Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, О сингулярных решениях уравнения
Кортевега–де Фриза, *Матем. заметки*, 2010, том 88,
выпуск 5, 770–777

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 07:03:56

О сингулярных решениях уравнения Кортевега–де Фриза

С. И. Похожаев

В статье рассматриваются два класса сингулярных решений уравнения Кортевега–де Фриза: сингулярные решения задачи Коши и сингулярные бегущие волны.

В обоих случаях устанавливаются достаточные условия их возникновения.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ) посвящена обширная литература (см., например, [1], [2] и приведенную там литературу).

Задача Коши для КдФ рассматривалась в пионерских работах [3]–[5], а также во многих последующих работах.

Основные результаты этих работ относятся к глобальной разрешимости и единственности решений задач Коши в соответствующих функциональных пространствах убывающих (при $|x| \rightarrow \infty$) функций.

Значительно большее число работ посвящено специальным классам решений уравнения КдФ – типа бегущих волн.

После открытия Гарднером, Крусалом и Миурой метода специальных преобразований [6] и последующего его развития в [7], [8] и других работах была создана общая теория КдФ-уравнения. Эта теория позволила рассмотреть структуру решений, их взаимодействие и асимптотику при $t \rightarrow \infty$. Разработанный здесь аппарат стал классическим и применяется для широкого класса нелинейных эволюционных (в основном одномерных по x) уравнений.

Развитая в этих работах теория уравнения КдФ касается, в основном, регулярных решений, т.е. гладких и убывающих на бесконечности, т.е. при $|x| \rightarrow \infty$.

Теория сингулярных решений КдФ развита значительно меньше. Основное содержание здесь составляет анализ специального класса решений с заданной особенностью на одной или нескольких пространственных кривых [9].

Настоящая статья посвящена анализу возникновения сингулярных решений КдФ как в случае задачи Коши, так и в случае бегущих волн.

Основным инструментом исследования здесь является метод нелинейной емкости, развитый в работе [10].

Статья организована следующим образом. В п. 1 содержится постановка задачи и основной результат о решениях задачи Коши определенного класса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00441, 09.01.12157офи-м), а также программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

В п. 2 содержится основной результат об определенном классе сингулярных бегущих волн.

В пп. 3 и 4 приводятся доказательства соответствующих результатов.

2. О сингулярных решениях задачи Коши. Рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t = uu_x - u_{xxx} \quad \text{в } \mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Под решением задачи Коши с $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ понимается функция $u(t, x)$ такая, что ее производная $v := u_x(t, x)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+^2)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint v^2 \varphi dt dx = - \iint v(\varphi_t + \varphi_{xxx}) dt dx - \iint uv_x \varphi dt dx - \int v_0 \varphi|_{t=0} dx \quad (2.3)$$

для любой функции φ из класса $C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}^2$. Здесь $v_0 = v_0(x) = u_{0x}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Таким образом, в определении решения отсутствуют условия на поведение решения как при $|x| \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$.

Класс рассматриваемых решений $u(t, x)$ уравнения КдФ определяется условием

$$|uu_{xx}| \leq q|u_x|^2, \quad q > 1, \quad (2.4)$$

в соответствующей области $Q \subset \mathbb{R}_+^2$.

Отметим, что это условие инвариантно относительно растяжений

$$u \mapsto Au \quad \text{и} \quad x \mapsto Lx.$$

Оказывается, что решения, обладающие свойством (2.4), при отрицательной начальной функции u_0 разрушаются за конечное время. При этом разрушение может иметь либо “грубый” характер, т.е.

$$|u(t, x)| \rightarrow +\infty \quad \text{при } (t, x) \rightarrow (t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+^2,$$

либо более “мягкий” характер типа градиентной катастрофы, т.е.

$$|u_x(t, x)| \rightarrow +\infty \quad \text{при } (t, x) \rightarrow (t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Более точно, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть решение u задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет условию (2.4) в некотором прямоугольнике $Q_L = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq L^3, |x| < L\}$. Пусть начальная функция $u_0 \in C^1$ такая, что ее производная $v_0(x) = u'_0(x)$ удовлетворяет неравенству (4.8) с некоторой пробной функцией φ (из указанного в п. 3 класса функций).

Тогда не существует решения задачи Коши в этом прямоугольнике.

В частности, не существует такого решения при $T \geq L^3$.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим задачу Коши (2.1), (2.2) с начальной функцией

$$u_0(x) = A_0 x, \quad A_0 \neq 0. \quad (2.5)$$

Решением этой задачи является функция

$$u(t, x) = \frac{x}{T_0 - t} \quad (2.6)$$

с $T_0 = 1/A_0$.

Таким образом, при $A_0 > 0$ решение этой задачи обращается в $+\infty$ при $t \rightarrow T_0$.

В то же время, при $A_0 < 0$ существует глобальное (при все $t > 0$) гладкое решение задачи Коши (2.1), (2.5).

Рассмотрим это решение с позиции теоремы 2.1.

Решение (2.6) удовлетворяет, очевидно, условию (2.4) с $q = 0$. Тогда неравенство (4.8) при $\varepsilon_0 = 2$ принимает вид

$$c_0 L^{-3} < A_0 \int_{-2}^2 \varphi_1(\xi) d\xi.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.1, не существует решения задачи (2.1), (2.5) при $t > T_* = L_*^3 = (c_0/c_1)(1/A_0)$, где

$$c_1 = \int_{-2}^2 \varphi_1(\xi) d\xi$$

и постоянная $c_0 > 0$ определена формулой (4.7).

Таким образом, зависимость времени T_* разрушения этого решения от начальных данных совпадает с $T_0 = 1/A_0$ с точностью до несущественного коэффициента c_0/c_1 . Далее, можно рассмотреть соответствующую вариационную задачу об отыскании оптимального значения этого коэффициента, т.е. $\inf c_0/c_1$ в соответствующем классе функций.

3. О сингулярных бегущих волнах. Рассмотрим решения уравнения КдФ (2.1) типа бегущей волны

$$u(t, x) = u(\xi), \quad (3.1)$$

где $\xi = x - ct$ и c есть скорость волны. Тогда для нахождения функции $u(\xi)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''' = uu' + cu', \quad (3.2)$$

которое, как известно, допускает следующие интегралы:

$$\frac{u^2}{2} = u'' - cu - J_0, \quad (3.3)$$

$$\frac{u'^2}{2} = \frac{u^3}{6} + \frac{c}{2} u^2 + J_0 u + J_1 \quad (3.4)$$

с произвольными константами J_0 и J_1 .

О регулярных глобальных решениях (т.е. при всех $\xi \in \mathbb{R}$) этого уравнения при соответствующих значениях J_0 и J_1 известно достаточно много (см., например, [1] и приведенную там литературу).

Сингулярные решения этого уравнения можно определить с помощью фазового портрета дифференциального уравнения первого порядка (3.4).

В настоящей заметке на основании метода нелинейной емкости [10], т.е. метода оптимальных пробных функций, устанавливается существование сингулярных решений уравнения (3.2) независимо от значений J_1 . Более того, в явной форме находится оценка сверху для длины волны L_∞ соответствующей сингулярной бегущей волны в зависимости от скорости c .

В статье рассматриваются обобщенные решения уравнения (3.3) без каких-либо условий поведения решения $u(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

А именно, под решением уравнения (3.3) понимается функция $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int u^2 \varphi d\xi = 2 \int u \varphi'' d\xi - 2c \int u \varphi d\xi - 2J_0 \int \varphi d\xi \quad (3.5)$$

для любой $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$J_0 > \frac{c^2}{2}. \quad (3.6)$$

Тогда не существует решения уравнения (3.3) с носителем $L \geq 2$, удовлетворяющим неравенству

$$L^4((2J_0)^{1/2} - |c|)^2 > \frac{c_0}{c_1}, \quad (3.7)$$

где постоянные $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$ определены равенствами (5.3) и (5.4) соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В силу теоремы существования локального (максимального) решения задачи Коши для уравнения (3.3) при любом J_0 , в том числе и удовлетворяющим неравенству (3.6), существует решение этого уравнения.

Следовательно, при условиях (3.6) и (3.7) существует сингулярное решение уравнения (3.3) с носителем $L_\infty \leq L$.

4. Доказательство теоремы 2.1. Для производной $v = u_x$ в силу уравнения КдФ имеем

$$v_t = uv_x + v^2 - v_{xxx} \quad \text{в } \mathbb{R}_+^2. \quad (4.1)$$

Умножим это уравнение на пробную функцию φ из класса $C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}^2$. Тогда после интегрирования по $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ с $t \geq 0$ получим

$$\iint v^2 \varphi dt dx = - \iint v(\varphi_t + \varphi_{xxx}) dt dx - \iint uv_x \varphi dt dx - \int v_0 \varphi|_{t=0} dx. \quad (4.2)$$

Здесь $v_0 = v_0(x) = u_{0x}(x)$.

Выберем пробную функцию $\varphi \geq 0$ так, чтобы

$$\iint \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx})^2}{\varphi} dt dx < \infty. \quad (4.3)$$

Ясно, что такие функции существуют. Тогда в силу неравенства Гёльдера с параметром $\varepsilon > 0$ соотношение (4.2) для решений, удовлетворяющих условию (2.3) на носителе пробной функции, влечет

$$\begin{aligned} & \iint v^2 \varphi \, dt \, dx \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \iint v^2 \varphi \, dt \, dx + \frac{1}{2\varepsilon} \iint \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx})^2}{\varphi} \, dt \, dx + q \iint v^2 \varphi \, dt \, dx - \int v_0 \varphi|_{t=0} \, dx. \end{aligned}$$

Откуда, выбирая $\varepsilon = \varepsilon_0$ с

$$\varepsilon_0 = 2(1 - q) > 0,$$

получаем

$$0 \leq \frac{1}{2\varepsilon_0} \iint \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx})^2}{\varphi} \, dt \, dx - \int v_0 \varphi|_{t=0} \, dx. \quad (4.4)$$

Таким образом, если правая часть этого неравенства будет строго отрицательной, мы получим противоречие с предположением о существовании решений из рассматриваемого класса функций.

Выберем теперь пробную функцию φ следующим образом:

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(r) \varphi_1(\xi),$$

где $\tau = t/T$ и $\xi = x/L$ со свободными параметрами $T \geq 2$ и $L \geq 2$. Здесь φ_0 и φ_1 суть неотрицательные функции из классов $C^1(\mathbb{R})$ и $C^3(\mathbb{R})$ соответственно такие, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & \text{при } r \geq 2, \end{cases} & \varphi_1(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{при } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\xi| \geq 2, \end{cases} \\ \int_0^2 \frac{|\varphi_0'(\tau)|^2}{\varphi_0(\tau)} \, d\tau &< \infty, & \int_{-2}^2 \frac{|\varphi_1'''(\xi)|^2}{\varphi_1(\xi)} \, d\xi &< \infty. \end{aligned}$$

При таком выборе пробной функции φ имеем

$$\begin{aligned} \iint \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx})^2}{\varphi} &\leq 2 \iint \frac{\varphi_t^2}{\varphi} \, dt \, dx + 2 \iint \frac{\varphi_{xxx}^2}{\varphi} \, dt \, dx \\ &= 2LT^{-1} \int_0^2 \frac{\varphi_0'^2(\tau)}{\varphi_0(\tau)} \, d\tau \int_{-2}^2 \varphi_1(\xi) \, d\xi \\ &\quad + 2TL^{-5} \int_0^2 \varphi_0(\tau) \, d\tau \int_{-2}^2 \frac{|\varphi_1'''(\xi)|^2}{\varphi_1(\xi)} \, d\xi. \end{aligned}$$

Откуда при

$$T = L^3 \quad (4.5)$$

находим, что

$$\iint \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx})^2}{\varphi} = 2c_0 L^{-2} \quad (4.6)$$

с

$$c_0 = \int_0^2 \frac{\varphi_0'^2(\tau)}{\varphi_0(\tau)} \, d\tau \int_{-2}^2 \varphi_1(\xi) \, d\xi + \int_0^2 \varphi_0(\tau) \, d\tau \int_{-2}^2 \frac{|\varphi_1'''(\xi)|^2}{\varphi_1(\xi)} \, d\xi. \quad (4.7)$$

Тогда

$$0 \leq \frac{1}{2\varepsilon_0} \iint \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx})^2}{\varphi} - \int v_0 \varphi|_{t=0} dx \leq \frac{c_0}{\varepsilon_0} L^{-2} - L \int_{-2}^2 v_0(L\xi) \varphi_1(\xi) d\xi.$$

Следовательно, если решение u удовлетворяет условию (2.4) в прямоугольнике

$$Q_L = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq L^3, |x| \leq L\},$$

то правая часть неравенства (4.4) становится отрицательной при выполнении неравенства

$$\frac{c_0}{\varepsilon_0} L^{-3} < \int_{-2}^2 v_0(L\xi) \varphi_1(\xi) d\xi. \quad (4.8)$$

Таким образом, в прямоугольнике Q_L с параметром L , удовлетворяющим неравенству (4.8) не существует решения u задачи Коши (2.1), (2.2).

В частности, не существует такого решения при

$$T > T_* = L_*^3, \quad (4.9)$$

где $L_* = L$ из неравенства (4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Ясно, что выбранная пробная функция φ не является оптимальной с точки зрения значения коэффициента c_0 неравенства (4.8).

Для нахождения оптимального соотношения типа (4.8) следует рассмотреть соответствующую вариационную задачу выбора пробной функции φ для неравенства (4.8) при заданной начальной функции $u_0(x)$ и значении ее производной $v_0(x) = u'_0(x)$.

5. Доказательство теоремы 3.1. Умножим уравнение (3.3) на неотрицательную пробную функцию $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$ с компактным носителем. Тогда после интегрирования получим

$$\int u^2 \varphi d\xi = 2 \int u \varphi'' d\xi - 2c \int u \varphi d\xi - 2J_0 \int \varphi d\xi. \quad (5.1)$$

Отсюда после применения неравенств Юнга с параметрами $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ находим, что

$$\int u^2 \varphi d\xi \leq \frac{\delta}{2} \int u^2 \varphi d\xi + \frac{2}{\delta} \int \frac{|\varphi''|^2}{\varphi} d\xi + \frac{\varepsilon}{2} \int u^2 \varphi d\xi + 2 \frac{c^2}{\varepsilon} \int \varphi d\xi - 2J_0 \int \varphi d\xi. \quad (5.2)$$

Выберем теперь пробную функцию φ следующим образом:

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\eta), \quad \eta = \frac{\xi}{L},$$

где $L \geq 2$ есть свободный параметр и функция $\varphi_0 \geq 0$ из класса $C^2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(\eta) &= \begin{cases} 1 & \text{при } |\eta| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\eta| \geq 2, \end{cases} \\ c_0 &= \int_{-2}^2 \frac{|\varphi_0''(\eta)|^2}{\varphi_0(\eta)} d\eta < \infty. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ясно, что такая функция φ_0 существует. Тогда при

$$\varepsilon + \delta = 2$$

с $\varepsilon, \delta > 0$ неравенство (5.2) влечет

$$0 \leq \frac{2c_0}{2-\varepsilon} \frac{1}{L^3} - 2Lc_1 \left(J_0 - \frac{c^2}{\varepsilon} \right), \quad c_1 = \int_{-2}^2 \varphi_0(\eta) d\eta. \quad (5.4)$$

Отсюда непосредственно получаем, что если существуют $0 < \varepsilon < 2$ и $L \geq 2$ такие, что правая часть неравенства (5.4) является строго отрицательной, то не существует указанного ограниченного решения типа бегущей волны (3.1) при $|\xi| \geq 2$.

Таким образом, достаточным условием существования неограниченной бегущей волны с длиной волны L_∞ является выполнение неравенства

$$L^4 \left(J_0 - \frac{c^2}{\varepsilon} \right) (2 - \varepsilon) > \frac{c_0}{c_1} \quad (5.5)$$

с $L \geq L_\infty$ при некотором $\varepsilon \in (0, 2)$.

Ясно, что необходимым условием для выполнения этого неравенства является

$$J_0 > \frac{c^2}{2}. \quad (5.6)$$

При этом условии выберем оптимальное значение ε в неравенстве (5.5), т.е.

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{J_0} \right)^{1/2} |c|.$$

Тогда получим следующее условие существования неограниченной (по амплитуде) волны конечной длины со скоростью c , а именно,

$$L^4 ((2J_0)^{1/2} - |c|) > \frac{c_0}{c_1}. \quad (5.7)$$

Здесь правая часть неравенства зависит от выбора пробной функции φ_0 из соответствующего класса.

Для получения минимального значения правой части неравенства (5.7) достаточно рассмотреть соответствующую вариационную задачу. А именно, найти

$$C_* = \inf_{\varphi_0 \in K_0} \int_{-2}^2 \frac{|\varphi_0''(\eta)|^2}{\varphi_0(\eta)} d\eta \left(\int_{-2}^2 \varphi_0(\eta) d\eta \right)^{-1},$$

где

$$K_0 := \{ \varphi_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \mid \varphi_0 \geq 0 \text{ в } \overline{\Omega} = [-2, 2] \text{ и } \varphi_0 = \varphi'_0 \text{ на } \partial\Omega \}.$$

Тогда достаточное условие существования сингулярной бегущей волны принимает вид

$$L^4 [(2J_0)^{1/2} - |c|]^2 > C_*. \quad (5.8)$$

Таким образом, при выполнении условий (5.6) и (5.8) не существует решения дифференциального уравнения (3.3) на отрезке $[-2L, +2L]$ и, в частности, не существует на этом отрезке ограниченного решения этого уравнения.

Автор благодарен А. Б. Шабату за полезную дискуссию об уравнении КДФ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [2] T. Kappeler, J. Pöschel, *KdV & KAM*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **45**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [3] A. Sjöberg, “On the Korteweg–de Vries equation: existence and uniqueness”, *J. Math. Anal. Appl.*, **29**:3 (1970), 569–579.
- [4] T. Kato, “The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation”, *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar. v.I* (Paris, 1978/1979), *Res. Notes in Math.*, **53**, Pitman, Boston, MA, 1980, 293–307.
- [5] С. Н. Кружков, А. В. Фаминский, “Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза”, *Матем. сб.*, **120**:3 (1983), 396–425.
- [6] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg–de Vries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095–1097.
- [7] P. D. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.
- [8] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [9] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, “Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **133**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1984, 17–37.
- [10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, *Тр. МИАН*, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

С. И. Похожаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступило

28.06.2010