Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А.И. Мальцева, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 803–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:08:49

Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева

С. И. Адян

В работе [1] автора 1976 г. была предложена конструкция новой операции умножения групп – n -периодического произведения групп для нечетных $n \geq 665$. Эта операция определяется с использованием теории Новикова–Адяна, изложенной в монографии автора [2]. Она отличается от классических операций прямого и свободного умножений групп и обладает всеми естественными свойствами этих операций, включая свойство наследственности по подгруппам. Тем самым было дано положительное решение известной проблемы А. И. Мальцева о существовании таких операций. К сожалению, в указанной статье не был подробно разобран случай, когда исходные группы содержат инволюцию.

В данной статье устанавливается, что этот пробел для случая, когда исходные группы содержат инволюцию, легко устраняется дополнительным условием на выбор определяющих соотношений периодического произведения. Просто нужно в процессе индукции в каждом ранге α исключить соотношения вида $A^n = 1$, где A есть произведение двух инволюций предыдущего ранга. Отмечается, что данное ограничение естественным образом напрашивается из доказательства ключевой леммы II.5.21 указанной монографии автора и обосновывается этим же доказательством. Отмечается, что при указанном ограничении на выбор определяющих соотношений все доказанные в статье 1976 г. свойства n -периодического произведения групп остаются в силе с соответствующими очевидными поправками. Более того, при этом ограничении можно рассматривать n -периодические произведения для любых периодов $n \geq 665$, включая и четные.

Библиография: 8 названий.

Суть изложенного в монографии автора [2] подхода для доказательства бесконечности периодических групп достаточно большой экспоненты заключается в том, что, начиная со свободной группы $B(m, n, 0)$ ранга m , которая есть свободное произведение m бесконечных циклических групп, мы последовательно добавляем определяющие соотношения вида $A^n = 1$: сначала для всех элементарных периодов ранга 1, затем – для всех элементарных периодов ранга 2 и т.д. При этом само понятие элементарного периода ранга $\alpha > 0$, так же, как и все сопутствующие ему понятия для ранга α , определяются совместной индукцией на базе отношения равенства слов в уже построенной группе $B(m, n, \alpha - 1)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы “Ведущие научные школы”.

В работе [1] 1976 г. этот подход был использован автором для решения проблемы А. И. Мальцева о существовании точных операций умножения групп, отличных от прямого и свободного умножений, и обладающих свойствами ассоциативности и наследственности по подгруппам (см. [3; с. 475]).

Точность операции умножения в искомом произведении $\mathbf{F}$ означает, что каждая компонента вложена в произведение $\mathbf{F}$, причем образы заданных компонент при этом вложении попарно пересекаются только по единичному элементу и вместе порождают всю группу $\mathbf{F}$.

Вопрос о существовании таких операций был поставлен в 1948 г. и получил название *проблема А. И. Мальцева*.

Искомые новые точные операции умножения групп со свойствами ассоциативности и наследственности по подгруппам в [1] строились для нечетных периодов $n \geq 665$ и любого заданного семейства групп

$$\{G_i \mid i \in I\}. \quad (1)$$

Они называются *периодическими произведениями данного периода n* (или *n -периодическими произведениями*) и обозначаются через

$$\mathbf{F} = \prod_{i \in I}^n G_i. \quad (2)$$

Суть изложенной в работе [1] конструкции заключается в том, чтобы на базе свободного произведения

$$\mathbf{F}(n, 0) = \prod_{i \in I}^* G_i \quad (3)$$

заданного семейства нетривиальных групп классифицировать по рангам периодические слова в алфавите группы $\mathbf{F}(n, 0)$ аналогично тому, как это делалось в [2] для слов в алфавите исходной свободной группы $\mathbf{B}(m, n, 0)$, добавляя ранг за рангом все новые определяющие соотношения вида $A^n = 1$ с элементарными периодами A ранга α . Вопрос заключается в том, как индуктивно определять эти элементарные периоды A ранга α .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как было отмечено в [1], для того, чтобы построенная операция (2) была точной, достаточно исключить из числа периодов ранга 1 все элементы сомножителей G_i группы (3), которые по определению являются ее порождающими.

Это ограничение гарантирует, что в группе (2) не появятся новые соотношения, которые связывали бы элементы одной и той же подгруппы G_i .

К сожалению, в статье [1] случай, когда исходные группы G_i содержат инволюции, не был разобран подробно, точнее, не была отмечена важность исключения произведений двух инволюций из числа элементарных периодов во всех рангах для сохранения изложенных в [2] доказательств. Для устранения этого пробела мы примем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *n -периодическим произведением* данного семейства групп (1) будем понимать определенное в работе [1] периодическое произведение степени n с дополнительным условием, что в каждом ранге $\alpha > 0$ все допустимые элементарные периоды не являются произведениями двух инволюций ранга $\alpha - 1$.

Определенные таким образом операции n -периодического произведения обладают всеми свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в том числе и свойством наследственности по подгруппам, которое известно под названием *постулата А. И. Мальцева*. Этот постулат означает, что если в периодическом произведении $\mathbf{F}$ данного нечетного периода n в каждой компоненте выбрать по подгруппе, то эти подгруппы порождают в $\mathbf{F}$ периодическое произведение того же периода n для выбранных подгрупп.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теория, используемая нами в работе [1] для построения периодических произведений, предполагает отсутствие инволюций в группах, которые там строятся. Если в исходных группах G_i не было инволюций, то в силу леммы 2.36 гл. IV книги [2] они не появятся и в процессе построения n -периодического произведения $\mathbf{F}$. Если же исходные группы G_i содержат инволюции, то для доказательства того, что в процессе индуктивного построения групп $\mathbf{F}(n, \alpha)$, которые являются аналогами групп $\mathbf{B}(m, n, \alpha)$ из [2], не появляются новые инволюции, т.е. не сопряженные инволюциям из исходных групп, достаточно в каждом ранге $\alpha > 0$ исключить из рассмотрения периоды A ранга α , которые в предыдущем ранге $\alpha - 1$ равны произведению двух инволюций.

Необходимость указанного в определении 1 ограничения на выбор элементарных периодов в рангах $\alpha > 0$ при наличии инволюций в исходных группах диктуется важной ролью, которую в нашей теории играет отношение *родства* $\text{Род}(E, D)$ для элементарных слов и элементарных периодов ранга α . Два периода ранга α родственны в том и только том случае, если они сопряжены в предыдущем ранге. Дело в том, что взаимно обратные элементарные слова E и E^{-1} не должны быть родственны, т.е. они не могут быть порождены при одном и том же исходном периоде A ранга α – см. лемму 5.21 в [2; гл. II]. Эта лемма тесно связана с леммой 2.36 [2; гл. IV] об отсутствии инволюций в рангах $\alpha > 0$, которая в [2] доказывается на основе леммы II.5.21 для ранга α . С другой стороны, сама лемма II.5.21 для ранга α доказывается от противного на основе индуктивного предположения леммы IV.2.36 об отсутствии инволюций в ранге $\alpha - 1$.

Если бы, например, мы допустили к рассмотрению элементарный период ab ранга 1, где оба множителя являются инволюциями свободного произведения (3), то мы имели бы также и элементарный период ba , так как имеем $(ab)^{-1} = ba$. Тогда классы элементарных слов $\text{Эл}(1, ab)$ и $\text{Эл}(1, (ab)^{-1})$ совпадали бы, и мы бы потеряли возможность производить периодизацию слов (см. [2; § 4, гл. II]), при которой все нормированные вхождения элементарных слов одновременно становятся периодическими.

Если же мы принимаем указанное в определении 1 ограничение на выбор периодов ранга α , то и при наличии инволюций в исходных множителях G_i все изложенные в статье [1] свойства периодических произведений нечетного периода $n \geq 665$ остаются в силе в той же формулировке, за исключением теоремы 2, утверждение которой, соответственно, надо ограничить элементами, которые не равны произведению двух инволюций. Следует отметить, что эта теорема 2 для решения проблемы А. И. Мальцева не требовалась. Она использовалась нами в статье [4] для доказательства критерия простоты периодических произведений.

В случае, когда исходные компоненты содержат инволюции, для формального доказательства всех необходимых утверждений с учетом определения 1 достаточно произвести небольшую и вполне естественную корректировку доказательства ключевой для отношения $\text{Род}(E, D)$ леммы 5.21 гл. II и уточнить формулировку леммы 2.36 гл. IV книги [2] о том, какие инволюции возможны в рангах $\alpha > 0$. При этом лемма 2.36 для нечетных периодов n формулируется в следующем виде.

ТЕОРЕМА 1. *Если для непустого слова $X \in R_\alpha$ выполнено соотношение $X \stackrel{\alpha}{\sim} X^{-1}$, то слово X сопряжено в ранге α некоторой инволюции одной из подгрупп G_i группы $\mathbf{F}(n, \alpha)$.*

Доказательство этого утверждения, как и доказательство леммы 2.36 гл. IV, проводится в [2] от противного индукцией по параметру $I_\alpha(X, X^{-1})$, т.е. по числу ядер V ранга α слова X , которые не родственны своему образу $f_\alpha(V, X, X^{-1})$ при $X \stackrel{\alpha}{\sim} X^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если мы используем указанное в замечании 2 ограничение на классификацию элементарных периодов ранга α , то можно рассматривать n -периодические произведения и для четных периодов $n = 2k$. При этом все остальные определения и все доказательства останутся такими же, как они приводились в статье [1] с учетом указанной ниже небольшой корректировки доказательства леммы 5.21 гл. II в [2].

При рассмотрении n -периодических произведений для четных периодов n с использованием замечания 2, т.е. на основе определения 1, инволюции ранга α будут появляться во всех рангах независимо от их наличия в исходных группах, причем, теорема 1 в этом случае не будет верна. Но и в этом случае допустимые элементарные периоды ранга α не будут иметь вид произведения двух инволюций предыдущего ранга $\alpha - 1$. Поэтому будет выполняться лемма 5.21 гл. II работы [2], что позволит нам использовать периодизацию слов.

Что же касается леммы 5.21 гл. II, то при внимательном чтении его доказательства в [2] читатель легко может убедиться в том, что там по существу доказано следующее утверждение (для удобства читателя мы используем обозначения из [2]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть даны нормальные порождающие вхождения $P * E^{-1} * Q$ и $R * E * S$ в целые слова $Y \in \text{Цел}(X, \alpha, A)$ и $Y_1 \in \text{Цел}(X_1, \alpha, A)$ при исходном элементарном периоде A , где $l_\alpha(E) \geq 9$.*

Если $\text{Род}(E, E^{-1})$, то найдется такое правильное начало $P * D * HQ$ порождающего вхождения $P * E^{-1} * Q$, где $l_\alpha(P * D * HQ) > 3$, и такое целое слово $Y_3 \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$, что $X \stackrel{\alpha-1}{\sim} Y \stackrel{\alpha-1}{\sim} Y_3$ и выполнено соотношение (27) на с. 79 в [2], т.е. выполнено равенство

$$f_{\alpha-1}(P * D * HQ; Y, Y_3) = P_3 * C^{-1}vC * HQ, \quad (4)$$

где выделенные вхождения C^{-1} и C суть образы крайних ядер ранга $\alpha - 1$ порождающего вхождения $P * D * HQ$, а слово v является инволюцией ранга $\alpha - 1$.

Это утверждение завершает доказательство леммы II.5.21 от противного, изложенное в [2], так как там инволюции были невозможны.

В случае, когда исходные группы G_i содержат инволюции, в отличие от ситуации в [2] инволюции будут в каждом ранге $\alpha - 1$, но в силу индуктивного предположения теоремы 1 все они будут сопряжены в ранге $\alpha - 1$ инволюциям из исходных

групп G_i . Поэтому в силу замечания 2, чтобы получить противоречие здесь достаточно доказать, что исходный период A будет произведением двух инволюций. Доказательство этого утверждения на базе изложенного в [2] доказательства леммы 5.21 можно считать очевидным для читателя, знакомого с изложенной в книге [2] техникой. Формально оно проводится следующим образом.

Во первых, можно считать, что $Y_3 \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$. Тогда слово $C^{-1}vC$ есть периодическое слово вида $C^{-1}vC = S^t S'$, где период S есть образ левого периода A прообраза вхождения $P_3 * C^{-1}vC * HQ$ в периодическом слове $X \overset{\alpha-1}{\sim} Y_3$ (см. соотношение (20) на с. 78 в [2]). Следовательно, периоды A и S сопряжены в ранге $\alpha - 1$.

Кроме того, при некотором v_1 имеем $S^{r-1}S' = C^{-1}v_1C$, где C^{-1} есть результат сдвига на один период S вправо начального ядра C^{-1} вхождения (4). Это означает, что $S = vv_1^{-1}$. Нам остается доказать, что слово v_1 также есть инволюция ранга $\alpha - 1$, а это делается в точности так же, как в [2] мы доказывали, что v есть инволюция.

Таким образом, у нас остаются в силе рассуждения «от противного» как для доказательства леммы 5.21 гл. II, так и для теоремы 1, которая является новой версией леммы 2.36 гл. IV с учетом замечания 2. Вместе с ними независимо от наличия инволюций в исходных группах остаются в силе все отмеченные в работе [1] свойства n -периодических произведений за исключением теоремы 2 этой работы.

С учетом указанного в замечании 2 запрета на использование произведений двух инволюций в качестве периодов ранга $\alpha \geq 1$, теорема 2 должна формулироваться в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{F}$ есть n -периодическое произведение нечетного периода $n \geq 665$ произвольного семейства групп (1). Если элемент x группы $\mathbf{F}$ не сопряжен в группе $\mathbf{F}$ никакому элементу подгрупп G_i и не равен в $\mathbf{F}$ произведению двух инволюций, то в $\mathbf{F}$ выполнено соотношение $x^n = 1$.

Доказательство остается тем же. Нужно только учесть замечание 2.

В статье [4] был установлен критерий простоты периодических произведений нечетного периода $n \geq 665$, доказательство которого основывалось на теореме 2 работы [1].

Отметим, что если учитывать замечание 2, то утверждение критерия простоты для n -периодических произведений периода $n \geq 665$ из работы [4] вместе с приведенным там доказательством остается в силе и при любом множестве исходных групп-множителей, за исключением вырожденного случая, когда исходное семейство состоит из двух групп порядка 2. В этом случае единственным возможным периодом является запрещенное произведение двух инволюций ab и n -периодическое произведение при любом n совпадает со свободным произведением исходных групп.

На самом деле, этот критерий простоты остается в силе вместе с доказательством также и для n -периодических произведений при любых четных $n = 2k \geq 665$, если рассматривается конструкция n -периодического произведения с учетом определения 1. В частности, в таком случае будут исключены также все периоды вида $A^k B^k$, где A и B – элементарные периоды предыдущего ранга.

При этом в силу справедливости леммы 5.21 в доказательстве не возникает новых трудностей по сравнению со случаем нечетного периода.

Вспоминается, что именно такого рода контрпримеры заставили нас с П. С. Новиковым в 1962 г. отложить «на время» исследование проблемы Бернсайда для четных периодов и сосредоточиться пока на исследовании групп нечетных периодов. Нам нужно было использовать понятие «родства», чтобы производить одновременную периодизацию всех элементарных подслов в данном слове. Раз при исключении из числа активных периодов произведений двух инволюций во всех рангах лемма II.5.21 остается в силе, то все трудности с рассмотрением четного периода отпадают.

Если n -периодическое произведение определяется с учетом введенного в замечании 2 ограничения на выбор элементарных периодов, то критерий простоты n -периодических произведений групп верен в наиболее общем виде, т.е. для любого семейства групп (1) и для любого периода $n \geq 665$.

КРИТЕРИЙ ПРОСТОТЫ. Пусть дано произвольное число $n \geq 665$ и семейство нетривиальных групп (1), где либо $|I| > 2$, либо $|G_i| > 2$ при некотором i . Для того, чтобы n -периодическое произведение (2) периода n семейства групп (1) было простой группой, необходимо и достаточно, чтобы каждая группа G_i совпадала со своей подгруппой, порожденной всеми n -ми степенями.

Этот критерий простоты доказывается точно так же, как он доказывался в [4] для групп без инволюций при нечетных периодах.

Я хотел бы также обратить внимание на интересную работу Иванова [5], в которой было доказано, что при $n > 10^{10}$ нормальная подгруппа K , порождаемая периодическими словами вида A^n , по которой факторизуется свободное произведение (3) заданного семейства групп (1), чтобы получить n -периодическое произведение (2), в случае, когда исходные группы G_i не содержат инволюций, однозначно определяется утверждением теоремы 2 работы [1], а в случае, когда они содержат инволюции, однозначно определяется утверждением приведенной выше теоремы 2.

Я полагаю, что оба эти результата Иванова можно доказать для всех периодов $n \geq 665$. Надеюсь, что кто-нибудь из математиков, вполне овладевших более глубокой и мощной теорией, изложенной в [2], докажет это.

В статье [5] приводится также теорема 3, которая утверждает, что критерий простоты из работы [4] верен для любых периодов $n > 10^{10}$, включая четные.

Полагаю, что читателю будет интересно познакомиться с информацией, содержащейся в следующей исторической справке. Интересную информацию об исследованиях по проблеме Бернсайда о периодических группах можно найти также в обзорной статье [6] и в книге [7].

К истории вопроса. Следует отметить, что при написании статьи [1] я упустил из виду особый характер случая, когда некоторые группы G_i содержат инволюции. Уже после публикации статьи на это мое упущение обратил внимание В. П. Шунков, так как я рассматривал понятие периодического произведения в классе всех групп. Чтобы не задерживать публикацию статьи [4], которая тогда была готова к печати, я в ней отметил в сноске эту неточность и выразил признательность Шункову, указавшему мне на это. Сноска прежде всего относилась к статье [4], так как результаты этой статьи были основаны на теореме 2, формулировку которой при наличии инволюций надо было изменить.

К счастью, последующий анализ изложенных в книге [2] доказательств показал, что разработанная в ней система индуктивных доказательств обладает большим запасом прочности. В частности, из доказательства леммы 5.21 гл. II, где уже была разобрана эта ситуация, напрашивался вполне естественный вариант искомого ограничения на периоды при наличии инволюций в исходных группах. Как видно из приведенного выше анализа, в книге [2] фактически было установлено, что если два взаимно обратных элементарных слова E и E^{-1} рангов α родственны, то соответствующий исходный период ранга α должен быть произведением двух инволюций ранга $\alpha - 1$.

Для решения проблемы А. И. Мальцева в классе всех групп теорема 2 статьи [1] не была нужна. Она использовалась для доказательства указанного выше критерия простоты n -периодических произведений, из которого вытекает много интересных следствий о существовании различных классов бесконечных периодических простых групп, которые были отмечены в [4].

Например, для всякого множества нечетных простых чисел M , содержащего хотя бы одно число $p > 665$, можно построить счетную периодическую простую группу H , для которой M является *спектром*, т.е. множеством всех конечных порядков ее элементов. Если при этом множество M конечно, то построенная группа H имеет конечное число порождающих и ограниченную экспоненту. Отсюда следует также существование континуума различных счетных простых периодических групп.

Позже, когда я выяснил, что указанная неточность в статье [1] легко устраняется приведенным выше замечанием 2 и ссылкой на уже опубликованное в монографии [2] доказательство ключевой леммы 5.21 гл. II, я решил, что отмечу это со временем в обзорной статье.

Возможность указанного выше простого устранения пробела, допущенного мной в работе [1], независимо от меня заметил и А. Ю. Ольшанский. Я узнал об этом в 1987 г., когда один из математических журналов РАН прислал мне на отзыв рукопись статьи [8], в которой на языке диаграмм ван Кампена для нечетных периодов $n > 10^{10}$ с подробным доказательством была описана аналогичная конструкция, представленная автором как “новая операция”. В своем официальном отзыве от 27 февраля 1987 г. на эту статью я информировал редакцию журнала, а через нее и автора рукописи, который со мной этот вопрос никогда не обсуждал, что допущенная в работе [1] неточность легко исправляется для всех нечетных $n \geq 665$ с помощью указанного выше замечания 2 и ссылки на уже опубликованное в монографии [2] доказательство ключевой леммы 5.21 гл. II. С учетом этого обстоятельства редакция журнала тогда отклонила представленную рукопись статьи [8], но автор опубликовал ее в другом журнале без всяких изменений или комментариев.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, “Периодические произведения групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 3–21.
- [2] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.
- [3] А. Г. Курош, *Теория групп*, Наука, М., 1967.

- [4] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241**:4 (1978), 745–748.
- [5] S. V. Ivanov, “On periodic products of groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **5**:1 (1995), 7–17.
- [6] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы”, *УМН*, **65**:5 (2010), 5–60.
- [7] Б. Чандлер, В. Магнус, *Развитие комбинаторной теории групп. Очерк истории развития идей*, Мир, М., 1985.
- [8] А. Ю. Олшанский, “Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 225–249.

С. И. Адян

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступило

11.05.2010