Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Хажикарими, Коконечность относительно подкатегории Серра, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 109–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8919>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:33:24

Коконечность относительно подкатегории Серра

А. Хажикарими

Пусть Φ – система идеалов коммутативного нетерова кольца R и $\mathcal{S}$ – подкатегория Серра R -модулей. Положим

$$H_{\Phi}^i(\cdot, \cdot) = \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{b} \otimes_R \cdot, \cdot).$$

Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в кольце R , M – конечно порожденный R -модуль и N – R -модуль из $\mathcal{S}$. Показано, что если функтор $D_{\Phi}(\cdot) = \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Hom}_R(\mathfrak{b}, \cdot)$ точен, то для любого $\mathfrak{b} \in \Phi$ выполнено включение $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{b}, H_{\Phi}^i(M, N)) \in \mathcal{S}$ для всех $i, j \geq 0$. Кроме того, доказано, что если t – неотрицательное целое число и $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для всех $i < t$, то $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ при условии, что $\mathcal{S}$ содержится в классе слабых R -модулей Ласкера. Наконец, показано, что если L – R -модуль и t – точная нижняя грань целых чисел i , для которых $H_{\mathfrak{a}}^i(L) \notin \mathcal{S}$, то $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, L)) \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, \text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(L))) \in \mathcal{S}$ для всех $j \geq 0$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В этой статье R всегда обозначает коммутативное нетерово кольцо с единицей и $\mathfrak{a}$ – идеал в кольце R . Непустое семейство идеалов Φ называется *семейством идеалов* в R , если для любых $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Phi$ существует такое $\mathfrak{c} \in \Phi$, что $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Предположим, что Φ – система идеалов в R . Для R -модуля M обозначим через $\Gamma_{\Phi}(M)$ множество

$$\{x \in M : \mathfrak{a}x = 0 \text{ для некоторого } \mathfrak{a} \in \Phi\}.$$

Если $f: M \rightarrow N$ – гомоморфизм R -модулей, то отображение $\Gamma_{\Phi}(f): \Gamma_{\Phi}(M) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(N)$ определяется как сужение гомоморфизма f на $\Gamma_{\Phi}(M)$. Легко видеть, что $\Gamma_{\Phi}(M)$ является подмодулем в M , а $\Gamma_{\Phi}(\cdot)$ – ковариантный аддитивный R -линейный точный слева функтор. Мы обозначаем i -й правый производный функтор функтора $\Gamma_{\Phi}(\cdot)$ через $H_{\Phi}^i(\cdot)$. Для любых двух R -модулей M и N функтор $H_{\Phi}^i(\cdot, \cdot)$ определяется как

$$\varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Ext}_R^i\left(\frac{R}{\mathfrak{b}} \otimes_R \cdot, \cdot\right)$$

(см. [1]). Легко видеть, что если $\Phi = \{\mathfrak{a}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, то $H_{\Phi}^i(\cdot, \cdot) = H_{\mathfrak{a}}^i(\cdot, \cdot)$.

Проблемы артиновости и коконечности локальных модулей когомологий играют важную роль в коммутативной алгебре. Ниже мы перечисляем некоторые известные результаты об артиновости и коконечности обобщенных локальных модулей когомологий. Пусть M и N – конечно порожденные R -модули.

А) Если функтор $D_{\mathfrak{a}}(\cdot)$ точен, то R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ $\mathfrak{a}$ -коконечен для любого $i \geq 0$ (см. [2; теорема 2.4]).

В) Если t – неотрицательное целое, для которого R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ конечно порожден при всех $i < t$, то R -модуль $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$ конечно порожден (см. [3; теорема 1.2]).

С) Если $t = \inf\{i : H_{\mathfrak{a}}^i(N) \text{ не конечно порожден}\}$, то R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$ $\mathfrak{a}$ -коконечен, если и только если R -модуль $\text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(N))$ $\mathfrak{a}$ -коконечен (см. [4; теорема 1.1, ii]).

Д) Если $t = \inf\{i : H_{\mathfrak{a}}^i(N) \text{ не артинов}\}$, то R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$ артинов, если и только если R -модуль $\text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(N))$ артинов (см. [5; теорема 2.1]).

Подкатегория R -модулей, замкнутая относительно взятия расширений, подмодулей и фактор-модулей называется *подкатегорией Серра*. Пусть Φ – система идеалов в R и $\mathcal{S}$ – подкатегория Серра. Предположим, что M – конечно порожденный R -модуль и $N \in \mathcal{S}$. Применяя технику доказательства утверждения А), мы доказываем, что если функтор $D_{\Phi}(\cdot) = \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Hom}_R(\mathfrak{b}, \cdot)$ точен, то $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{b}, H_{\Phi}^i(M, N)) \in \mathcal{S}$ для всех $\mathfrak{b} \in \Phi$ и всех $i, j \geq 0$. Затем с помощью того же метода, что и в доказательстве утверждения В), мы показываем, что если подкатегория $\mathcal{S}$ содержится в классе слабых R -модулей Ласкера и неотрицательное целое число t таково, что $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для всех $i < t$, то $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$. После этого мы доказываем, что если L – произвольный R -модуль и t – точная нижняя грань целых чисел i , для которых $H_{\mathfrak{a}}^i(L) \notin \mathcal{S}$, то $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, L)) \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, \text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(L))) \in \mathcal{S}$ для всех $j \geq 0$. Кроме того, мы показываем, что $H_{\mathfrak{a}}^t(M, L) \in \mathcal{S}$, если и только если $\text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(L)) \in \mathcal{S}$.

2. Коконечность относительно подкатегории Серра. Всюду ниже Φ обозначает систему идеалов в R , $\mathfrak{a}$ – идеал в R и $\mathcal{S}$ – подкатегорию Серра R -модулей.

ЛЕММА 2.1. i) Пусть $L \rightarrow M \rightarrow N$ – точная последовательность R -модулей и R -гомоморфизмов. Если $L, N \in \mathcal{S}$, то $M \in \mathcal{S}$.

ii) Если M – конечно порожденный R -модуль и $N \in \mathcal{S}$, то $\text{Ext}_R^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для всех $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство очевидно, и мы оставляем его читателю.

ЛЕММА 2.2. Для любых R -модулей M и N $H_{\Phi}^i(M, N) \cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1; лемма 2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Говорят, что R -модуль M имеет Φ -кручение (не имеет Φ -кручения), если $\Gamma_{\Phi}(M) = M$ (соответственно $\Gamma_{\Phi}(M) = 0$).

ЛЕММА 2.4. Пусть M – R -модуль. Тогда

- i) R -модуль $M/\Gamma_{\Phi}(M)$ не имеет Φ -кручения;
- ii) R -модули с Φ -кручением образуют подкатегорию Серра;
- iii) для всякого $\mathfrak{b} \in \Phi$ подмодуль $\Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$ содержится в $\Gamma_{\Phi}(M)$; в частности, если M не имеет Φ -кручения, то M не имеет $\mathfrak{b}$ -кручения ни для какого $\mathfrak{b} \in \Phi$;
- iv) если M – инъективный R -модуль, то $\Gamma_{\Phi}(M)$ – тоже инъективный R -модуль;
- v) если R -модуль M имеет Φ -кручение, то существует инъективная резольвента R -модуля M , каждый член которой имеет Φ -кручение;

- vi) если R -модуль M имеет Φ -кручение, то $H_{\Phi}^i(M) = 0$ для всех $i > 0$; в частности, $H_{\Phi}^i(\Gamma_{\Phi}(M)) = 0$ для всех $i > 0$;
 vii) $H_{\Phi}^i(M) \cong H_{\Phi}^i(M/\Gamma_{\Phi}(M))$ для всех $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения i), ii) и iii) очевидны.

iv) Из леммы 2.2 немедленно вытекает, что $\Gamma_{\Phi}(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$, и доказываемое утверждение следует из того, что прямой предел инъективных R -модулей всегда инъективен.

Утверждение v) следует из iv).

Ясно, что v) влечет vi).

vii) Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(M) \rightarrow M \rightarrow \frac{M}{\Gamma_{\Phi}(M)} \rightarrow 0,$$

которая индуцирует точную последовательность

$$H_{\Phi}^i(\Gamma_{\Phi}(M)) \rightarrow H_{\Phi}^i(M) \rightarrow H_{\Phi}^i\left(\frac{M}{\Gamma_{\Phi}(M)}\right) \rightarrow H_{\Phi}^{i+1}(\Gamma_{\Phi}(M)).$$

Теперь доказываемое утверждение вытекает из vi).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Мы называем функтор $D_{\Phi}(\cdot) := \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Hom}_R(\mathfrak{b}, \cdot)$ *функтором Φ -преобразования*.

Заметим, что функтор $D_{\Phi}(\cdot)$ точен слева.

ЛЕММА 2.6. i) Имеет место изоморфизм $D_{\Phi}(\cdot) \cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} D_{\mathfrak{b}}(\cdot)$.

ii) Для любого R -модуля L имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(L) \rightarrow L \rightarrow D_{\Phi}(L) \rightarrow H_{\Phi}^1(L) \rightarrow 0.$$

iii) Для любого R -модуля M имеет место изоморфизм $D_{\Phi}(D_{\Phi}(M)) \cong D_{\Phi}(M)$.

iv) Для любого R -модуля M справедливы равенства

$$\Gamma_{\Phi}(D_{\Phi}(M)) = H_{\Phi}^1(D_{\Phi}(M)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Предположим, что $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Phi$ и $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Если m и n – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $m \geq n$, то для любого R -модуля N диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(\mathfrak{a}^n, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(\mathfrak{b}^n, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_R(\mathfrak{a}^m, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(\mathfrak{b}^m, N) \end{array}$$

коммутативна; в этой диаграмме все отображения естественны. Поэтому определен гомоморфизм $\pi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}: D_{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow D_{\mathfrak{b}}(N)$. Множество $\{D_{\mathfrak{a}}(N), \pi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}: \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Phi, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ образует прямую систему R -модулей и R -гомоморфизмов над Φ , так что можно рассмотреть прямой предел $\varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} D_{\mathfrak{b}}(\cdot)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для любых $t > 0$ и $\mathfrak{a} \in \Phi$ найдется $\mathfrak{c} \in \Phi$, для которого $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}^t$.

ii) Для любого $\mathfrak{b} \in \Phi$ имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{b}}(L) \rightarrow L \rightarrow D_{\mathfrak{b}}(L) \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^1(L) \rightarrow 0,$$

которая при переходе к прямому пределу индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(L) \rightarrow L \rightarrow D_{\Phi}(L) \rightarrow H_{\Phi}^1(L) \rightarrow 0.$$

iii) Пусть $\mathfrak{a} \in \Phi$, и пусть $\Phi_{\mathfrak{a}} := \{\mathfrak{ab} : \mathfrak{b} \in \Phi\}$. Тогда $\Phi_{\mathfrak{a}}$ и Φ – конфинальные системы идеалов, так что $D_{\Phi}(M) \cong D_{\Phi_{\mathfrak{a}}}(M)$. Таким образом,

$$D_{\mathfrak{a}}(D_{\Phi}(M)) \cong D_{\mathfrak{a}}(D_{\Phi_{\mathfrak{a}}}(M)) \cong D_{\mathfrak{a}}\left(\varinjlim_{\mathfrak{c} \in \Phi_{\mathfrak{a}}} D_{\mathfrak{c}}(M)\right) \cong \varinjlim_{\mathfrak{c} \in \Phi_{\mathfrak{a}}} D_{\mathfrak{a}}(D_{\mathfrak{c}}(M)).$$

Пусть $\mathfrak{c} \in \Phi_{\mathfrak{a}}$. Тогда $\sqrt{\mathfrak{ac}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{c}}$. Согласно [6; упражнение 2.2.20] и [6; лемма 6.3.8] имеем

$$D_{\mathfrak{a}}(D_{\mathfrak{c}}(M)) \cong D_{\mathfrak{ac}}(D_{\mathfrak{c}}(M)) \cong D_{\mathfrak{c}}(D_{\mathfrak{c}}(M)) \cong D_{\mathfrak{c}}(M).$$

Значит,

$$D_{\Phi}(D_{\Phi}(M)) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Phi} D_{\mathfrak{a}}(D_{\Phi}(M)) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Phi} D_{\Phi}(M) \cong D_{\Phi}(M).$$

iv) Чтобы доказать требуемые равенства, достаточно в ii) положить $L := D_{\Phi}(M)$ и применить iii).

ЛЕММА 2.7. Пусть M – R -модуль с Φ -кручением и N – R -модуль без Φ -кручения. Тогда $\text{Hom}_R(M, N) = 0$. В частности, $\text{Hom}_R(M, D_{\Phi}(L)) = 0$ для всех R -модулей L . Более того, если функтор $D_{\Phi}(\cdot)$ точен, то $\text{Ext}_R^i(M, D_{\Phi}(L)) = 0$ для всех R -модулей L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: M \rightarrow N$ – R -гомоморфизм. Поскольку образ $\text{im } f$ этого отображения изоморфен фактор-модулю модуля M и в то же время является подмодулем N , этот образ должен одновременно иметь и не иметь Φ -кручение. Значит, $\text{im } f = 0$. Таким образом, $\text{Hom}_R(M, N) = 0$. По лемме 2.6 $D_{\Phi}(L)$ – R -модуль без Φ -кручения; следовательно, $\text{Hom}_R(M, D_{\Phi}(L)) = 0$ для всех R -модулей L .

Предположим теперь, что функтор $D_{\Phi}(\cdot)$ точен. Пусть E – инъективный R -модуль. Тогда из точной последовательности

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(E) \rightarrow E \rightarrow D_{\Phi}(E) \rightarrow 0$$

и леммы 2.4 вытекает, что R -модуль $D_{\Phi}(E)$ инъективен и не имеет Φ -кручения. Пусть L – R -модуль, и пусть $0 \rightarrow L \rightarrow E^{\bullet}$ – его инъективная резольвента. Наше предположение относительно функтора $D_{\Phi}(\cdot)$ влечет, что $D_{\Phi}(E^{\bullet})$ – инъективная резольвента R -модуля $D_{\Phi}(L)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Пусть M – конечно порожденный R -модуль и N – произвольный R -модуль. Тогда справедливы следующие утверждения.

i) Имеет место изоморфизм $H_{\Phi}^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, H_{\Phi}^0(N))$. Таким образом, если $0 \rightarrow N \rightarrow E^{\bullet}$ – инъективная резольвента R -модуля N , то для любого неотрицательного целого i имеет место естественный изоморфизм

$$H_{\Phi}^i(M, N) \cong H^i(\text{Hom}_R(M, H_{\Phi}^0(E^{\bullet}))).$$

- ii) Если R -модуль N имеет Φ -крючение, то $H_\Phi^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$ для всех i .
 iii) Если R -модуль M имеет Φ -крючение, то $H_\Phi^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Имеем

$$\begin{aligned} H_\Phi^0(M, N) &\cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{b}} \otimes_R M, N\right) \cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Hom}_R\left(M, \text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, N\right)\right) \\ &\cong \text{Hom}_R\left(M, \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, N\right)\right) \cong \text{Hom}_R(M, H_\Phi^0(N)). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} H_\Phi^i(M, N) &\cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} \text{Ext}_R^i\left(\frac{R}{\mathfrak{b}} \otimes_R M, N\right) \cong \varinjlim_{\mathfrak{b} \in \Phi} H^i\left(\text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{b}} \otimes_R M, E^\bullet\right)\right) \\ &\cong H^i(\text{Hom}_R(M, H_\Phi^0(E^\bullet))). \end{aligned}$$

Утверждение ii) немедленно вытекает из i) и леммы 2.4 v).

iii) Пусть $0 \rightarrow N \rightarrow E^\bullet$ – инъективная резольвента R -модуля N . По лемме 2.7 имеем $\text{Hom}_R(M, L) \cong \text{Hom}_R(M, \Gamma_\Phi(L))$ для всех R -модулей L . Значит, комплексы $\text{Hom}_R(M, E^\bullet)$ и $\text{Hom}_R(M, \Gamma_\Phi(E^\bullet))$ изоморфны. Теперь доказываемое утверждение следует из i).

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть M – конечно порожденный R -модуль и N – произвольный R -модуль. Предположим, что t – неотрицательное целое число, для которого $H_\Phi^i(N) \in \mathcal{S}$ при всех $i \leq t$. Тогда $H_\Phi^i(M, N) \in \mathcal{S}$ при всех $i \leq t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать теорему индукцией по t . По лемме 2.8 имеем $H_\Phi^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, H_\Phi^0(N))$; значит, для $t = 0$ доказываемое утверждение верно. Предположим, что $t \geq 1$ и это утверждение верно для $t - 1$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \Gamma_\Phi(N) \rightarrow N \rightarrow \frac{N}{\Gamma_\Phi(N)} \rightarrow 0$$

и леммы 2.8 вытекает точная последовательность

$$\text{Ext}_R^i(M, \Gamma_\Phi(N)) \xrightarrow{f} H_\Phi^i(M, N) \xrightarrow{g} H_\Phi^i\left(M, \frac{N}{\Gamma_\Phi(N)}\right).$$

Если $H_\Phi^i(M, N/\Gamma_\Phi(N)) \in \mathcal{S}$, то из этой точной последовательности по лемме 2.1 имеем $H_\Phi^i(M, N) \in \mathcal{S}$. Согласно лемме 2.4 имеет место изоморфизм $H_\Phi^i(N/\Gamma_\Phi(N)) \cong H_\Phi^i(N)$ для всех $i > 0$, причем $\Gamma_\Phi(N/\Gamma_\Phi(N)) = 0$. Значит, можно считать, что N – R -модуль без Φ -крючения. Положим $L = E(N)/N$ и рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow N \rightarrow E(N) \rightarrow L \rightarrow 0,$$

которая индуцирует точную последовательность

$$H_\Phi^i(M, E(N)) \rightarrow H_\Phi^i(M, L) \rightarrow H_\Phi^{i+1}(M, N) \rightarrow H_\Phi^{i+1}(M, E(N)).$$

По лемме 2.8 имеем

$$H_\Phi^0(M, E(N)) \cong \text{Hom}_R(M, H_\Phi^0(E(N))) = 0.$$

Кроме того, $H_{\Phi}^i(M, E(N)) = 0$ для всех $i \geq 1$. Следовательно, $H_{\Phi}^{i-1}(M, L) \cong H_{\Phi}^i(M, N)$ и $H_{\Phi}^{i-1}(L) \cong H_{\Phi}^i(N)$. Доказательство завершается применением индуктивного предположения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. R -модуль M называется *слабым R -модулем Ласкера*, если множество ассоциированных простых идеалов любого фактор-модуля R -модуля M конечно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. R -модуль M называется *минимаксным*, если он содержит конечно порожденный подмодуль N , фактор-модуль M/N по которому артинов. Подкатегории слабых R -модулей Ласкера и минимаксных R -модулей являются *подкатегориями Серра* (см. [7; лемма 2.2] и [8]).

СЛЕДСТВИЕ 2.12. Пусть M – конечно порожденный R -модуль, N – произвольный R -модуль и пусть t – неотрицательное целое. Тогда справедливы следующие утверждения.

- i) Если R -модуль $H_{\Phi}^i(N)$ конечно порожден для любого $i \leq t$, то R -модуль $H_{\Phi}^i(M, N)$ тоже конечно порожден для любого $i \leq t$.
- ii) Если R -модуль $H_{\Phi}^i(N)$ является слабым R -модулем Ласкера для любого $i \leq t$, то $H_{\Phi}^i(M, N)$ тоже является слабым R -модулем Ласкера для любого $i \leq t$.
- iii) Если $H_{\Phi}^i(N)$ – минимаксный R -модуль для любого $i \leq t$, то $H_{\Phi}^i(M, N)$ – тоже минимаксный R -модуль для любого $i \leq t$.
- iv) Если носитель $\text{Supp}_R(H_{\Phi}^i(N))$ конечен для любого $i \leq t$, то $\text{Supp}_R(H_{\Phi}^i(M, N))$ тоже конечен для любого $i \leq t$.

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Пусть M – конечно порожденный R -модуль, N – произвольный R -модуль и пусть t – неотрицательное целое. Тогда справедливы следующие утверждения.

- i) Если R -модуль $H_a^i(N)$ конечно порожден для любого $i \leq t$, то R -модуль $H_a^i(M, N)$ тоже конечно порожден для любого $i \leq t$.
- ii) Если R -модуль $H_a^i(N)$ является слабым R -модулем Ласкера для любого $i \leq t$, то $H_a^i(M, N)$ тоже является слабым R -модулем Ласкера для любого $i \leq t$.
- iii) Если $H_a^i(N)$ – минимаксный R -модуль для любого $i \leq t$, то $H_a^i(M, N)$ – тоже минимаксный R -модуль для любого $i \leq t$.
- iv) Если носитель $\text{Supp}_R(H_a^i(N))$ конечен для любого $i \leq t$, то $\text{Supp}_R(H_a^i(M, N))$ тоже конечен для любого $i \leq t$.

СЛЕДСТВИЕ 2.14. Пусть M – конечно порожденный R -модуль и $N \in \mathcal{S}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- i) Предположим, что $\mathfrak{a}$ – главный идеал и $H_a^1(N) \in \mathcal{S}$. Тогда $H_a^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для любого i .
- ii) Предположим, что R – локальный R -модуль размерности $\dim(R) \leq 2$ и $\mathcal{S}$ – подкатегория Серра слабых R -модулей Ласкера. Тогда $H_a^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Поскольку $H_a^i(N) = 0$ для любого $i \geq 2$, из условия и теоремы 2.9 вытекает, что $H_a^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для любого i .

Утверждение ii) следует из [7; следствие 3.4] и теоремы 2.9.

ТЕОРЕМА 2.15. Пусть M – конечно порожденный R -модуль и N – R -модуль из подкатегории $\mathcal{S}$. Тогда если функтор $D_{\Phi}(\cdot)$ точен, то $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{b}, H_{\Phi}^i(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любых $\mathfrak{b} \in \Phi$ и $i, j \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.8 $H_{\Phi}^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, H_{\Phi}^0(N))$; значит, R -модуль $H_{\Phi}^0(M, N)$ принадлежит подкатегории $\mathcal{S}$. Будем считать, что $i \geq 1$. Пусть $0 \rightarrow N \rightarrow E^{\bullet}$ – инъективная резольвента R -модуля N , и пусть $\mathfrak{C}^{\bullet} := \text{Hom}_R(M, E^{\bullet})$. Согласно [2; лемма 2.1] имеем $H_{\mathfrak{a}}^i(\text{Hom}_R(M, E)) = 0$ для любого инъективного R -модуля E и любого $i > 0$. Значит, по лемме 2.2 $H_{\Phi}^i(\text{Hom}_R(M, E)) = 0$ для любого инъективного R -модуля E и любого $i > 0$. Из леммы 2.6 вытекает точная последовательность комплексов

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet}) \rightarrow \mathfrak{C}^{\bullet} \rightarrow D_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet}) \rightarrow 0.$$

Рассматривая соответствующую длинную точную последовательность кохомологий, получаем точную последовательность

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^{i-1}(M, N) \xrightarrow{f} H^{i-1}(D_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet})) \xrightarrow{g} H_{\Phi}^i(M, N) \xrightarrow{h} \text{Ext}_R^i(M, N) \rightarrow \cdots.$$

Разобьем ее на две точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{im } f \rightarrow H^{i-1}(D_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet})) &\xrightarrow{g} \text{im } g \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \text{im } g \rightarrow H_{\Phi}^i(M, N) &\xrightarrow{h} \text{im } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Применяя функтор Ext и переходя к длинным точным последовательностям, мы получаем точные последовательности

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, H^{i-1}(D_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet}))\right) &\rightarrow \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, \text{im } g\right) \\ &\rightarrow \text{Ext}_R^{j+1}\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, \text{im } f\right) \rightarrow \text{Ext}_R^{j+1}\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, H^{i-1}(D_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet}))\right), \\ \cdots \rightarrow \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, \text{im } g\right) &\rightarrow \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, H_{\Phi}^i(M, N)\right) \rightarrow \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, \text{im } h\right) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

для всех $\mathfrak{b} \in \Phi$. Поскольку функтор $D_{\Phi}(\bullet)$ точен, из леммы 2.7 вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, H^{i-1}(D_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\bullet}))\right) &\cong \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, D_{\Phi}(H^{i-1}(\mathfrak{C}^{\bullet}))\right) \\ &\cong \text{Ext}_R^j\left(\frac{R}{\mathfrak{b}}, D_{\Phi}(\text{Ext}_R^{i-1}(M, N))\right) = 0, \end{aligned}$$

откуда $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{b}, \text{im } g) \cong \text{Ext}_R^{j+1}(R/\mathfrak{b}, \text{im } f)$ для всех $\mathfrak{b} \in \Phi$ и $j \geq 0$. Поскольку $\text{im } f$ и $\text{im } h$ принадлежат подкатегории $\mathcal{S}$, из леммы 2.1 немедленно вытекает доказываемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. Пусть M и N – два R -модуля, причем R -модуль M конечно порожден и $N \in \mathcal{S}$. Тогда если функтор $D_{\mathfrak{a}}(\cdot)$ точен, то $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любого $i \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.17. Пусть $\mathfrak{a}$ – главный идеал в R и M и N – R -модули, причем R -модуль M конечно порожден и $N \in \mathcal{S}$. Тогда $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любого $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое утверждение вытекает из точности функтора $D_{\mathfrak{a}}(\cdot)$ и предыдущего следствия.

ТЕОРЕМА 2.18. Пусть M и N – два R -модуля, R -модуль M конечно порожден и $N \in \mathcal{S}$. Предположим, что подкатегория $\mathcal{S}$ содержится в классе слабых R -модулей Ласкера и t – неотрицательное целое, для которого $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \in \mathcal{S}$ при всех $i < t$. Тогда $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать теорему индукцией по t . Согласно лемме 2.8 имеем $H_{\mathfrak{a}}^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^0(N))$, так что для $t = 0$ теорема верна. Предположим, что $t \geq 1$ и требуемое утверждение уже доказано для $t - 1$. Ввиду леммы 2.8 из точной последовательности

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow N \rightarrow \frac{N}{\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)} \rightarrow 0$$

получается точная последовательность

$$\text{Ext}_R^t(M, \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) \xrightarrow{f} H_{\mathfrak{a}}^t(M, N) \xrightarrow{g} H_{\mathfrak{a}}^t\left(M, \frac{N}{\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)}\right).$$

Разобьем эту точную последовательность на две точных последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{im } f \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^t(M, N) &\xrightarrow{g} \text{im } g \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \text{im } g \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^t\left(M, \frac{N}{\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)}\right). \end{aligned}$$

Для любого $i < t$ из точной последовательности

$$\text{Ext}_R^i(M, \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i\left(M, \frac{N}{\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)}\right) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(M, \Gamma_{\mathfrak{a}}(N))$$

следует, что $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) \in \mathcal{S}$. Применяя функтор $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \bullet)$ к последним двум точным последовательностям, мы видим, что достаточно доказать принадлежность $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N))) \in \mathcal{S}$. Итак, можно считать, что R -модуль N не имеет $\mathfrak{a}$ -звращения. В этом случае идеал $\mathfrak{a}$ содержит N -регулярный элемент x . Точная последовательность

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{x} N \rightarrow \frac{N}{xN} \rightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i\left(M, \frac{N}{xN}\right) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M, N) \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M, N) \rightarrow \cdots,$$

откуда вытекает, что $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N/(xN)) \in \mathcal{S}$ для любого $i < t - 1$. По индуктивному предположению имеем $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M, N/(xN))) \in \mathcal{S}$. Точная последовательность

$$H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M, N) \xrightarrow{h} H_{\mathfrak{a}}^{t-1}\left(M, \frac{N}{xN}\right) \xrightarrow{k} H_{\mathfrak{a}}^t(M, N) \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$$

дает точные последовательности

$$0 \rightarrow \text{im } h \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{t-1}\left(M, \frac{N}{xN}\right) \rightarrow \text{im } k \rightarrow 0, \quad (*)$$

$$0 \rightarrow \text{im } k \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^t(M, N) \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{a}}^t(M, N). \quad (\dagger)$$

Применяя функтор Ext и переходя к длинной точной последовательности, получаем из (*) точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}, \text{im } h\right) &\rightarrow \text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}, H_{\mathfrak{a}}^{t-1}\left(M, \frac{N}{xN}\right)\right) \\ &\rightarrow \text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}, \text{im } k\right) \rightarrow \text{Ext}_R^1\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}, \text{im } h\right). \end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathfrak{a}$, применение функтора $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \cdot)$ к (†) дает изоморфизм

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \text{im } k) \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)).$$

Поскольку $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^{t-1}(M, N/(xN))) \in \mathcal{S}$ и $\text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, \text{im } h) \in \mathcal{S}$, по лемме 2.1 получаем $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$. Индуктивное построение, а вместе с ним и доказательство, завершено.

СЛЕДСТВИЕ 2.19. Пусть M и N – два R -модуля, причем R -модуль M конечно порожден и $N \in \mathcal{S}$. Предположим, что подкатегория $\mathcal{S}$ содержится в классе слабых R -модулей Ласкера. Пусть t – неотрицательное целое число, для которого $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \in \mathcal{S}$ при всех $i < t$. Тогда если K – подмодуль R -модуля $H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$, принадлежащий подкатегории $\mathcal{S}$, то R -модуль $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)/K)$ тоже принадлежит подкатегории $\mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 ii) имеем $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, K) \in \mathcal{S}$. Применяя длинную Ext -последовательность, индуцированную последовательностью

$$0 \rightarrow K \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^t(M, N) \rightarrow \frac{H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)}{K} \rightarrow 0,$$

и теорему 2.18, заключаем, что $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)/K) \in \mathcal{S}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.20. Пусть M – конечно порожденный R -модуль и N – слабый R -модуль Ласкера (минимаксный R -модуль). Предположим, что t – неотрицательное целое, для которого R -модули $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ являются слабыми R -модулями Ласкера (соответственно, минимаксными R -модулями) при всех $i < t$. Тогда для любого слабого подмодуля Ласкера (минимаксного подмодуля) K в $H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$ R -модуль $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)/K)$ является слабым R -модулем Ласкера (минимаксным R -модулем).

Следующее следствие уточняет теорему 4.3 из [9].

СЛЕДСТВИЕ 2.21. Пусть M – конечно порожденный R -модуль и N – R -модуль, принадлежащий подкатегории $\mathcal{S}$. Предположим, что подкатегория $\mathcal{S}$ содержится в классе слабых R -модулей Ласкера. Пусть t – неотрицательное целое, для которого $H_{\mathfrak{a}}^i(N) \in \mathcal{S}$ при всех $i < t$. Тогда множество $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$ конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.9 имеем $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \in \mathcal{S}$ для любого $i < t$, так что теорема 2.18 влечет конечность множества

$$\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) = \text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))).$$

3. α - $\mathcal{S}$ -Размерность R -модуля. Для R -модуля N число

$$\inf\{i : H_{\alpha}^i(N) \text{ не конечно порожден}\}$$

называется *размерностью α -конечности R -модуля N* и обозначается через $f_{\alpha}(N)$. В [4; теорема 1.1] было показано, что если M и N – конечно порожденные R -модули и $t = f_{\alpha}(N)$, то R -модуль $H_{\alpha}^t(M, N)$ α -коконечен, если и только если R -модуль $\text{Hom}_R(M, H_{\alpha}^t(N))$ α -коконечен. Здесь мы вводим α - $\mathcal{S}$ -размерность R -модуля, которая определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть N – R -модуль. Мы определяем α - $\mathcal{S}$ -размерность R -модуля N как инфимум всех целых чисел i , для которых $H_{\alpha}^i(N) \notin \mathcal{S}$, и обозначаем ее через $\mathcal{S}_{\alpha}(N)$.

По теореме 2.9 для любого $i < \mathcal{S}_{\alpha}(N)$ и любого конечно порожденного R -модуля M имеем $\text{Ext}_R^j(R/\alpha, H_{\alpha}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ при всех $j \geq 0$. В случае $t = \mathcal{S}_{\alpha}(N)$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть M – конечно порожденный R -модуль, N – R -модуль и $t = \mathcal{S}_{\alpha}(N)$. Тогда

i) $\text{Ext}_R^j(R/\alpha, H_{\alpha}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$, если и только если

$$\text{Ext}_R^j(R/\alpha, \text{Hom}_R(M, H_{\alpha}^t(N))) \in \mathcal{S} \quad \text{для всех } j \geq 0;$$

ii) $H_{\alpha}^t(M, N) \in \mathcal{S}$, если и только если $\text{Hom}_R(M, H_{\alpha}^t(N)) \in \mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Рассмотрим спектральную последовательность Гротенди-ка

$$E_2^{p,q} := \text{Ext}_R^p(M, H_{\alpha}^q(N)) \Longrightarrow_p H_{\alpha}^{p+q}(M, N).$$

В $H_{\alpha}^t(M, N)$ найдется цепочка подмодулей

$$0 = H^{-1} \subseteq H^0 \subseteq \dots \subseteq H^{t-1} \subseteq H^t = H_{\alpha}^t(M, N),$$

в которой $H^i/H^{i-1} \cong E_{\infty}^{i,t-i}$ для любого $0 \leq i \leq t$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow H^{i-1} \rightarrow H^i \rightarrow \frac{H^i}{H^{i-1}} \rightarrow 0$$

вытекает, что $\text{Ext}_R^j(R/\alpha, H_{\alpha}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_R^j(R/\alpha, E_{\infty}^{0,t}) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$. Заметим, что $E_2^{p,q} \in \mathcal{S}$ для любого $q < t$, так что из того, что $E_{\infty}^{p,q}$ является фактор-модулем подмодуля R -модуля $E_2^{p,q}$, следует, что $E_{\infty}^{p,q} \in \mathcal{S}$ для всех $q < t$. Из того, что

$$E_{i+1}^{0,t} = \frac{\ker d_i^{0,t}}{\text{im } d_i^{-i,t+i-1}} = \ker d_i^{0,t}$$

и отображение $E_i^{0,t} \xrightarrow{d_i^{0,t}} E_i^{i,t-i+1}$ является нулевым для любого $i \geq t+2$, вытекает, что $E_{t+2}^{0,t} \cong E_{t+3}^{0,t} \cong \dots \cong E_{\infty}^{0,t}$. Значит, $\text{Ext}_R^j(R/\alpha, H_{\alpha}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ для всех $j \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_R^j(R/\alpha, E_{t+2}^{0,t}) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \ker d_{t+1}^{0,t} \rightarrow E_{t+1}^{0,t} \xrightarrow{d_{t+1}^{0,t}} E_{t+1}^{t+1,0}$$

и принадлежности $E_{t+1}^{t+1,0} \in \mathcal{S}$ следует, что $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$, если и только если $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, E_{t+1}^{0,t}) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$. Продолжая эти рассуждения, мы приходим к заключению, что $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, E_2^{0,t}) \in \mathcal{S}$ для любого $j \geq 0$.

Утверждение ii) доказывается тем же методом, что и i).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть M и N – R -модули, причем R -модуль M конечно порожден, и пусть $t = f_{\mathfrak{a}}(N)$. Тогда R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$ $\mathfrak{a}$ -коконечен тогда и только тогда, когда R -модуль $\text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(N))$ $\mathfrak{a}$ -коконечен.

Наше последнее следствие обобщает теорему 2.1 из [5].

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть M и N – R -модули, причем R -модуль M конечно порожден, и пусть t – наименьшее целое число среди всех целых i , для которых R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^i(N)$ не артинов. Тогда R -модуль $H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$ артинов, если и только если R -модуль $\text{Hom}_R(M, H_{\mathfrak{a}}^t(N))$ артинов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. H. Bijan-Zadeh, “A common generalization of local cohomology theories”, *Glasgow Math. J.*, **21**:2 (1980), 173–181.
- [2] J. Asadollahi, P. Schenzel, *Cofiniteness of Generalized Local Cohomology Modules for Principal Ideals*, Preprint.
- [3] J. Asadollahi, K. Khashyarmanesh, Sh. Salarian, “On the finiteness properties of the generalized local cohomology modules”, *Comm. Algebra*, **30**:2 (2002), 859–867.
- [4] K. Khashyarmanesh, M. Yassi, “On the finiteness property of generalized local cohomology modules”, *Algebra Colloq.*, **12**:2 (2005), 293–300.
- [5] L. Chu, “The Artinianness of local cohomology modules”, *Northeast. Math. J.*, **23**:1 (2007), 87–94.
- [6] M. P. Brodmann, R. Y. Sharp, *Local Cohomology. An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge Stud. Adv. Math., **60**, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [7] K. Divaani-Aazar, A. Mafi, “Associated primes of local cohomology modules of weakly Laskerian modules”, *Comm. Algebra*, **34**:2 (2006), 681–690.
- [8] H. Zöschinger, “Minimax-moduln”, *J. Algebra*, **102**:1 (1986), 1–32.
- [9] H. Saremi, *Matlis Duality and Finiteness Properties of Generalized Local Cohomology Modules*, Preprint.

А. Хажикарими

Islamic Azad University of Isfahan, Иран
E-mail: alihajikarimi@yahoo.com

Поступило

27.10.2009