Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гонцов, О подвижных особенностях систем Гарнье,
Матем. заметки, 2010, том 88, выпуск 6, 845–858

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:36:55

О подвижных особенностях систем Гарнье

Р. Р. Гонцов

Изучаются подвижные особенности систем Гарнье. Используется подход, основанный на связи данных систем с изомонодромными деформациями Шлезингера фуксовых систем, а также с гипергеометрическими уравнениями Лауричеллы.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Рассмотрим сначала уравнение Пенлеве VI (уравнение P_{VI})

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t} \right) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t} \right) \frac{du}{dt} \\ & + \frac{u(u-1)(u-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{u^2} + \gamma \frac{t-1}{(u-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(u-t)^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

ОДУ второго порядка относительно комплексной функции $u(t)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ – постоянные.

Однако во многих случаях при исследовании уравнения P_{VI} вместо использования явной записи удобнее представлять его себе как

- уравнение для дополнительной (пятой) особенности изомонодромного семейства скалярных фуксовых уравнений второго порядка с четырьмя особыми точками $t, 0, 1, \infty$;
- наиболее общее ОДУ второго порядка, удовлетворяющее свойству Пенлеве;
- уравнение, описывающее изомонодромные деформации Шлезингера некоторых двумерных фуксовых систем с четырьмя особыми точками $t, 0, 1, \infty$.

Напомним подробнее первые два подхода (последний будет описан в п. 3).

Монодромия линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^p u}{dz^p} + b_1(z) \frac{d^{p-1} u}{dz^{p-1}} + \dots + b_p(z) u = 0 \quad (2)$$

порядка p с особенностями $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$ (полюсами коэффициентов) определяется следующим образом. В окрестности неособой точки z_0 рассмотрим базис $(u_1, \dots, u_p)$ пространства решений (2). Аналитические продолжения функций $u_1(z), \dots, u_p(z)$ вдоль произвольной петли γ , начинающейся в точке z_0 и лежащей в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, преобразуют базис $(u_1, \dots, u_p)$ в (вообще говоря, другой) базис $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p)$. Два

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (грант № МК-3178.2009.1) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8508.2010.1).

базиса связаны между собой некоторой матрицей перехода G_γ , соответствующей петле γ :

$$(u_1, \dots, u_p) = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p)G_\gamma.$$

Отображение $[\gamma] \mapsto G_\gamma$ (которое зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ) задает представление

$$\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ в пространство невырожденных комплексных матриц размера p . Это представление называется *монодромией* уравнения (2). Переход к другому базису влечет сопряжение всех матриц G_γ на одну и ту же матрицу, т.е. задает эквивалентное представление.

Особая точка a_i уравнения (2) называется *регулярной*, если любое решение уравнения имеет полиномиальный (относительно $1/|z - a_i|$) рост возле точки a_i . Линейные дифференциальные уравнения, имеющие только регулярные особенности, называются *фуксовыми*.

Пуанкаре [1] показал, что число параметров, определяющих фуксово уравнение порядка p с n особыми точками, меньше размерности пространства классов эквивалентности представлений χ , если $p > 2$, $n > 2$ или $p = 2$, $n > 3$ (см. также [2; с. 73]). Следовательно, при построении фуксова уравнения с заданными особенностями и монодромией возникают так называемые *дополнительные* особые точки, в которых коэффициенты уравнения имеют полюсы, но локальные решения являются однозначными мероморфными функциями. В случае $p = 2$, $n = 4$ ($\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{t, 0, 1, \infty\}$) число таких особенностей равно единице. Если немного изменять положение особой точки $z = t$ так, чтобы монодромия уравнения сохранялась (данное свойство называется *изомонодромностью* и точно определяется в следующем пункте), то положение дополнительной (пятой) особенности $w(t)$ будет меняться, удовлетворяя при этом уравнению P_{VI} (что впервые было обнаружено Фуксом [3]).

Уравнение (1) имеет три фиксированные особые точки $-0, 1, \infty$. Его подвижными особенностями (которые зависят от начальных данных) могут быть только полюсы. В таком случае говорят, что уравнение удовлетворяет *свойству Пенлеве*. Другими словами, всякое локальное решение уравнения P_{VI} , определенное в окрестности точки $t_0 \neq 0, 1, \infty$, может быть продолжено до мероморфной функции на универсальном накрытии пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Имеется следующее утверждение о подвижных полюсах уравнения (1). В случае $\alpha \neq 0$ они могут быть только простыми, а в случае $\alpha = 0$ — не более второго порядка (см., например, [4; гл. VI, § 6]).

Обобщая исследования Фукса на случай $n + 3$ особенностей $a_1, \dots, a_n, 0, 1, \infty$, Гарнье [5] получил систему $\mathcal{G}_n(\theta)$, зависящую от $n + 3$ комплексных параметров $\theta_1, \dots, \theta_{n+2}, \theta_\infty$. Это вполне интегрируемая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Впоследствии она была записана Окамото [6] в эквивалентной гамильтоновой форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\partial H_j}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial a_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial u_i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

с гамильтонианами $H_j = H_j(a, u, v, \theta)$, рационально зависящими от $a = (a_1, \dots, a_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+2}, \theta_\infty)$. Здесь $u_1(a), \dots, u_n(a)$ – дополнительные особенности некоторого изомонодромного семейства фуксовых уравнений второго порядка, зависящего от положения особых точек $a_1, \dots, a_n$. В случае $n = 1$ система Гарнье $\mathcal{G}_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_\infty)$ представляет собой эквивалентную (гамильтонову) форму уравнения R_{VI} (1), где

$$\alpha = \frac{1}{2} \theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2} \theta_2^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \theta_3^2, \quad \delta = \frac{1}{2} (1 - \theta_1^2).$$

При $n > 1$ система Гарнье, вообще говоря, не удовлетворяет свойству Пенлеве. Однако согласно теореме Гарнье элементарные симметрические многочлены $\sigma_i(u_1(a), \dots, u_n(a))$ от локальных решений системы Гарнье продолжаются до мероморфных функций F_i на универсальном накрытии Z' пространства $(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Предлагаемое в данной работе дополнение к этой теореме состоит в оценках порядков неприводимых компонент полярных множеств функций F_i (теорема 3, предложение 2).

2. Изомонодромные деформации фуксовых систем. Вложим фуксову систему

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i^0}{z - a_i^0} \right) y, \quad B_i^0 \in \text{Mat}(p, \mathbb{C}), \quad \sum_{i=1}^n B_i^0 = 0, \quad (4)$$

состоящую из p уравнений с особыми точками $a_1^0, \dots, a_n^0$, в семейство

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \quad B_i(a^0) = B_i^0, \quad \sum_{i=1}^n B_i(a) = 0, \quad (5)$$

фуксовых систем, голоморфно зависящее от параметра $a = (a_1, \dots, a_n) \in D(a^0)$, где $D(a^0)$ – диск малого радиуса с центром в точке $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$ пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$.

Говорят, что семейство (5) *изомонодромно* (или является *изомонодромной деформацией* системы (4)), если для всех $a \in D(a^0)$ представления монодромии

$$\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow \text{GL}(p, \mathbb{C})$$

соответствующих систем одинаковы.¹ Это означает, что для каждого значения a найдется фундаментальная матрица $Y(z, a)$ соответствующей системы (5), которая имеет одну и ту же монодромию при всех $a \in D(a^0)$. Данная матрица $Y(z, a)$ называется *изомонодромной фундаментальной матрицей*. При изомонодромной деформации постоянна не только монодромия семейства (5), но и собственные значения матриц-вычетов $B_i(a)$ (см. [2; лекция 15]).

¹При малых изменениях параметра a существуют канонические изоморфизмы фундаментальных групп $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ и $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\})$, порождающие канонические изоморфизмы

$$\text{Hom}(\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}), \text{GL}(p, \mathbb{C})) / \text{GL}(p, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}), \text{GL}(p, \mathbb{C})) / \text{GL}(p, \mathbb{C})$$

пространств классов эквивалентности представлений этих фундаментальных групп; это позволяет сравнивать χ при различных $a \in D(a^0)$.

Всегда ли можно вложить систему (4) в изомонодромное семейство фуксовых систем? Ответ на этот вопрос положителен. Например, если матрицы $B_i(a)$ удовлетворяют уравнению Шлезингера [7]

$$dB_i(a) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

то семейство (5) изомонодромно (в этом случае оно называется *изомонодромным семейством Шлезингера*).

Согласно теореме Мальгранжа [8] для произвольных начальных условий $B_i(a^0) = B_i^0$ уравнение Шлезингера имеет единственное решение $\{B_1(a), \dots, B_n(a)\}$ в некотором диске $D(a^0)$, при этом матрицы $B_i(a)$ продолжают на универсальное накрытие Z пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ как мероморфные функции. Таким образом, уравнение Шлезингера удовлетворяет свойству Пенлеве.

Напомним, что функция f мероморфна на Z , если она голоморфна на $Z \setminus P$, не может быть продолжена голоморфно в P и представляется отношением $f(a) = \varphi(a)/\psi(a)$ голоморфных функций в окрестности каждой точки $a^0 \in P$ (следовательно, $\psi(a^0) = 0$), где $P \subset Z$ – аналитическое подмножество коразмерности один (локально оно задается уравнением $\psi(a) = 0$ и называется *полярным множеством* мероморфной функции f). Точки этого множества делятся на *полюсы* (в них функция φ не обращается в нуль) и *точки неопределенности* (в них $\varphi = 0$).

Также напомним понятие дивизора мероморфной функции. Обозначим через $A = N \cup P$ объединение множества N нулей функции f и ее полярного множества P . Любая регулярная точка a^0 множества A может принадлежать только одной неприводимой компоненте множеств N или P . Тем самым, определен *порядок* этой компоненты как степень (со знаком “+”, если $a^0 \in N$, и со знаком “–”, если $a^0 \in P$) соответствующего сомножителя в разложении функции φ или ψ на неприводимые множители. Тогда *дивизором* мероморфной функции f называется пара (A, κ) , где $\kappa = \kappa(a)$ – целочисленная функция на множестве регулярных точек множества A (принимаяющая постоянное значение на каждой его неприводимой компоненте, равное порядку компоненты). Пару (P, κ) называют *полярным дивизором* функции f . Через $(f)_\infty$ обозначают ограничение κ на множество регулярных точек множества P .

Вернемся к уравнению Шлезингера. Полярное множество $\Theta \subset Z$ продолженных матричных функций $B_1(a), \dots, B_n(a)$ называется Θ -дивизором Мальгранжа. Если систему (4) рассматривать как уравнение горизонтальных сечений логарифмической связности ∇_0 (с особенностями $a_1^0, \dots, a_n^0$) в голоморфно тривиальном векторном расслоении E_0 ранга p над $\overline{\mathbb{C}}$, то множество Θ будет соответствовать тем точкам a^* , для которых расслоение E_{a^*} , отвечающее параметру a^* в изомонодромной деформации $(E_a, \nabla_a)_{a \in Z}$ пары (E_0, ∇_0) , не является голоморфно тривиальным (подробнее см. в [8] и [2; лекция 16]). Отметим, что степень расслоения E_a , совпадая с суммой собственных значений матриц-вычетов связности ∇_a , равна нулю при всех a (эта сумма не зависит от a и равна нулю при $a = a^0$).

В дальнейшем будет использована теорема Болибруха [9], [10] (доказательство также содержится в [11]), которая описывает поведение общего решения уравнения Шлезингера вблизи Θ -дивизора в случае $p = 2$. Для полярного множества $P \subset Z$ функции f , мероморфной на Z , и $a^* \in P$ обозначим через $\Sigma_{a^*}(f)$ сумму порядков всех неприводимых компонент множества $P \cap D(a^*)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть монодромия двумерного ($p = 2$) изомонодромного семейства Шлезингера (5) неприводима, a^* – произвольная точка Θ -дивизора и $E_{a^*} \cong \mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(-k)$. Тогда

$$\Sigma_{a^*}(B_i) \geq -2k, \quad i = 1, \dots, n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно (например, [2; теорема 11.1]), что $2k \leq n - 2$. Таким образом, оценке из теоремы 1 можно придать вид $\Sigma_{a^*}(B_i) \geq 2 - n$, а также $\Sigma_{a^*}(B_i) \geq 3 - n$ в случае нечетного n .

Впоследствии нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

ЛЕММА 1. Рассмотрим двумерное изомонодромное семейство Шлезингера вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \quad \sum_{i=1}^n B_i(a) = K = \text{diag}(\theta, -\theta), \quad \theta \in \mathbb{C},$$

и функцию $b(a) = \sum_{i=1}^n b_i^{12}(a) a_i$, где $b_i^{12}(a)$ – верхние правые элементы матриц $B_i(a)$ соответственно. Тогда дифференциал функции $b(a)$ выражается формулой

$$db(a) = (2\theta + 1) \sum_{i=1}^n b_i^{12}(a) da_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференциал $db(a)$ имеет вид

$$db(a) = \sum_{i=1}^n a_i db_i^{12}(a) + \sum_{i=1}^n b_i^{12}(a) da_i.$$

Для того чтобы найти первое из двух последних слагаемых, воспользуемся уравнением Шлезингера для матриц $B_i(a)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i dB_i(a) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n [B_i(a), B_j(a)] d(a_i - a_j) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[B_i(a), \sum_{j=1, j \neq i}^n B_j(a) \right] da_i = - \sum_{i=1}^n [B_i(a), K] da_i. \end{aligned}$$

Верхний правый элемент полученной матричной дифференциальной 1-формы равен $\sum_{i=1}^n 2\theta b_i^{12}(a) da_i$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n a_i db_i^{12}(a) = 2\theta \sum_{i=1}^n b_i^{12}(a) da_i,$$

откуда

$$db(a) = (2\theta + 1) \sum_{i=1}^n b_i^{12}(a) da_i.$$

3. Изомонодромные деформации Шлезингера и системы Гарнье. Напомним о связи между изомонодромными деформациями Шлезингера и системами Гарнье.

Рассмотрим двумерное изомонодромное семейство Шлезингера

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n+2} \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \quad B_i(a^0) = B_i^0 \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad (6)$$

фуксовых систем с особыми точками $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = 0, a_{n+2} = 1, a_{n+3} = \infty$, голоморфно зависящее от параметра $a = (a_1, \dots, a_n) \in D(a^0)$, где $D(a^0)$ – диск малого радиуса с центром в точке a^0 пространства $(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Обозначим через $\pm \beta_i$ собственные значения матриц $B_i(a)$ соответственно (напомним, что изомонодромная деформация сохраняет собственные значения матриц-вычетов $B_i(a)$). Из уравнения Шлезингера следует, что вычет в бесконечности является постоянной матрицей. Предположим, что эта матрица диагонализируема, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n+2} B_i(a) = -B_\infty = \text{diag}(-\beta_\infty, \beta_\infty).$$

Согласно теореме Мальгранжа матричные функции

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} b_i^{11}(a) & b_i(a) \\ b_i^{21}(a) & b_i^{22}(a) \end{pmatrix}$$

могут быть продолжены на универсальное накрытие Z' пространства $(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ как мероморфные функции (голоморфные вне аналитического подмножества Θ коразмерности один).

Поскольку верхний правый элемент $-\sum_{i=1}^{n+2} b_i(a)$ матрицы B_∞ равен нулю, функция

$$P_n(z, a) = (z - a_1) \cdots (z - a_{n+2}) \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i(a)}{z - a_i} \quad (7)$$

при каждом фиксированном a является многочленом степени n по z . Обозначим через $u_1(a), \dots, u_n(a)$ корни этого многочлена и определим функции $v_1(a), \dots, v_n(a)$:

$$v_j(a) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i^{11}(a) + \beta_i}{u_j(a) - a_i}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда имеет место следующее утверждение (см. [6; доказательство предложения 3.1] или [12; следствие 6.2.2, с. 207]).

ТЕОРЕМА 2. *Пара $(u(a), v(a)) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ удовлетворяет системе Гарнье (3) с параметрами $2\beta_1, \dots, 2\beta_{n+2}, 2\beta_\infty - 1$.*

Выразим коэффициенты многочлена $P_n(z, a)$ через верхние правые элементы $b_i(a)$ матриц $B_i(a)$. Рассмотрим элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_1(a) = \sum_{i=1}^{n+2} a_i, \quad \sigma_2(a) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+2} a_i a_j, \quad \dots, \quad \sigma_{n+1}(a) = a_1 \cdots a_n$$

от $a_1, \dots, a_n$, $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 1$, и многочлен $Q(z) = \prod_{i=1}^{n+2} (z - a_i)$. Тогда

$$P_n(z, a) = \sum_{i=1}^{n+2} b_i(a) \frac{Q(z)}{z - a_i} =: b(a)z^n + f_1(a)z^{n-1} + \dots + f_n(a)$$

(напомним, что $\sum_{i=1}^{n+2} b_i(a) = 0$). По теореме Виета имеем

$$\begin{aligned} b(a) &= \sum_{i=1}^{n+2} b_i(a)(-\sigma_1(a) + a_i) = \sum_{i=1}^{n+2} b_i(a)a_i = \sum_{i=1}^n b_i(a)a_i + b_{n+2}(a), \\ f_1(a) &= \sum_{i=1}^{n+2} b_i(a) \left(\sigma_2(a) - \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} a_i a_j \right) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n+2} (b_i(a) + b_j(a)) a_i a_j. \end{aligned}$$

Аналогично

$$f_k(a) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+2} (b_{i_1}(a) + \dots + b_{i_{k+1}}(a)) a_{i_1} \dots a_{i_{k+1}}$$

для каждого $k = 1, \dots, n$.

Наряду с формулами для перехода от двумерного изомонодромного семейства Шлезингера с $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ -вычетами к системе Гарнье существуют и формулы для обратного перехода (см. [6; предложение 3.2]). Это позволяет предложить некоторое дополнение к теореме Гарнье (утверждающей, что элементарные симметрические многочлены $F_i(a) = \sigma_i(u_1(a), \dots, u_n(a))$ от решений системы Гарнье мероморфны на Z').

Под *линейной монодромией* решения системы Гарнье будем подразумевать монодромию соответствующего двумерного изомонодромного семейства Шлезингера.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(u(a), v(a))$ – решение системы Гарнье (3), линейная монодромия которого неприводима, и Δ_i обозначает полярное множество функции F_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда

- а) если $\theta_\infty = 0$ и $u_i(a) \not\equiv u_j(a)$ при $i \neq j$, то $\Sigma_{a^*}(F_i) \geq -n - 1$ для всех $a^* \in \Delta_i$;
- б) если $\theta_\infty \neq 0$, то $\Sigma_{a^*}(F_i) \geq -n$ для всех $a^* \in \Delta_i$, за исключением, быть может, некоторого подмножества $\Delta^0 \subset \Delta_i$ положительной коразмерности (во всяком случае, $(F_i)_\infty \geq -n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство (6) с неприводимой монодромией, которое соответствует данному решению, и функции $b(a), f_1(a), \dots, f_n(a)$, построенные по матрицам-вычетам $B_i(a)$. По теореме Виета имеем $F_i(a) = (-1)^i f_i(a)/b(a)$, при этом согласно теореме 1 и замечанию 1 $\Sigma_{a^*}(f_i) \geq -n - 1$ для каждой функции f_i и любой точки a^* , принадлежащей Θ -дивизору семейства (6).

По лемме 1 имеем

$$db(a) = -\theta_\infty \sum_{i=1}^n b_i(a) da_i,$$

где $\theta_\infty = 2\beta_\infty - 1$.

а) Если $\theta_\infty = 0$, то $db(a) \equiv 0$ для всех $a \in Z'$, следовательно, $b(a) \equiv \text{const} \neq 0$. В самом деле, если $b(a) \equiv 0$, то $P_n(z, a)$ – многочлен степени $n - 1$ по z , и $u_i(a) \equiv u_j(a)$ для некоторых $i \neq j$, а это противоречит условиям теоремы. Таким образом, $\Sigma_{a^*}(F_i) = \Sigma_{a^*}(f_i) \geq -n - 1$ в первом случае.

б) Если $\theta_\infty \neq 0$, то

$$b_i(a) = -\frac{1}{\theta_\infty} \frac{\partial b(a)}{\partial a_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$b_{n+2}(a) = b(a) - \sum_{i=1}^n b_i(a) a_i, \quad b_{n+1}(a) = -b_{n+2}(a) - \sum_{i=1}^n b_i(a).$$

Следовательно, если функция b голоморфна в точке $a' \in Z'$, то голоморфны и функции b_i , $i = 1, \dots, n+2$, а значит, и функции f_i . Поэтому точки $a^* \in \Delta_i$ могут быть двух типов: такие, что $b(a^*) = 0$ (и тогда $\Sigma_{a^*}(F_i) \geq -1$, поскольку функция b неприводима²), или такие, которые принадлежат полярному множеству $\Delta \subset \Theta$ функции b .

Обозначим через $\Delta^0 \subset \Delta$ множество точек неопределенности функции b . Тогда в окрестности любой точки $a^* \in \Delta \setminus \Delta^0$ она может быть представлена в виде

$$b(a) = \frac{h(a)}{\tau_1^{j_1}(a) \cdots \tau_r^{j_r}(a)}, \quad j_1 \geq 1, \quad \dots, \quad j_r \geq 1, \quad (9)$$

где τ_l , $l = 1, \dots, r$, h – голоморфные около a^* функции, $h(a^*) \neq 0$, и при этом τ_l неприводимы в точке a^* , в то время как

$$f_i(a) = \frac{g_i(a)}{\tau_1^{k_1}(a) \cdots \tau_r^{k_r}(a)}, \quad k_1 + \dots + k_r \leq n+1, \quad (10)$$

где g_i , $i = 1, \dots, n$, – голоморфные около a^* функции. Таким образом,

$$\frac{f_i(a)}{b(a)} = \frac{g_i(a)}{\tau_1^{k_1}(a) \cdots \tau_r^{k_r}(a)} \bigg/ \frac{h(a)}{\tau_1^{j_1}(a) \cdots \tau_r^{j_r}(a)} = \frac{g_i(a)/h(a)}{\tau_1^{k_1-j_1}(a) \cdots \tau_r^{k_r-j_r}(a)},$$

поэтому

$$\Sigma_{a^*}(F_i) = - \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - j_{\alpha}) \geq -n$$

(суммирование производится по таким индексам α , для которых $k_{\alpha} - j_{\alpha} > 0$), что доказывает первую часть утверждения б).

В окрестности точки $a^* \in \Delta^0$ разложения (9), (10) для функций b , f_i соответственно также имеют место, но только $h(a^*) = 0$. Однако ввиду неприводимости функции b все неприводимые сомножители в разложении $h(a) = h_1(a) \cdots h_s(a)$ возле точки a^* различны (можно также считать, что ни одна из функций h_i не совпадает ни с какой функцией τ_l). Поскольку $k_l - j_l \leq n$ для всех $l = 1, \dots, r$, вторая часть утверждения б) следует из разложения

$$\frac{f_i(a)}{b(a)} = \frac{g_i(a)}{h_1(a) \cdots h_s(a) \tau_1^{k_1-j_1}(a) \cdots \tau_r^{k_r-j_r}(a)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из замечания 1 следует, что в случае четного n во всех оценках из теоремы 3 можно заменить n на $n-1$.

В частности, полярные множества функций $F_1(a) = u_1(a) + u_2(a)$ и $F_2(a) = u_1(a)u_2(a)$, где (u_1, u_2, v_1, v_2) – решение системы Гарнье $\mathcal{G}_2(\theta_1, \dots, \theta_4, \theta_\infty)$, соответствующее двумерному изомонодромному семейству Шлезингера с пятью особыми

² Действительно, если $db(a') \equiv 0$ для некоторого $a' \in \{b(a) = 0\}$, то $\sum_{i=1}^n b_i(a') da_i \equiv 0$ и $b_1(a') = \dots = b_n(a') = 0$. Принимая во внимание соотношения (8), получаем также, что $b_{n+2}(a') = 0$ и $b_{n+1}(a') = 0$. Но это противоречит неприводимости монодромии семейства (6).

точками и неприводимой монодромией, являются аналитическими подмногообразиями, и $(F_i)_\infty \geq -2$. (Заметим, что расслоение E_{a^*} , соответствующее точке a^* Θ -дивизора данного семейства, имеет вид $E_{a^*} \cong \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, откуда следует регулярность Θ -дивизора; см. [2; теорема 16.2] или [11].)

Решения системы Гарнье (3), линейная монодромия которых *приводима*, выражаются через решения гипергеометрических уравнений в частных производных. Более подробному обсуждению этого факта, обнаруженного Маццоко [13], посвящен следующий пункт.

4. Системы Гарнье и гипергеометрические уравнения Лауричеллы. Рассмотрим гипергеометрическое уравнение Лауричеллы $E_D(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma)$. Так называют систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (1 - a_i) \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial^2 u}{\partial a_i \partial a_j} + (\gamma - (\alpha + 1)a_i) \frac{\partial u}{\partial a_i} \\ - \beta_i \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial a_j} - \alpha \beta_i u = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11) \\ (a_i - a_j) \frac{\partial^2 u}{\partial a_i \partial a_j} + \beta_i \frac{\partial u}{\partial a_j} - \beta_j \frac{\partial u}{\partial a_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

в частных производных второго порядка от комплексной функции $u(a_1, \dots, a_n)$, где $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma \in \mathbb{C}$ – постоянные. Эту систему естественно считать обобщением гипергеометрического уравнения

$$z(1 - z) \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z) \frac{du}{dz} - \alpha \beta u = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

относительно комплексной функции $u(z)$, поскольку при $n = 1$ ($a_1 = z$, $\beta_1 = \beta$) система (11) совпадает с (12). Также несложно заметить, что решение $u(z)$ уравнения (12) порождает решение $u(a_1, \dots, a_n) = u(a_i)$ уравнения $E_D(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma)$, где $\beta_i = \beta$ и $\beta_j = 0$ при $j \neq i$.

Система (11) определена на пространстве $B = (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Как показано в [12; доказательство предложения 9.1.4, с. 249], вектор-функция

$$y(a) = \left(u, a_1 \frac{\partial u}{\partial a_1}, \dots, a_n \frac{\partial u}{\partial a_n} \right)^T$$

переменной $a = (a_1, \dots, a_n) \in B$ удовлетворяет вполне интегрируемой линейной *пфаффовской системе*

$$dy = \omega y, \quad y(a) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad (13)$$

где ω – некоторая матричная дифференциальная 1-форма, голоморфная на B . Следовательно, множество локальных решений гипергеометрического уравнения Лауричеллы около каждой точки $a \in B$ образует $(n + 1)$ -мерное векторное пространство, и решения продолжаются голоморфно на универсальное накрытие Z' пространства B .

Далее мы напомним, как отдельные решения некоторых систем Гарнье связаны с гипергеометрическими уравнениями Лауричеллы, и изучим подвижные особенности этих решений.

Как отмечалось, при $n > 1$ система Гарнье (3), вообще говоря, не удовлетворяет свойству Пенлеве (координаты $u_1, \dots, u_n$ ее решения определяются как корни многочлена степени n), однако может быть преобразована при помощи некоторого (симплектического) преобразования

$$(a, u, v, H) \mapsto (s, q, p, \tilde{H}), \quad \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - \tilde{H}_i ds_i) = \sum_{i=1}^n (v_i du_i - H_i da_i),$$

в гамильтонову систему $\mathcal{H}_n(\theta)$

$$\frac{\partial q_j}{\partial s_i} = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial s_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющую свойству Пенлеве (см. [12; гл. III, § 7]). Напомним это преобразование, определив функции

$$M_i(a, u) = -\frac{(a_i - u_1) \cdots (a_i - u_n)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} (a_i - a_j)}, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (14)$$

$$M^{k,i}(a, u) = \frac{u_k(u_k - 1)(u_k - a_1) \cdots (u_k - a_n)}{(u_k - a_i) \prod_{j=1, j \neq k}^n (u_k - u_j)},$$

Тогда преобразование $(a, u, v) \mapsto (s, q, p)$ задается формулами

$$s_i = \frac{a_i}{a_i - 1}, \quad q_i = -a_i M_i, \quad p_i = (1 - a_i) \sum_{k=1}^n \frac{M^{k,i} v_k}{u_k(u_k - 1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

при этом имеем

$$v_i = \sum_{k=1}^n \frac{q_k p_k}{u_i - a_k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

в то время как новые гамильтонианы

$$\tilde{H}_i = -(1 - a_i)^2 \left(H_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial q_j}{\partial a_i} \right) = \frac{1}{s_i(s_i - 1)} \left(\sum_{j,k=1}^n E_{jk}^i(s, q) p_j p_k - \sum_{j=1}^n F_j^i(s, q) p_j + \varkappa q_i \right)$$

являются многочленами по переменным $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$; здесь $E_{jk}^i(s, q)$, $F_j^i(s, q)$ – полиномы по q третьей и второй степеней соответственно,

$$\varkappa = \frac{1}{4} \left(\left(\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 \right)^2 - \theta_\infty^2 \right).$$

Если $\varkappa = 0$ (т.е. $\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 = \pm \theta_\infty$), то из вида функций $\tilde{H}_i$ следует, что система $\mathcal{H}_n(\theta)$ имеет решения вида $(q, 0)$, где q – решение системы

$$s_i(s_i - 1) \frac{\partial q_j}{\partial s_i} = -F_j^i(s, q), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Поскольку правая часть последней системы состоит из многочленов второй степени по q , ее можно рассматривать как обобщение классического уравнения Риккати на случай многих переменных. Аналогично классическому случаю, система (17)

может быть линеаризована подходящей заменой неизвестной. А именно, согласно [12; теорема 9.2.1, с. 252] решение $(q_1, \dots, q_n)$ системы (17) представляется в виде

$$q_i(s) = \frac{s_i(s_i - 1)}{\sum_{j=1}^{n+2} \theta_j - 1} \left(\frac{\theta_i}{s_i - 1} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial s_i} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $f(s)$ – произвольное решение гипергеометрического уравнения Лауричеллы

$$E_D \left(1 - \theta_{n+2}, \theta_1, \dots, \theta_n, \sum_{j=1}^{n+1} \theta_j \right).$$

Заметим, что $\sum_{j=1}^{n+2} \theta_j - 1 \neq 0$, если $\theta_\infty \neq 0$.

Функция f неприводима в своих нулях,³ поэтому всякое решение $(q_1, \dots, q_n)$ системы (17), так же, как и линейная комбинация Q координат q_i (с голоморфными коэффициентами), мероморфна на Z' , при этом полярное множество функции Q является аналитическим подмногообразием и $(Q)_\infty = -1$ (поскольку функция fQ голоморфна на Z').

Теперь рассмотрим решение $(u, 0)$ системы Гарнье (3), соответствующее решению $(q, 0)$ системы $\mathcal{H}_n(\theta)$, где $\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 = \pm \theta_\infty$ (заметим, что $v = 0 \Leftrightarrow p = 0$ ввиду (15) и (16)). Элементарные симметрические многочлены $F_i(a) = \sigma_i(u_1(a), \dots, u_n(a))$ суть линейные комбинации (с голоморфными коэффициентами) функций q_i . Действительно, пусть

$$Q_i(a) := \prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} (a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, n+2.$$

Тогда, как следует из формул (14) и (15),

$$a_i^n - F_1(a)a_i^{n-1} + \dots + (-1)^n F_n(a) = \frac{Q_i(a)}{a_i} q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, вектор $(-F_1, \dots, (-1)^n F_n)$ является решением системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов, определитель которой – определитель Вандермонда.

Все вышеизложенные рассуждения приводят к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(u(a), 0)$ – решение системы Гарнье (3), где

$$\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 = \pm \theta_\infty \neq 0.$$

Тогда полярные множества функций F_i суть аналитические подмногообразия и $(F_i)_\infty = -1$.

Данное предложение поможет нам в исследовании особенностей отдельных решений систем Гарнье, линейная монодромия которых *приводима*.

³Если $f(s^*) = 0$ и $(\partial f / \partial s_1)(s^*) = \dots = (\partial f / \partial s_n)(s^*) = 0$, то $f \equiv 0$ вследствие единственности решения системы (13).

5. Решения системы Гарнье, линейная монодромия которых приводима. Рассмотрим решение $(u(a), v(a))$ системы $\mathcal{G}_n(\theta)$, которому соответствует изомодромное семейство Шлезингера (6) с приводимой монодромией. Собственные значения матриц-вычетов $B_i(a)$ данного семейства суть $\pm\theta_i/2$ соответственно, $i = 1, \dots, n+2$, и

$$B_\infty = - \sum_{i=1}^{n+2} B_i(a) = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(\theta_\infty + 1, -\theta_\infty - 1)$$

– вычет в бесконечности. Из приводимости монодромии следует, что произведение собственных значений

$$e^{\pi\sqrt{-1}\varepsilon_1\theta_1}, \quad \dots, \quad e^{\pi\sqrt{-1}\varepsilon_{n+2}\theta_{n+2}}, \quad e^{\pi\sqrt{-1}\varepsilon_\infty(\theta_\infty+1)}$$

матриц монодромии $G_1, \dots, G_{n+2}, G_\infty$ соответственно равно единице (при некотором выборе чисел $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$), т.е. сумма

$$\varepsilon_1\theta_1 + \dots + \varepsilon_{n+2}\theta_{n+2} + \varepsilon_\infty(\theta_\infty + 1) \quad (18)$$

является целым четным числом.

ЛЕММА 2. Если сумма (18) равна нулю, то все матрицы $B_i(a)$ верхнетреугольны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие леммы означает, что при $a = a^0$ (как и при любом $a \in D(a^0)$) соответствующая фуксова система (6) задает связность в голоморфно тривиальном векторном расслоении E_0 ранга 2 над $\mathbb{C}$, имеющем линейное подрасслоение E'_0 нулевой степени (которое, следовательно, также голоморфно тривиально), стабилизирующееся связностью.

Рассмотрим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы, по столбцам которой записаны координаты горизонтальных сечений h_1, h_2 связности таких, что h_1 – сечение подрасслоения E'_0 . (Координаты, о которых идет речь, соответствуют базису (s_1, s_2) глобальных голоморфных сечений расслоения E_0 ; в этом базисе матричная дифференциальная 1-форма связности совпадает с 1-формой коэффициентов системы.) Тогда координаты этих же сечений в базисе $(s'_1, s'_2) = (s_1, s_2)C^{-1}$ таком, что s'_1 – сечение подрасслоения E'_0 , образуют фундаментальную матрицу $Y'(z) = CY(z)$ верхнетреугольного вида. Следовательно, все матрицы-вычеты $B'_i = CB_i^0 C^{-1}$ соответствующей фуксовой системы верхнетреугольны.

Покажем теперь, что из верхнетреугольности всех матриц $\tilde{B}_i(a) = CB_i(a)C^{-1}$ при $a = a^0$ следует их верхнетреугольность при любом значении параметра a .

Набор $\{\tilde{B}_1(a), \dots, \tilde{B}_{n+2}(a)\}$ также является решением уравнения Шлезингера, и все матрицы $\tilde{B}_i(a^0)$ верхнетреугольны, т.е. нижние левые элементы $\tilde{b}_i^{21}(a)$ всех матриц $\tilde{B}_i(a)$ обращаются в нуль при $a = a^0$. В силу уравнения Шлезингера имеем

$$d\tilde{b}_i^{21} = 2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} \frac{\tilde{b}_i^{11}\tilde{b}_j^{21} - \tilde{b}_j^{11}\tilde{b}_i^{21}}{a_i - a_j} d(a_i - a_j)$$

(напомним, что следы всех матриц $\tilde{B}_i(a)$ нулевые), следовательно, частные производные функций $\tilde{b}_i^{21}$ имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{b}_i^{21}}{\partial a_i} = \alpha_i \tilde{b}_i^{21} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} \alpha_{ij} \tilde{b}_j^{21}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial \tilde{b}_i^{21}}{\partial a_j} = -\alpha_{ij} \tilde{b}_j^{21} + \beta_{ij} \tilde{b}_i^{21}, \quad i = 1, \dots, n+2, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i,$$

где $\alpha_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ – голоморфные в $D(a^0)$ функции. Таким образом, частные производные любого порядка m каждой функции $\tilde{b}_i^{21}$ выражаются линейно (с голоморфными коэффициентами) через производные младших порядков функций $\tilde{b}_1^{21}, \dots, \tilde{b}_{n+2}^{21}$. А поскольку $\tilde{b}_1^{21}(a^0) = \dots = \tilde{b}_{n+2}^{21}(a^0) = 0$, то и частные производные любого порядка всех функций $\tilde{b}_i^{21}$ обращаются в нуль при $a = a^0$. Следовательно, эти функции тождественно равны нулю.

Итак, существует матрица $C = (c_{ij}) \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ такая, что

$$C \begin{pmatrix} b_i^{11}(a) & b_i^{12}(a) \\ b_i^{21}(a) & b_i^{22}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i & \tilde{b}_i^{12}(a) \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i \end{pmatrix} C, \quad i = 1, \dots, n+2, \quad (19)$$

$$C \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon_\infty (\theta_\infty + 1) & * \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_\infty (\theta_\infty + 1) \end{pmatrix} C. \quad (20)$$

Если $\varepsilon_\infty = 1$, то из соотношения (20) следует (сравнение левых нижних элементов), что $c_{21} = 0$, т.е. матрица C верхнетреугольна. Следовательно, верхнетреугольны и все матрицы $B_i(a) = C^{-1} \tilde{B}_i(a) C$.

Если $\varepsilon_\infty = -1$, то из соотношения (20) следует (сравнение правых нижних элементов), что $c_{22} = 0$. Но тогда в силу (19) (сравнение правых нижних элементов) все $b_i^{12}(a)$ равны нулю, т.е. все матрицы $B_i(a)$ нижнетреугольны. Это противоречит тому, что исходное семейство (6) построено по решению системы Гарнье и функция

$$(z - a_1) \cdots (z - a_{n+2}) \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i^{12}(a)}{z - a_i}$$

является многочленом степени n по z (см. (7)).

Следствием предложения 1 и леммы 2 является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $(u(a), v(a))$ – решение системы Гарнье (3), линейная монодромия которого приводима, и соответствующая сумма (18) равна нулю, $\theta_\infty \neq 0$, то полярные множества функций $F_i = \sigma_i(u_1, \dots, u_n)$ суть аналитические подмногообразия и $(F_i)_\infty = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 матрицы-вычеты $B_i(a)$ изомонодромного семейства Шлезингера (6), соответствующего решению $(u(a), v(a))$, имеют вид

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i & b_i^{12}(a) \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n+2,$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) \end{pmatrix}$$

($\varepsilon_\infty = 1$). Следовательно, в силу теоремы 2 пара $(u(a), 0)$ является решением системы Гарнье $\mathcal{G}_n(\tilde{\theta})$ с параметрами

$$(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{n+2}, \tilde{\theta}_\infty) = (-\varepsilon_1 \theta_1, \dots, -\varepsilon_{n+2} \theta_{n+2}, \theta_\infty),$$

удовлетворяющими соотношению из предложения 1:

$$\sum_{i=1}^{n+2} \tilde{\theta}_i - 1 = - \sum_{i=1}^{n+2} \varepsilon_i \theta_i - 1 = (\theta_\infty + 1) - 1 = \tilde{\theta}_\infty.$$

Таким образом, к функциям $F_i = \sigma_i(u_1, \dots, u_n)$ применимо предложение 1.

Итак, если параметры системы Гарнье $\mathcal{G}_n(\theta)$ таковы, что сумма (18) не является целым четным числом ни при каком выборе чисел $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$, то линейная монодромия любого решения этой системы неприводима, и в таком случае применима теорема 3. Если же при некотором выборе чисел $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$ сумма (18) – целое четное число, то система может иметь решения с приводимой линейной монодromией. При этом если сумма (18), отвечающая подпредставлению монодромии, равна нулю, то к соответствующему решению можно применить предложение 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Poincaré, “Sur les groupes des équations linéaires”, *Acta Math.*, **4**:1 (1884), 201–312.
- [2] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009.
- [3] R. Fuchs, “Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **141** (1906), 555–558.
- [4] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве*, Университетское, Минск, 1990.
- [5] R. Garnier, “Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l’intégrale générale est uniforme et sur une classe d’équations nouvelles d’ordre supérieur dont l’intégrale générale a ses points critiques fixes”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **29** (1912), 1–126.
- [6] K. Okamoto, “Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **33**:3 (1986), 575–618.
- [7] L. Schlesinger, “Über die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte”, *J. Reine Angew. Math.*, **129** (1906), 287–294.
- [8] B. Malgrange, “Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières”, *Mathematics and Physics*, Progr. Math., **37**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 401–426.
- [9] A. A. Bolibrukh, “On orders of movable poles of the Schlesinger equation”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:1 (2000), 57–73.
- [10] А. А. Болибрух, “Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений”, *Математические события XX века*, ФАЗИС, М., 2004, 53–79.
- [11] R. R. Gontsov, I. V. Vyugin, *Apparent Singularities of Fuchsian Equations, and the Painlevé VI Equation and Garnier Systems*, arXiv: [math.CA/0905.1436](https://arxiv.org/abs/math.CA/0905.1436).
- [12] K. Iwasaki, H. Kimura, Sh. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Aspects Math., **E16**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
- [13] M. Mazzocco, “The geometry of the classical solutions of the Garnier systems”, *Int. Math. Res. Not.*, 2002, № 12, 613–646.

Р. Р. Гонцов

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: rgontsov@inbox.ru

Поступило

09.12.2009