Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 942–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:17:36

Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения

С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович

1. Введение. В работах [1]–[3] получены асимптотические решения задачи Коши для линейных гиперболических систем (с переменными коэффициентами), включая и волновое уравнение, в том случае когда начальные условия локализованы в окрестности точки и имеют вид функции $V(x/\mu)$, где $V(y)$ – гладкая функция, убывающая при $|y| \rightarrow \infty$ быстрее $1/|y|^{1+\delta}$, $\delta > 0$, $\mu > 0$ – малый параметр, описывающий “степень локализации”. В этих работах было показано, что с асимптотической точки зрения в таких задачах имеется явление метаморфозы профиля решения, аналогичное явлению метаморфозы разрывов в теории обобщенных решений гиперболических систем [4]: при $t = 0$ решение локализовано в окрестности точки, а при $t \gg \mu$ решение локализовано в окрестности замкнутой гиперповерхности – волнового фронта. С точки зрения квазиклассических асимптотик точка $x = 0$ оказывается фокальной точкой и глобальный ответ выражается в виде обобщенного канонического оператора Маслова, реализация которого приводит к различным формулам в различных областях пространства. В этой заметке мы приводим широкий класс некоторых точных алгебраических решений задачи Коши для многомерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u|_{t=0} = V(x), \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (1)$$

Приводимые решения основаны на начальных условиях рассмотренных (в двумерном случае) в работах [5], [6], более того, в [5], [6] одно из таких решений построено в параметрической форме (см. также [7], [8]). Наше представление кажется нам более простым и эффективным. Построенные решения иллюстрируют в многомерном случае указанное явление “метаморфозы профиля решения”. Разумеется, это явление хорошо известно в математической и теоретической физике, и, на наш взгляд, любопытный (“методологический”) факт здесь состоит в том, что оно описывается *элементарными алгебраическими функциями*, что позволяет явным образом проследить весь процесс метаморфозы решения для волновых уравнений в любой размерности. По всей видимости, рассматриваемый в этой заметке пример с этой точки зрения является уникальным.

2. “Основное решение”. Сначала выберем функции $V(x)$ в следующем виде. Положим

$$V(x) = \frac{A}{(1 + |x|^2/\mu^2)^{(n+1)/2}}. \quad (2)$$

Здесь A , μ – вещественные константы, $\mu > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Решение задачи Коши (1), (2) определяется формулой*

$$u(x, t) = A \operatorname{Re} \frac{(1 + ict/\mu)}{((1 + ict/\mu)^2 + |x|^2/\mu^2)^{(n+1)/2}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получается простым дифференцированием. Более “идейное” доказательство опирается на тот факт, что преобразование Фурье $\tilde{V}(k)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ – двойственные переменные по отношению к $x = (x_1, \dots, x_n)$, функции (2) равно $Ae^{-\mu|k|}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00726).

Последующее применение метода Фурье к задаче (1), (2) приводит к явно вычисляемым интегралам, дающим формулу (3).

3. “Операторы рождения и возмущенные решения”. Очевидно дифференцирование любого решения задачи (1) по любой переменной x_j дает новое решение волнового уравнения. В этом смысле операторы $\partial/\partial x_j$ играют роль операторов рождения для (1). Эти элементарные соображения приводят к следующему очевидному утверждению. Пусть $Q(k)$ – некоторый полином аргументов $k = (k_1, \dots, k_n)$. Ему соответствует дифференциальный оператор $\hat{Q} = Q(\mu\nabla)$, где ∇ – оператор градиента.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Функции*

$$u_Q(x, t) = A \operatorname{Re} \left(Q(\mu\nabla) \frac{(1 + ict/\mu)}{((1 + ict/\mu)^2 + |x|^2/\mu^2)^{(n+1)/2}} \right),$$

являются решением задачи Коши (1) с

$$V_Q(x) = \hat{Q} \frac{A}{(1 + |x|^2/\mu^2)^{(n+1)/2}}.$$

4. Поведение функций $u(x, t)$ и $u_Q(x, t)$. Рассмотрим случай, когда μ мало. Тогда при $t = 0$ эти функции локализованы в μ -окрестности точки $x = 0$. При $t \gg \mu/c$ эти функции локализованы в окрестности сферы $S_t = \{|x| = ct\}$ (что естественно), и асимптотика функции $u(x, t)$ определяется следующим образом. Введем сферические координаты $\psi = \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ (углы) и $r = |x|$, и в окрестности S_t будем использовать координаты $\psi = \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ и $y = r - ct$. Единичный вектор с углами $\psi = \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ будем обозначать $\mathbf{n}(\psi)$. Тогда асимптотики $u(x, t)$ и $u_R(x, t)$ при $t \gg \mu/c$ определяются формулами

$$u(x, t) = \frac{\mu^{(n-1)/2}}{2^{(n+1)/2}(ct)^{(n-1)/2}} \operatorname{Re} \frac{i}{(i + y/\mu)^{(n+1)/2}} + O(\mu^{(n+1)/2}),$$

$$u_Q(x, t) = \frac{\mu^{(n-1)/2}}{2^{(n+1)/2}(ct)^{(n-1)/2}} Q\left(\mu\mathbf{n}(\psi) \frac{\partial}{\partial y}\right) \operatorname{Re} \frac{i}{(i + y/\mu)^{(n+1)/2}} + O(\mu^{(n+1)/2}).$$

При соответствующей нормировке при $\mu \rightarrow +0$ функция $u(x, 0)$ в пределе переходит в δ -функцию Дирака $\delta(x)$, а при $t > \varepsilon > 0$ – в δ -функцию на сфере $|x| = ct$, и тем самым переходит в хорошо известное в математической физике обобщенное (фундаментальное) решение многомерного волнового уравнения с δ -функцией в начальных условиях [9]. Ясно, что асимптотика по параметру μ эквивалентна асимптотике по времени t при $t \gg \mu$ (для любых μ , в частности при $\mu = 1$). Функция $u(x, t)$, разумеется, сферически симметрична, а функции $u_Q(x, t)$, вообще говоря, нет. Производные по переменным x_j в точной формуле и по переменной y в асимптотической формуле создают осцилляции у решений в окрестности фронта, но также могут и менять амплитуду в тех точках, где значение полинома Q на векторе $\mathbf{n}(\psi)$ оказывается малым, и определять, таким образом, “диаграмму направленности” волны. Например, в двумерном случае в координатах $(y = |x| - ct, \psi)$, ψ – полярный угол, имеем

$$x = (ct + y) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix},$$

и если $\hat{Q} = \partial^m/\partial x_1^m$, то с точностью до $O(\mu^{(n+1)/2})$

$$u_Q(x, t) \approx \cos^m \psi \frac{\mu^{(n-1)/2} (-1)^m (n+1)(n+3) \cdots (n+1+2m)}{2^{(n+1)/2+m} (ct)^{(n-1)/2}} \operatorname{Re} \frac{i}{(i + y/\mu)^{(n+1)/2+m}}.$$

Осцилляции в направлении оси x_1 создают “начальный импульс” у волны, при этом по-прежнему фронт волны определяется уравнением $|x| = ct$, но амплитуда становится очень маленькой в окрестности точек $\psi = \pm\pi/2$.

Приведем несколько рисунков, иллюстрирующих поведение функций u и u_R для двумерного случая, $\mu = 0.2$, $c = 1$. На рис. 1–3 приведены графики “основной” функции и времен $t = 0$, $t = 0.1$, $t = 0.8$.

Рис. 1. Графики “основной” функции в моменты времени $t = 0$, $t = 1.2$, $t = 4$

Рис. 2. Профили “основной” функции в моменты времени $t = 0$, $t = 1.2$, $t = 4$, $t = 8$

Рис. 3. Графики второй производной по переменной x_1 в моменты времени $t = 0$, $t = 1.2$, $t = 4$

На рис. 3 в те же моменты времени приведены графики возбужденной функции оператором $\partial^2/\partial x_1^2$, а на рис. 4 приведены профили этой функции для полярных углов $\psi = 0$, $\psi = \pi/4$, $\psi = \pi/2$ в моменты времени $t = 0$, $t = 1.2$, $t = 4$, $t = 8$. Видно, что при $\psi = \pi/2$ амплитуда решения быстро исчезает со временем.

В заключение отметим, что константу A в формуле (2), как и коэффициенты полинома Q , можно выбрать комплексными, построенные функции, по-прежнему, будут

Рис. 4. Профили функции второй производной по переменной x_1 для значений полярных углов $\psi_1 = 0$ (левый рисунок), $\psi_1 = \pi/4$ (средний рисунок), $\psi_1 = \pi/2$ (правый рисунок) в моменты времени $t = 0$, $t = 1.2$, $t = 4$.

определять точные решения волнового уравнения, но начальные условия, разумеется, будут другими.

Мы благодарим С. И. Безродных и Е. Н. Пелиновского за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Yu. Dobrokhotoy, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221. [2] С. Ю. Доброхотов, Б. И. Волков, С. Я. Секерж-Зенькович, Б. Тироцци, *Фунд. прикл. геофизика*, **2**, 2009, 15–29. [3] Б. И. Волков, С. Я. Секерж-Зенькович, *Изв. РАН. МЖГ*, 2009, № 6, 116–122. [4] В. М. Бабич, *Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем.*, **246**:32 (1958), 228–260. [5] С. Ф. Доценко, Б. Ю. Сергиевский, Л. В. Черкасов, *Исследования цунами*, Вып. 1, МГК АН СССР, М., 1986, 7–14. [6] S. Wang, *ASCE Specialty Conference on Coastal Hydrodynamics* (June 29–July 1, 1987), University of Delaware, 1987, 657–670. [7] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996. [8] S. Ya. Sekerzh-Zenkovich, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 315–322. [9] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: doobr@ipmnet.ru

Поступило
19.04.2010

С. Я. Секерж-Зенькович

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: seker@ipmnet.ru