Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Башмакова, О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 822–835

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:47:39

УДК 511.36

О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями

М. Г. Башмакова

В работе рассматривается новый подход к оценке меры иррациональности чисел, являющихся значениями гипергеометрической функции Гаусса. Улучшены некоторые из предыдущих результатов, в частности, для иррациональностей вида $\sqrt{k} \ln((\sqrt{k} + 1)/(\sqrt{k} - 1))$, $k \in \mathbb{N}$.

Библиография: 11 названий.

Введение. В 1994 г. в статье [1] был предложен способ получения оценок мер иррациональности значений $F(1, 1/k, 1 + 1/k; z)$ гипергеометрической функции Гаусса [2]

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} dt}{(1-zt)^a}.$$

В этой же работе была приведена достаточно обширная библиография по данному вопросу и указано много конкретных оценок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$$

выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

В [1] для получения таких рациональных приближений использовались свойства коэффициентов полиномов Якоби и для значения

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{8}\right) = \sqrt{2} \ln \frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 1}$$

указывалось, в частности,

$$\mu\left(\sqrt{2} \ln \frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 1}\right) \leq 41.032 \dots$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00743).

Еще ранее, Рином [3] для числа

$$\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}) = F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

была получена оценка

$$\mu(\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})) \leq 17.207 \dots$$

Оба эти результата были улучшены Сальниковой [4] при помощи интеграла с симметричной подынтегральной функцией. Интегралы такого вида были впервые введены Салиховым в [5] и обладают “хорошими” арифметическими свойствами. Оценки, полученные Сальниковой,

$$\mu\left(\sqrt{2} \ln \frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 1}\right) \leq 12.3569 \dots \quad \text{и} \quad \mu(\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})) \leq 15.6593 \dots$$

являлись лучшими до настоящего времени.

В данной статье будет доказан новый результат для этих чисел и еще одного значения гипергеометрической функции:

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{9}\right) = \arctan \frac{1}{3},$$

предыдущая оценка которого

$$\mu\left(\arctan \frac{1}{3}\right) \leq 6.63 \dots$$

принадлежит Томашевской [6], также использовавшей в своей работе интеграл от симметризованной функции.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие оценки меры иррациональности:*

- 1) $\mu(\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})) \leq 12.451818 \dots,$
- 2) $\mu\left(\sqrt{2} \ln\left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 1}\right)\right) \leq 11.650036 \dots$

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива следующая оценка:*

$$\mu\left(\arctan \frac{1}{3}\right) \leq 6.199967 \dots$$

Метод, применяемый для доказательства теорем 1 и 2, использует интегральную конструкцию, введенную в [7] Зудиным и Виолой. Некоторые изменения, внесенные в этот интеграл, позволили улучшить его арифметические свойства, за счет чего и были усилены предыдущие результаты.

1. Интегральная конструкция. Рассмотрим интеграл вида

$$I_n(r, r_1, r_2, r_3; b) = \int_0^1 f_n(b, x) dx, \quad (1.1)$$

где

$$f_n(b, x) = b^{2rn+2r_2n+r_3n+1} \times \frac{x^{2r_1n}(x^2 - 1/b^2)^{2r_2n}(x^2 - 1/b)^{2r_3n}(1 - x^2)^{2rn-2r_1n-2r_2n-2r_3n}}{(b^2 - x^2)^{2rn+1}}, \quad (1.2)$$

$$r, r_i \in \mathbb{Z}^+, \quad i = 1, 2, 3, \quad r_1 + r_2 + r_3 \leq r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b \in \mathbb{C}, \quad |b| > 1.$$

Подобная конструкция интеграла была впервые предложена в [7], однако здесь в подынтегральную функцию введен множитель $(x^2 - 1/b^2)^{2r_3n}$, гарантирующий малость функции в окрестности нуля и служащий при специальном выборе b для компенсации некоторых множителей, возникающих в знаменателе. Отметим также, что данный интеграл не может быть приведен заменой переменной к виду гипергеометрической функции Гаусса.

Поскольку параметры r, r_1, r_2, r_3 будут впоследствии выбираться так, чтобы обеспечить наилучшую оценку некоторого числа, зависящего только от b , а все утверждения верны для любого фиксированного набора параметров, удовлетворяющих (1.2), то в дальнейшем будем опускать их в обозначении интеграла и считать $I_n(r, r_1, r_2, r_3; b) = I_n(b)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого b такого, что $b \in \mathbb{C}, |b| > 1$, справедливо представление

$$I_n(b) = \tilde{R}_n\left(b + \frac{1}{b}\right) + \tilde{A}_{1n}\left(b + \frac{1}{b}\right) \ln \frac{b+1}{b-1}, \quad (1.3)$$

где $\tilde{R}_n(t), \tilde{A}_{1n}(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Для доказательства предложения потребуется вспомогательная лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $R(x) \in \mathbb{Q}(x), R(x) \equiv R(1/x)$. Тогда $R(x) \equiv \hat{R}(x + 1/x)$, где $\hat{R}(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Доказательство данной леммы достаточно просто, и приводить его здесь не будем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Поскольку

$$f_n(b, x) = \sum_{j=1}^{2rn+1} \left(\frac{A_{jn}(b)}{(b+x)^j} + \frac{A_{jn}(b)}{(b-x)^j} \right), \quad A_{jn}(b) \in \mathbb{Q}(b),$$

то

$$I_n(b) = A_{1n}(b)[\ln(b+x) - \ln(b-x)]|_0^1 - \sum_{j=2}^{2rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1} \left(\frac{1}{(b+x)^{j-1}} - \frac{1}{(b-x)^{j-1}} \right) \Big|_0^1.$$

То есть

$$I_n(b) = A_{1n}(b) \ln \frac{b+1}{b-1} + R_n(b), \quad R_n(b), A_{1n}(b) \in \mathbb{Q}(b), \quad (1.4)$$

где

$$R_n(b) = - \sum_{j=2}^{2rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1} \left(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}} \right).$$

Легко видеть, что

$$I_n(b) = \int_0^1 f_n(b, x) dx \stackrel{[x=1/y]}{=} \int_\infty^1 f_n\left(\frac{1}{b}, y\right) dy,$$

следовательно, аналогично предыдущему

$$I_n(b) = A_{1n}\left(\frac{1}{b}\right) \left[\ln\left(\frac{1}{b} + y\right) - \ln\left(y - \frac{1}{b}\right) \right] \Big|_\infty^1 - \sum_{j=2}^{2rn+1} \frac{A_{jn}(1/b)}{j-1} \left(\frac{1}{(1/b+y)^{j-1}} - \frac{1}{(1/b-y)^{j-1}} \right) \Big|_\infty^1,$$

т.е.

$$I_n(b) = A_{1n}\left(\frac{1}{b}\right) \ln \frac{b+1}{b-1} + R_n\left(\frac{1}{b}\right). \quad (1.5)$$

Из равенства представлений (1.5) и (1.4) и трансцендентности функции $\ln(b+1)/(b-1)$ имеем $A_{1n}(b) = A_{1n}(1/b)$, $R_n(b) = R_n(1/b)$. Тогда в соответствии с леммой 1

$$A_{1n}(b) = \tilde{A}_{1n}\left(b + \frac{1}{b}\right), \quad R_n(b) = \tilde{R}_n\left(b + \frac{1}{b}\right), \quad \tilde{A}_{1n}, \tilde{R}_n \in \mathbb{Q}(t),$$

что и требовалось.

Отметим, что при $b = m + \sqrt{m^2 - 1}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, в представлении интеграла (1.3) получим $b + 1/b = 2m$ и

$$\ln \frac{b+1}{b-1} = \ln \sqrt{\frac{m+1}{m-1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{m+1}{m-1}.$$

В частности, выбор $m = 3$ дает возможность оценить меру иррациональности числа $\ln 2$. Однако, перебор параметров r , r_i , $i = 1, 2, 3$, не дал лучшего результата, чем $\mu(\ln 2) \leq 4.1344\dots$, что хуже уже имеющихся оценок, наилучшая из которых на данный момент $\mu(\ln 2) \leq 3.5745\dots$ принадлежит Марковеккио и была получена в работе [8]. Результат Марковеккио, применявшего для своей оценки двойной комплексный интеграл, недавно был подтвержден Нестеренко [9] более простым способом, использующим однократный интеграл.

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теорем 1 и 2 будем рассматривать упрощенный вариант интеграла (1.1) при $r_1 = r_3 = 0$. Пусть r , s – четные натуральные числа, $r \geq s$ и $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим интеграл

$$\hat{I}_n(b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1/b^2)^{sn} (1 - x^2)^{rn-sn} b^{rn+sn+1} dx}{(b^2 - x^2)^{rn+1}} \equiv \int_0^1 \hat{f}_n(b, x) dx. \quad (2.1)$$

Хотя асимптотическое поведение интеграла при $n \rightarrow \infty$ зависит только от отношения $s/r = \omega \leq 1$, два параметра r и s оставлены для удобства работы. Обозначим $q_M = \text{НОК}(1, \dots, M)$ и положим далее

$$b = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1.$$

ЛЕММА 2. Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, существуют $\nu(k), \alpha(k) \in \mathbb{R}^+$ такие, что

$$q_{rn} 2^{\nu(k)n + \alpha(k)} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}} \right) \widehat{I}_n(b) = \widehat{B}_n + \widehat{A}_n \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1}, \quad \widehat{B}_n, \widehat{A}_n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (1.3) получим

$$\begin{aligned} \widehat{I}_n(-b) &= \widetilde{A}_{1n} \left(- \left(b + \frac{1}{b} \right) \right) \ln \frac{-b+1}{-b-1} + \widetilde{R}_n \left(- \left(b + \frac{1}{b} \right) \right) \\ &= -\widetilde{A}_{1n} \left(- \left(b + \frac{1}{b} \right) \right) \ln \frac{b+1}{b-1} + \widetilde{R}_n \left(- \left(b + \frac{1}{b} \right) \right). \end{aligned}$$

Так как параметры r, s четны, очевидно, что $\widehat{I}_n(-b) = -\widehat{I}_n(b)$. Следовательно, $\widetilde{A}_{1n}(-t) = \widetilde{A}_{1n}(t)$, а $\widetilde{R}_n(-t) = -\widetilde{R}_n(t)$.

Определим более точно структуру каждого из коэффициентов $A_{jn}(b)$. Из равенства (2.1) стандартным образом имеем

$$A_{jn}(b) = D_{rn+1-j} [\widehat{f}_n(b, x) \cdot (b+x)^{rn+1}]|_{x=-b}, \quad (2.3)$$

где

$$D_k f(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k}.$$

Для всех $j = 1, \dots, rn+1$ обозначим

$$\begin{aligned} M_j = \{ \overline{m} = (m_1, \dots, m_5) \mid m_\nu \in \mathbb{Z}^+, \nu = 1, \dots, 5, m_1, m_2 \leq sn, \\ m_3, m_4 \leq rn - sn, m_1 + \dots + m_5 = rn + 1 - j \}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_{jn}(b) &= \sum_{\overline{m} \in M_j} \gamma(\overline{m}) \left(b + \frac{1}{b} \right)^{sn-m_1} \left(\frac{1}{b} - b \right)^{sn-m_2} \\ &\quad \times (1-b)^{rn-sn-m_3} (1+b)^{rn-sn-m_4} (2b)^{-rn-1-m_5} b^{rn+sn+1}, \end{aligned}$$

при $j = 1, \dots, rn+1$. Коэффициенты $\gamma(\overline{m}) \in \mathbb{Z}$ для любого $\overline{m} \in M_j$ и имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma(\overline{m}) &= \frac{(-1)^{m_1+m_4}}{m_1! m_2! m_3! m_4! m_5!} \prod_{i_1=1}^{m_1} (sn - i_1) \prod_{i_2=1}^{m_2} (sn - i_2) \\ &\quad \times \prod_{i_3=1}^{m_3} (rn - sn - i_3) \prod_{i_4=1}^{m_4} (rn - sn - i_4) \prod_{i_5=1}^{m_5} (rn + i_5). \end{aligned}$$

Преобразуем $A_{jn}(b)$:

$$A_{jn}(b) = \sum_{\overline{m} \in M_j} \gamma(\overline{m}) \left(b + \frac{1}{b} \right)^{sn-m_1} (1-b)^{rn-m_2-m_3} (1+b)^{rn-m_2-m_4} 2^{-rn-m_5-1} b^{m_2-m_5}. \quad (2.4)$$

Так как

$$(1-b)^{rn-m_2-m_3} = (1-b)^{j-1+m_1+m_4+m_5}, \quad (1+b)^{rn-m_2-m_4} = (1+b)^{j-1+m_1+m_3+m_5},$$

то для любого $j = 1, \dots, rn + 1$ верно

$$\begin{aligned}\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} &= \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) P_{j\bar{m}}^1(b) \cdot 2^{-rn-m_5-1}, & P_{j\bar{m}}^1(b) &\in \mathbb{Z}\left[b, \frac{1}{b}\right], \\ \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} &= \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) P_{j\bar{m}}^2(b) \cdot 2^{-rn-m_5-1}, & P_{j\bar{m}}^2(b) &\in \mathbb{Z}\left[b, \frac{1}{b}\right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_{jn}(b) \cdot \left(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}} \right) = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) P_{j\bar{m}}(b) \cdot 2^{-rn-m_5-1}, \quad P_{j\bar{m}} \in \mathbb{Z}\left[b, \frac{1}{b}\right]. \quad (2.5)$$

Тогда, при $\nu(k) = 2r$ и $\alpha(k) = 1$ выполнено

$$\begin{aligned}q_{rn} \cdot 2^{\nu(k)n+\alpha(k)} \sum_{j=2}^{rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1} \cdot \left(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}} \right) \\ = q_{rn} \cdot 2^{\nu(k)n+\alpha(k)} \cdot \tilde{R}\left(b + \frac{1}{b}\right) = \hat{P}\left(b + \frac{1}{b}\right),\end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\hat{P}(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $t = b + 1/b$.

По доказанному ранее $\tilde{R}(b + 1/b)$ нечетна, так что $\hat{P}(t) = t\tilde{P}(t^2) = 2\sqrt{k}\tilde{P}(4k)$. Следовательно, из (2.6) имеем

$$q_{rn} \cdot 2^{\nu(k)n+\alpha(k)} \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \tilde{R}(4k) = \hat{B}_n \in \mathbb{Z}.$$

При $j = 1$ для $A_{1n}(b) = \tilde{A}_{1n}(b + 1/b)$ получим аналогично

$$2^{\nu(k)n+\alpha(k)} \tilde{A}_{1n}\left(b + \frac{1}{b}\right) \in \mathbb{Z}\left[b + \frac{1}{b}\right].$$

Поскольку $\tilde{A}_{1n}(b + 1/b)$ четна, то $\tilde{A}_{1n}(t) = A'_{1n}(t^2)$, тогда

$$2^{\nu(k)n+\alpha(k)} \cdot A'_{1n}(4k) = \hat{A}_n \in \mathbb{Z},$$

так что из равенства (1.3) получаем требуемое.

Значения параметров $\nu(k) = 2r$ и $\alpha(k) = 1$, указанные в доказательстве леммы 2, не являются точными при всех b , а лишь позволяют получить представление (2.2). Способ вычисления этих параметров в случае конкретных b будет рассмотрен далее, при этом значение $\nu(k)$, влияющее на асимптотику левой части (2.2), окажется во всех случаях меньше $2r$, поскольку в $A_{jn}(b)$ входят множители вида 2^l . Параметр $\alpha(k)$ также изменится.

Представление интеграла в виде линейной формы (2.2) позволяет для оценок меры иррациональности воспользоваться следующим утверждением.

ЛЕММА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $l_n = q_n\gamma + p_n$, где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$, γ иррационально;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \delta, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| \leq -\tau, \quad \tau > 0.$$

Тогда

$$\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\delta}{\tau}.$$

Данная лемма была доказана в работе [10] (см. лемма 2.1 и замечание к ней).

ЛЕММА 4. Пусть $r, s \in \mathbb{N}$ четные, $r \geq s$; $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$; $\nu(k)$ определяется в соответствии с леммой 2 и выполнено $-K - \ln M > 0$, где

$$M = \max \left\{ \left(\frac{s}{r} \right)^s \left(1 - \frac{s}{r} \right)^{r-s} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}} \right)^{r-s}, \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^{r+s}} \right\}, \quad K = r + \nu(k) \ln 2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mu \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1} \right) \leq 1 - \frac{K + (r + s) \ln(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}{K + \ln M}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 4 для линейной формы (2.2) при $b = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$.

1. Вычисление τ . Для оценки асимптотики $\hat{I}_n(b)$ применим метод Лапласа [11]. Разобьем отрезок интегрирования следующим образом:

$$\hat{I}_n(b) = \int_0^{1/b^2} \hat{f}_n(b, x) dx + \int_{1/b^2}^1 \hat{f}_n(b, x) dx = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим интеграл I_1 :

$$I_1 = \int_0^{1/b^2} \frac{b}{b^2 - x^2} (\tilde{f}(x))^n dx, \quad \tilde{f}(x) = \frac{(x^2 - 1/b^2)^s (1 - x^2)^{r-s} b^{r+s}}{(b^2 - x^2)^r}.$$

Так как точка $x = 0$ является точкой максимума подынтегральной функции, единственной на отрезке $[-1/b^2, 1/b^2]$, то согласно методу Лапласа при $n \rightarrow \infty$ для I_1 имеет место асимптотическое равенство

$$I_1 \approx \frac{C_1}{\sqrt{n}} (\tilde{f}(0))^n.$$

Очевидно, что

$$\tilde{f}(0) = \frac{1}{b^{r+s}} = \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^{r+s}}.$$

Рассмотрим интеграл I_2 . Так как $\hat{f}_n(1/b^2, b) = \hat{f}_n(1, b) = 0$, то подынтегральная функция имеет на интервале $[1/b^2, 1]$ точку максимума. Упростим интеграл I_2 , сделав замену переменной $x^2 = t$. Тогда

$$I_2 = \int_{1/b}^1 \frac{b}{2\sqrt{t}(b^2 - t)} \cdot \left(\frac{(t - 1/b^2)^s (1 - t)^{r-s} b^{r+s}}{(b^2 - t)^r} \right)^n dt \equiv \int_{1/b}^1 \frac{b}{2\sqrt{t}(b^2 - t)} (\bar{f}(t))^n dt.$$

Найдем точку максимума функции $\bar{f}(t)$, взяв логарифмическую производную:

$$\frac{\bar{f}'(t)}{\bar{f}(t)} = \frac{s}{t - \frac{1}{b^2}} - \frac{r-s}{1-t} + \frac{r}{(b^2 - t)} = 0.$$

Данное уравнение имеет единственный корень:

$$t_1 = \frac{(s/r)b^2 + 1}{b^2 + s/r},$$

при этом $t_1 \in (1/b^2, 1)$ для любых $r \geq s$ и

$$\bar{f}(t_1) = \left(\frac{s}{r}\right)^s \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{r-s} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{r-s}.$$

Таким образом, I_2 также удовлетворяет условиям теоремы Лапласа и

$$I_2 \approx \frac{C_2}{\sqrt{n}} (\bar{f}(t_1))^n \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Обозначим

$$M = \max\{\tilde{f}(0), \bar{f}(t_1)\}.$$

Тогда с учетом асимптотических представлений имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(I_1 + I_2) = \ln M.$$

В силу равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_{An} = A \quad \text{при } A \in \mathbb{N},$$

ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_{rn} 2^{\nu(k)n + \alpha(k)} = r + \nu(k) \ln 2 = K.$$

Следовательно, из представления (2.2) получаем $\tau = -K - \ln M$.

2. *Вычисление δ .* Асимптотику старшего коэффициента $A_{1n}(b)$ оценим, учитывая, что это первый член главной части ряда Лорана для функции $\hat{f}_n(b, x)$. Верно представление

$$A_{1n}(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \hat{f}_n(b, x) dx \equiv \frac{1}{2\pi i} I,$$

где C – произвольный контур, обходящий точку $x = -b$ и не содержащий внутри себя точку $x = b$. К интегралу I применим метод перевала [11]. Имеем

$$I = \int_C \left(\frac{(x^2 - 1/b^2)^s (1 - x^2)^{r-s} b^{r+s}}{(b^2 - x^2)^r} \right)^n \cdot \frac{b}{(b^2 - x^2)} dx = \int_C (\tilde{f}(x))^n \frac{b}{(b^2 - x^2)} dx.$$

В данном интеграле удобно сделать замену вида $t = (x - 1/b)(b - x)$, переводящую точку $x = -b$ в $t = -(b^2 + 1)/(2b^2)$. Интеграл в результате примет вид

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} \frac{b}{2tb^2 + b^2 + 1} \cdot \left(\frac{t^s (t^2 b^2 - 1)^{r-s} (t(b^2 + 1) + 2)^s b^{r+s}}{(2tb^2 + b^2 + 1)^r} \right)^n dt \\ &\equiv \int_{C_1} \frac{b}{2tb^2 + b^2 + 1} \cdot (f_1(t))^n dt. \end{aligned}$$

Уравнение $f_1'(t)/f_1(t) = 0$ имеет 4 корня, один из которых для любых $r \geq s$ есть $t_1 = -1$. Эта точка и является искомой точкой перевала, причем $f_1(-1) = b^{r+s}$.

Тогда согласно методу перевала

$$\delta = K + \ln(b^{r+s}) = K + (r+s) \ln(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}), \quad \text{где } K = r + \nu(k) \ln 2,$$

как и при вычислении τ . Следовательно, по лемме 3 получаем требуемую оценку (2.7).

Лемма 4 позволяет получить заявленные в теореме 1 оценки при выборе параметров r и s , обеспечивающих минимальное значение.

3. Доказательство теоремы 1. Обозначим теперь $\mathbb{K}$ – кольцо целых алгебраических чисел. Для использования леммы 4 необходимо найти значения $\nu(k)$, $\alpha(k)$. Будем определять их отдельно для каждого конкретного случая.

ЛЕММА 5. Пусть $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $A_{jn}(b)$ определяются как в (2.3), тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2^{(1/2)(r-s)n+11/2} \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = A'_{jn}, \quad A'_{jn} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, rn+1; \\ 2) \quad & 2^{(1/2)(r-s)n+11/2} \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = A''_{jn}, \quad A''_{jn} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, rn+1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из представления (2.4) при $j = 1, \dots, rn+1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} &= \sum_{\overline{m} \in M_j} \gamma(\overline{m}) \left(b + \frac{1}{b}\right)^{sn-m_1} (1-b)^{rn-m_2-m_3} \\ &\quad \times (1+b)^{rn-m_2-m_4-j+1} 2^{-rn-m_5-1} b^{m_2-m_5}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как $b, 1/b \in \mathbb{K}$, то из (3.1) получим

$$\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = P_1(b) \cdot 2^{d_1}, \quad P_1(b) \in \mathbb{K}, \quad d_1 \in \mathbb{Z}.$$

Оценим показатель d_1 . Легко убедиться, что

$$b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{3}, \quad (b+1)^4 = 2^3 \cdot b^2(2+\sqrt{3}), \quad (b-1)^4 = 2^3 \cdot b^2(2-\sqrt{3}). \quad (3.2)$$

Пусть $rn - m_2 - m_3 = 4l_1 + h_1$, $rn - m_2 - m_4 - j + 1 = 4l_2 + h_2$, $h_1, h_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+$, тогда

$$l_1 \geq \frac{rn - m_2 - m_3 - 3}{4}, \quad l_2 \geq \frac{rn - m_2 - m_4 - j - 2}{4}. \quad (3.3)$$

Из равенства (3.1) с учетом (3.2) и (3.3) получим

$$\begin{aligned} d_1 &\geq sn - m_1 - rn - m_5 - 1 + 3(l_1 + l_2) \\ &\geq sn - rn - m_1 - m_5 - 1 + 3\left(\frac{rn}{2} - \frac{m_2}{2} - \frac{m_3}{4} - \frac{m_4}{4} - \frac{j-1}{4} - \frac{6}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}rn + sn - m_1 - \frac{3}{2}m_2 - \frac{3}{4}m_3 - \frac{3}{4}m_4 - m_5 \\ &\quad - \frac{11}{2} - \frac{3}{4}(rn - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5) \\ &= -\frac{1}{4}rn + sn - \frac{1}{4}m_1 - \frac{3}{4}m_2 - \frac{1}{4}m_5 - \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку $m_1 + m_2 + m_5 \leq rn$ и $m_2 \leq sn$, то $m_1 + 3m_2 + m_5 \leq rn + 2sn$, следовательно,

$$d_1 \geq -\frac{1}{4}rn + sn - \frac{11}{2} - \frac{1}{4}(rn + 2sn) = -\frac{1}{2}rn + \frac{1}{2}sn - \frac{11}{2}.$$

2. Из (2.4) получим

$$\begin{aligned} \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} &= \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) \left(b + \frac{1}{b}\right)^{sn-m_1} (1-b)^{rn-m_2-m_3-j+1} \\ &\quad \times (1+b)^{rn-m_2-m_4} 2^{-rn-m_5-1} b^{m_2-m_5}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = P_2(b) \cdot 2^{d_2}, \quad P_2(b) \in \mathbb{K}, \quad d_2 \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $rn - m_2 - m_3 - j + 1 = 4l_3 + h_3$, $rn - m_2 - m_4 = 4l_4 + h_4$, $h_3, h_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $l_3, l_4 \in \mathbb{Z}^+$, тогда

$$l_3 \geq \frac{rn - m_2 - m_3 - j - 2}{4}, \quad l_4 \geq \frac{rn - m_2 - m_4 - 3}{4}.$$

Используя (3.2), аналогично предыдущему пункту доказательства получаем

$$d_2 = sn - m_1 - rn - m_5 - 1 + 3l_3 + 3l_4 \geq -\frac{1}{2}rn + \frac{1}{2}sn - \frac{11}{2},$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $k = 3$, $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ в равенстве (2.2) достаточно положить

$$\nu(k) = \frac{1}{2}(r-s), \quad \alpha(k) = 6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 с учетом равенства (2.5) имеем

$$2^{(1/2)(r-s)n+11/2} q_{rn} \sum_{j=2}^{rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1} \left(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}} \right) = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{6},$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$. Отсюда очевидно следует, что

$$q_{rn} \cdot 2^{(1/2)(r-s)n+6} R_n(b) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

С другой стороны, поскольку $b + 1/b = 2\sqrt{3}$, из свойств $R_n(b)$, доказанных в лемме 2, получим

$$\begin{aligned} q_{rn} \cdot 2^{(1/2)(r-s)n+6} R_n(b) &= q_{rn} \cdot 2^{(1/2)(r-s)n+6} \sum_{j=2}^{rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1} \left(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}} \right) \\ &= 2\sqrt{3}R((2\sqrt{3})^2), \end{aligned}$$

причем $R((2\sqrt{3})^2) \in \mathbb{Q}$. Сравнивая равенства, заключаем, что

$$2^{(1/2)(r-s)n+6} q_{rn} R_n(b) = 2\sqrt{3}B_n, \quad B_n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично, из леммы 5 и (2.5) имеем

$$A_{1n}(b) = \tilde{A}_{1n}\left(b + \frac{1}{b}\right) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}],$$

но $\tilde{A}_{1n}(b) = A'((2\sqrt{3})^2)$, следовательно,

$$2^{(1/2)(r-s)n+6} A_{1n}(b) = A_n \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Рассмотрим в интеграле $\hat{I}_n(b)$ (см. (2.1)) значение $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, соответствующее $k = 3$.

По доказанному в предложении 1 и лемме 2 для интеграла имеет место представление

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \hat{I}_n(b) = \hat{A}_{1n} \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \hat{B}_n = \hat{B}_n + \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{A}_{1n} \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \hat{B}_n, \hat{A}_{1n} \in \mathbb{Q};$$

используя равенство (2.2) и следствие из леммы 5, получим

$$\sqrt{3} \cdot 2^6 \cdot \hat{I}_n(b) \cdot q_{rn} 2^{(1/2)(r-s)n} = B_n + A_{1n} \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}), \quad B_n, A_{1n} \in \mathbb{Z}.$$

Теперь по лемме 4 найдем наилучшее значение оценки с помощью компьютерного перебора параметров. При $\omega = s/r = 0.293778$ формула (2.7) дает результат, заявленный в теореме 1:

$$\mu(\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})) \leq 12.451818 \dots$$

Отметим, что в этом случае значения подынтегральной функции в точках максимума на отрезке $[-1, 1]$ равны, т.е. $M = \bar{f}(t_1) = \bar{f}(0)$.

2. Доказательство пункта 2 теоремы 1 проводится аналогично пункту 1 при $b = \sqrt{8} + \sqrt{7}$, $b + 1/b = 4\sqrt{2}$. Для такого b параметр $\nu(k)$ оказывается несколько хуже, чем в предыдущем случае, поскольку ключевые при его определении равенства (3.2) примут вид $(1 \pm b)^2 = 2 \cdot b(\sqrt{8} \pm 1)$, в целом же способ определения $\nu(k)$, $\alpha(k)$ полностью повторяет доказательство леммы 5.

ЛЕММА 6. Пусть $b = \sqrt{8} + \sqrt{7}$, $A_{jn}(b)$ определяются как в (2.3), тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2^{(r-s)n+2} \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = A'_{jn}, \quad A'_{jn} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, rn+1, \\ 2) \quad & 2^{(r-s)n+2} \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = A''_{jn}, \quad A''_{jn} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, rn+1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При $k = 8$, $b = \sqrt{8} + \sqrt{7}$ в равенстве (2.2) достаточно положить

$$\nu(k) = (r-s), \quad \alpha(k) = 2.$$

Используя представление (2.2) и следствие из леммы 6, получим

$$\sqrt{2} \cdot 2^2 \cdot \hat{I}_n(b) \cdot q_{rn} 2^{(r-s)n} = B_n + A_{1n} \sqrt{2} \ln \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}, \quad B_n, A_{1n} \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае формула (2.7) при соотношении параметров $\omega = s/r = 0.243375$ дает заявленную оценку

$$\mu\left(\sqrt{2} \ln \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\right) \leq 11.650037 \dots$$

4. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим теперь в $\widehat{I}_n(b)$ параметр b вида $b = ai$, где $a = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $b + 1/b = 2i\sqrt{k}$. Представление интеграла в этом случае примет другую форму. Поскольку $|(ai+1)/(ai-1)| = 1$ для любого $a \in \mathbb{R}$, то, выбирая ветвь логарифма $\ln z = \ln|z| + i \arg(z)$ с условием $-\pi \leq \arg(z) < \pi$, имеем

$$\ln\left(\frac{ai+1}{ai-1}\right) = -i \arctan \frac{2a}{a^2-1} = -i \arctan \frac{1}{\sqrt{k}},$$

так что равенство (1.3) позволит получать оценки меры иррациональности чисел вида $(1/\sqrt{k}) \arctan(1/\sqrt{k})$. При этом с учетом некоторых незначительных изменений сохраняются все утверждения вещественного случая.

ЛЕММА 7. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $\nu(k), \alpha(k) \in \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\frac{1}{i\sqrt{k}} \widehat{I}_n(b) \cdot q_{rn} 2^{\nu(k)n + \alpha(k)} = A_{1n} \frac{1}{i\sqrt{k}} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}} + B_n, \quad A_{1n}, B_n \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

ЛЕММА 8. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{N}$ четные, $r \geq s$, такие, что $s/r > (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2$ и выполнено

$$-K - \ln M > 0, \quad \text{где} \quad M = \left(\frac{s}{r}\right)^s \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{r-s} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{r-s}, \quad K = r + \nu(k) \ln 2,$$

$\nu(k)$ определяется в соответствии с леммой 7. Тогда справедливо неравенство

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq 1 - \frac{K + (r+s) \ln(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{K + \ln M}. \quad (4.2)$$

Доказательство леммы 7 полностью повторяет вещественный случай, в лемме 8 отметим только один отличающийся момент. Так как параметры r, s четны, то для $b = (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})i$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{I}_n(b) &= \int_0^1 \frac{(-1)^{(rn+sn)/2} (x^2 + 1/|b|^2)^{sn} (1-x^2)^{rn-sn} |b|^{rn+sn} b \, dx}{-(|b|^2 + x^2)^{rn+1}} \\ &\equiv (-1)^{(rn+sn)/2+1} \int_0^1 \frac{b}{(|b|^2 + x^2)} (\tilde{f}(x))^n \, dx. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{f}(x)$, очевидно, вещественна, и исследование асимптотики может вестись теми же методами, что и в лемме 4.

Сделаем замену переменной $x^2 = t$ и найдем корень уравнения $\tilde{f}'(t)/\tilde{f}(t) = 0$, это точка

$$t_1 = \frac{1 - (s/r)|b|^2}{s/r - |b|^2}.$$

При этом

$$|\tilde{f}(t_1)| = \left(\frac{s}{r}\right)^s \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{r-s} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{r-s}.$$

В отличие от вещественного случая, здесь подынтегральная функция $\tilde{f}(t)$ не имеет нулей на интервале $(0, 1)$ и максимальное значение может достигаться только

в критической точке t_1 , а условие $s/r > 1/|b|^2 = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2$ обеспечивает попадание этой точки в рассматриваемый интервал.

Применение метода Лапласа [11] позволяет получить точную асимптотику интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\widehat{I}_n(b)| = \ln |\widetilde{f}(t_1)| = \ln M.$$

Таким образом, $\tau = -K - \ln M$, исследование же параметра δ и его результат не отличаются от вещественного случая. Применение леммы 3 к представлению (4.1) дает требуемое неравенство (4.2).

Для получения оценки, приведенной в теореме 2, возьмем $k = 3$, $b = (3 + \sqrt{10})i$. Параметры $\nu(k)$ и $\alpha(k)$ можно найти так же, как и в лемме 5, при этом будут выполнены соотношения, аналогичные (3.2), поскольку $(b \pm 1)^4 = 2^3 \cdot b^2(-4 \pm 3i)$.

ЛЕММА 9. Пусть $b = (3 + \sqrt{10})i$, $A_{jn}(b)$ определяются как в (2.3), тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2^{(r-s)n/2+11/2} \frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = A'_{jn}, \quad A'_{jn} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, rn+1, \\ 2) \quad & 2^{(r-s)n/2+11/2} \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = A''_{jn}, \quad A''_{jn} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, rn+1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При $b = (3 + \sqrt{10})i$ в равенстве (4.1) достаточно положить

$$\nu(k) = \frac{1}{2}(r-s), \quad \alpha(k) = 6.$$

Использование формулы (4.2) с учетом указанных значений $\nu(k)$, $\alpha(k)$ и компьютерный перебор параметров дают анонсированную в теореме 2 оценку

$$\mu\left(\arctan \frac{1}{3}\right) \leq 6.1999673 \dots$$

при $s/r = 0.150808$.

Заметим, что выбор $b = (\sqrt{7} + \sqrt{8})i$ позволяет получить результат

$$\mu\left(\sqrt{7} \arctan \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \leq 4.48028 \dots,$$

который несколько хуже предыдущего:

$$\mu\left(\sqrt{7} \arctan \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \leq 4.0298 \dots,$$

приведенного в статье [1].

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. Х. Салихову за интересную тему и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, “An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **50**:2 (1994), 225–243.

- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.
- [3] G. Rhin, “Approximants de Padé et mesures effectives d’irrationalité”, *Séminaire de Théorie des Nombres*, Progr. Math., **71**, Boston, MA, Birkhäuser Boston, 1987, 155–164.
- [4] Е. С. Сальникова, “О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса”, *Чебышевский сб.*, **8**:2 (2007), 88–96.
- [5] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\ln 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 753–755.
- [6] Е. Б. Томашевская, *О диофантовых приближениях значений некоторых аналитических функций*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, БГТУ, Брянск, 2009.
- [7] C. Viola, W. Zudilin, “Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **39**, Part 2 (2008), 211–222.
- [8] R. Marcovecchio, “The Rhin–Viola method for $\log 2$ ”, *Acta Arith.*, **139**:2 (2009), 147–184.
- [9] Ю. В. Нестеренко, “О показателе иррациональности числа $\ln 2$ ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 550–565.
- [10] М. Hata, “Rational approximations to π and some other numbers”, *Acta Arith.*, **63**:4 (1993), 335–349.
- [11] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.

М. Г. Башмакова

Брянский государственный технический университет

E-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Поступило

09.03.2010

Исправленный вариант

13.04.2010