{z_{n,k}} \right| + 1 \right) (|zz_{n,k}| + 1). \end{aligned}$$

Из леммы 1 и свойства $Q_{n,r}(z) \equiv Q_{n,r}(1/z)$ следует существование положительного числа η такого, что $\eta \leq |z_{n,k}| \leq \eta^{-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n$. Далее, если $|z - z_0| < \varepsilon$, то $1/r - \varepsilon < |z| < 1/r + \varepsilon$, поэтому

$$|Q_{n,r}(z)| \leq \left(\frac{1}{r} - \varepsilon\right)^{-n} |c_n| \left(\frac{1/r + \varepsilon}{\eta} + 1\right)^{2n},$$

$$\sqrt[n]{|Q_{n,r}(z)|} \leq \frac{1}{1/r - \varepsilon} \sqrt[n]{|c_n|} \left(\frac{1/r + \varepsilon}{\eta} + 1\right)^2.$$

Последнее неравенство, учитывая соотношение (1), означает равномерную по $n \in \mathbb{N}$ ограниченность функций $\sqrt[n]{|Q_{n,r}|}$ в круге $|z - z_0| < \varepsilon$.

Итак, поскольку функции $\sqrt[n]{Q_{n,r}}$ аналитичны и равномерно по $n \in \mathbb{N}$ ограничены в круге $|z - z_0| < \varepsilon$, и для некоторого открытого круга $u \subset D$ выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{Q_{n,r}(z)} = 1$, по теореме Витали имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{Q_{n,r}(z)} = 1 \quad \text{в круге } |z - z_0| < \varepsilon. \quad (5)$$

Для функций $\tilde{Q}_{n,r} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{n,k} c_k r^{|k|} z^k$ выполняется соотношение, аналогичное (5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\tilde{Q}_{n,r}(z)} = 1 \quad \text{в круге } |z - z_0| < \varepsilon. \quad (6)$$

Действительно, так как при $r < |z| < 1/r$

$$|Q_{n,r}(z) - \tilde{Q}_{n,r}(z)| = |\lambda_{n,n} c_n r^n (z^n + z^{-n})| \leq C_4 |c_n|,$$

где C_4 – абсолютная константа, учитывая оценку (2), равномерно в кольце $r < |z| < 1/r$ имеет место сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_{n,r} - \tilde{Q}_{n,r}| = 0$. Следовательно, равномерно в кольце $r < |z| < 1/r$ последовательность $\tilde{Q}_{n,r}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к функции Q_0 . Возьмем $\xi \in D$. Как установлено ранее, $Q_0(\xi) \neq 0$. Если предположить, что в каждой окрестности точки ξ содержится бесконечное множество корней функций $\tilde{Q}_{n,r}$, то по теореме Гурвица $Q_0(\xi) = 0$. Полученное противоречие означает, что существует окрестность точки ξ , содержащая лишь конечное количество корней функций $\tilde{Q}_{n,r}$, а значит, можно выбрать окрестность v точки ξ , не содержащую ни одного корня функции $\tilde{Q}_{n,r}$. Повторяя дословно рассуждения, проведенные для функций $Q_{n,r}$, и беря в этом рассуждении найденную окрестность v в качестве открытого круга u , получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\tilde{Q}_{n,r}(z)} = 1$ при $z \in v$.

Применяя последовательно те же оценки, что и для семейства $Q_{n,r}$, что возможно, благодаря замечанию 2, получаем равномерную по $n \in \mathbb{N}$ ограниченность функций $\sqrt[n]{|\tilde{Q}_{n,r}|}$ в круге $|z - z_0| < \varepsilon$. Следовательно, по теореме Витали имеет место соотношение (6).

Из определений функций $Q_{n,r}$ и $\tilde{Q}_{n,r}$ следует, что

$$\lambda_{n,n} c_n r^n (z^n + z^{-n}) = Q_{n,r}(z) - \tilde{Q}_{n,r}(z).$$

Зафиксируем точку $\tilde{z}$ такую, что $|\tilde{z}| = 1/r + \varepsilon/2$ и $|\tilde{z} - z_0| < \varepsilon$.

Соотношения (5) и (6) означают, что для любого $\varepsilon_0 > 0$, начиная с некоторого номера n_0 , $|Q_{n,r}(\tilde{z})| \leq (1 + \varepsilon_0)^n$ и $|\tilde{Q}_{n,r}(\tilde{z})| \leq (1 + \varepsilon_0)^n$. Поэтому

$$|Q_{n,r}(\tilde{z}) - \tilde{Q}_{n,r}(\tilde{z})| \leq 2(1 + \varepsilon_0)^n.$$

Кроме того, учитывая, что $|\lambda_{n,n}| < C$, получаем

$$|\lambda_{n,n} c_n r^n (\tilde{z}^n + \tilde{z}^{-n})| \geq C |c_n| r^n \left(\left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-n} \right).$$

Следовательно,

$$|c_n| r^n \leq \frac{2(1 + \varepsilon_0)^n (1/r + \varepsilon/2)^n}{C((1/r + \varepsilon/2)^{2n} - 1)}, \quad \sqrt[n]{|c_n| r^n} \leq \frac{\sqrt[n]{2/C} (1 + \varepsilon_0) (1/r + \varepsilon/2)}{\sqrt[n]{(1/r + \varepsilon/2)^{2n} - 1}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, учитывая равенство (1), получаем

$$r \leq \frac{1 + \varepsilon_0}{1/r + \varepsilon/2}.$$

Последнее неравенство должно выполняться при любом ε_0 ; однако при $\varepsilon_0 < \varepsilon r/2$ неравенство не выполняется. Полученное противоречие означает, что любая точка вида $1/re^{i\omega}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$ является предельной для корней функций $Q_{n,r}$. А так как $Q_{n,r}(z) \equiv Q_{n,r}(1/z)$, любая точка вида $re^{i\omega}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$ тоже является предельной для корней функций $Q_{n,r}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 распространяет результат Йенча [1] о предельном множестве корней частичных сумм степенного ряда с единичным радиусом сходимости на случай сходящегося для всех непрерывных функций линейного метода суммирования и рядов Лорана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 1 переносит на случай полиномов, полученных линейным методом суммирования из частичных сумм Фурье, утверждение, сформулированное и доказанное для частного случая в работе [3] для полиномов Бернштейна: предельной кривой для корней полиномов Бернштейна, приближающих кусочно-аналитическую функцию, является граница сходимости этих полиномов на комплексной плоскости.

Автор благодарит профессора И. Я. Новикова за постановку данной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Jentzsch, *Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen*, Inaugural-Dissertation, Berlin, 1914.
- [2] Д. В. Христофоров, “Об асимптотических свойствах интерполяционных многочленов”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 129–138.
- [3] И. Я. Новиков, “Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши”, *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 239–253.
- [4] Г. М. Фихтенгольц, *Курс интегрального и дифференциального исчисления: в 3 т.. т. 3*, Физматлит, М., 1960.
- [5] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [6] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, Claredron Press, Oxford, 2002.
- [7] В. В. Прасолов, *Многочлены*, МЦНМО, М., 2003.

Е. А. Лебедева

Курский государственный университет

E-mail: ealebedeva2004@mail.ru

Поступило

22.09.2008

исправленный вариант

21.05.2010