Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Крупи, М. Ла Барбьера, Идеалы, порожденные
обратно-лексикографическими сегментами, *Матем. за-
метки*, 2011, том 89, выпуск 1, 53–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 05:34:56

Идеалы, порожденные обратно-лексикографическими сегментами

М. Крупи, М. Ла Барьера

Пусть k – поле, и пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами в поле k . Мы рассматриваем идеалы в S , порожденные обратно-лексикографическими сегментами мономов из S . Идеал, порожденный обратно-лексикографическим сегментом, называется вполне обратно-лексикографически сегментным идеалом, если всевозможные итерированные тени его множества образующих суть обратно-лексикографические сегменты. Мы описываем все вполне обратно-лексикографически сегментные идеалы в S и выясняем, при каких условиях у них имеются линейные резольвенты.

Библиография: 11 названий.

Введение. Пусть k – поле, и пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами в поле k . Пусть $<$ – мономиальный порядок на S и пусть u, v – два монома в S степени d , для которых $u \geq v$. Множество всевозможных мономов $w \in S$ степени d , для которых $u \geq w \geq v$, называется *сегментом относительно отношения порядка $<$* . Если $<$ – это лексикографический порядок, то такой сегмент называется *произвольным лексикографическим сегментом*, а идеал, порожденный произвольным лексикографическим сегментом, называется *лексикографически сегментным идеалом*.

Лексикографически сегментные идеалы в такой общности были определены Халлеттом и Мартином в работе [1]. В теории функций Гильберта рассматриваются только начальные лексикографически сегментные идеалы, являющиеся мономиальными идеалами, порожденными в каждой из степеней d начальным лексикографическим сегментом мономов степени d , т.е. множеством мономов из S вида $\{w \in M_d : w \geq v\}$, где M_d есть множество всех мономов степени d в S и $v \in M_d$. У начальных лексикографических сегментов имеется следующее примечательное свойство: их тени снова являются начальными лексикографическими сегментами. *Тенью* множества N называется множество

$$\text{Shad}(N) = \{x_i u : u \in N, i = 1, \dots, n\} \subset M_{d+1};$$

итерированные тени определяются по индукции при помощи правила

$$\text{Shad}^i(N) = \text{Shad}(\text{Shad}^{i-1}(N)).$$

Это свойство начальных лексикографических сегментов не имеет места для произвольных лексикографических сегментов. Халетт и Мартин называют лексикографический сегмент N вполне лексикографическим сегментом, если все итерированные тени сегмента N также суть лексикографические сегменты. Идеал, обладающий тем свойством, что все итерированные тени его образующих являются лексикографическими сегментами, называется *вполне лексикографически сегментным идеалом*. В статьях [2] и [3] авторы описывают все вполне лексикографические сегменты и находят все лексикографически сегментные идеалы, у которых имеется линейная резольвента.

В настоящей работе мы изучаем ситуацию, в которой мономиальный порядок $<$ на S – это обратный лексикографический порядок, для которого $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Этот мономиальный порядок был введен Маколеем в [4]. Разница между однородным лексикографическим и обратным лексикографическим порядком довольно невелика, однако использование обратного лексикографического порядка вместо однородного лексикографического приводит к значительному повышению эффективности вычислений во многих алгоритмах [5], [6].

Пусть через $<$ обозначен обратный лексикографический порядок на S , и пусть $u, v \in M_d$. *Начальный обратнo-лексикографический сегмент* – это множество

$$\mathcal{R}^i(u) = \{w \in M_d : w \geq u\},$$

конечным обратнo-лексикографическим сегментом называется множество

$$\mathcal{R}^f(u) = \{w \in M_d : w \leq u\},$$

а *произвольный обратнo-лексикографический сегмент* определяется как множество

$$\mathcal{R}(u, v) = \{w \in M_d : u \geq w \geq v\}.$$

В отличие от лексикографического случая, начальные обратнo-лексикографические сегменты не обладают тем свойством, что их тень снова является начальным обратнo-лексикографическим сегментом. Начальные обратнo-лексикографически сегментные идеалы, т.е. мономиальные идеалы в S , порожденные в каждой степени начальным обратнo-лексикографическим сегментом, были изучены в [7], где автором также было показано, что у некоторых идеалов в данном классе также имеются минимальные числа Бетти для заданных функций Гильберта.

Основная цель настоящей работы – изучить идеалы, порожденные обратнo-лексикографическими сегментами. Идеал, порожденный обратнo-лексикографическим сегментом, называется *вполне обратнo-лексикографически сегментным*, если все итерированные тени множества его образующих являются обратнo-лексикографическими сегментами. Поскольку, вообще говоря, тень произвольного обратнo-лексикографического сегмента опять-таки не является обратнo-лексикографическим сегментом, возникает интересная задача: установить, при каких условиях обратнo-лексикографически сегментный идеал является вполне обратнo-лексикографически сегментным идеалом. Наша цель состоит в том, чтобы описать все вполне обратнo-лексикографически сегментные идеалы и привести достаточные условия, при которых у них имеется линейная резольвента. Методы, использованные в этой работе, инспирированы статьями [2] и [3].

В первом разделе приводятся предварительные сведения об обратно-лексикографически сегментных идеалах. Мы обсуждаем свойства начальных и конечных лексикографических сегментов. Более точно, мы доказываем, что конечные обратно-лексикографические сегменты обладают тем свойством, что их тени снова являются обратно-лексикографическими сегментами. В частности, они являются вполне обратно-лексикографическими сегментами (предложение 1.10). Более того, мы выясняем, когда это свойство также выполняется для начальных обратно-лексикографических сегментов (предложение 1.8).

Во втором разделе мы изучаем вполне обратно-лексикографически сегментные идеалы. Мы приводим достаточные условия для того, чтобы обратно-лексикографический сегмент являлся бы вполне обратно-лексикографическим сегментом. Мы доказываем теорему об инерционности, которая утверждает, что все итерированные тени обратно-лексикографического сегмента снова являются обратно-лексикографическими сегментами, если первая тень обладает этим свойством (теорема 2.6).

В третьем разделе мы приводим некоторые описания вполне обратно-лексикографически сегментных идеалов и доказываем основной результат настоящей работы (теорема 3.1). Доказательство этого результата основано на том факте, что произвольный обратно-лексикографический сегмент является пересечением начального обратно-лексикографического сегмента и конечного обратно-лексикографического сегмента, а также на том, что циклы Кошуля начальных и конечных обратно-лексикографически сегментных идеалов известны, поскольку оба идеала являются стабильными [8]. Более того, если

$$I = (\mathcal{R}(u, v)), \quad J = (\mathcal{R}^i(u)), \quad K = (\mathcal{R}^f(u)),$$

где $u \geq v$ – мономы степени d из S , мы сравниваем идеалы I , $J \cap K$ и рассматриваем идеал $J \cap K$ (предложение 3.2).

Гомологические методы из работы [8] также используются в четвертом разделе, где мы изучаем резольвенты идеалов, порожденных обратно-лексикографическими последовательностями. Из существования резольвенты Элияху–Кервера [9] получается, что у начальных и конечных обратно-лексикографически сегментных идеалов имеются линейные резольвенты, поскольку они являются стабильными идеалами, порожденными компонентами одной и той же степени. Это свойство вновь не имеет места в общем случае для произвольных обратно-лексикографически сегментных идеалов. Мы приводим достаточные условия для того, чтобы у идеала, порожденного вполне обратно-лексикографическим сегментом была бы линейная резольвента (теорема 4.1). Таким способом мы получаем большой класс вполне обратно-лексикографически сегментных идеалов, обладающих линейными резольвентами.

1. Предварительные сведения и обозначения. Пусть k – поле, и пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами в поле k . Мы рассматриваем S как $\mathbb{N}$ -градуированное кольцо, в котором $\deg x_i = 1$. Будем обозначать через M_d множество всех мономов степени d в кольце многочленов S .

Для данного мономиального идеала $I \subsetneq S$ через $G(I)$ будем обозначать наименьшее множество мономиальных образующих идеала I (оно определено однозначно), а через $G(I)_d$ – множество всех мономов $u \in G(I)$, для которых $\deg u = d$.

Пусть $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ и $x^b = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$ — два монома из S , $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$.

Обратный лексикографический порядок на мономах из S определяется так [10]:

$$x^a >_{\text{revlex}} x^b,$$

если и только если $\deg x^a > \deg x^b$ или $\deg x^a = \deg x^b$ и последняя ненулевая координата вектора

$$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

отрицательна.

Для этого порядка имеют место неравенства $x_1 >_{\text{revlex}} x_2 >_{\text{revlex}} \cdots >_{\text{revlex}} x_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Название “обратный лексикографический” связано с тем, что на мономах данной степени этот порядок будет обратным к порядку, получаемому в результате обратного переупорядочения переменных и введению на них однородного лексикографического упорядочения.

Чтобы упростить обозначения, начиная с этого места и до конца работы мы будем обозначать обратный лексикографический порядок на S символом $>$.

Например, мономы степени 2 в кольце многочленов $S = k[x_1, x_2, x_3]$ упорядочены относительно обратного лексикографического порядка следующим образом:

$$x_1^2 > x_1 x_2 > x_2^2 > x_1 x_3 > x_2 x_3 > x_3^2.$$

Для данного монома $1 \neq u \in S$ положим

$$\begin{aligned} \text{supp}(u) &= \{i : x_i \text{ делит } u\}, \\ M(u) &= \max\{i : x_i \text{ делит } u\}, \quad m(u) = \min\{i : x_i \text{ делит } u\}. \end{aligned}$$

Отметим, что для обратного лексикографического упорядочения на мономах из S имеют место следствия

$$M(v) < M(u) \implies v > u, \quad v \geq u \implies M(u) \geq M(v).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $u, v \in M_d$. Произвольным *обратно-лексикографическим сегментом* (или, для краткости, произвольным *обратно-лекссегментом*) степени d называется множество

$$\mathcal{R}(u, v) = \{w \in M_d : u \geq w \geq v\}.$$

Начальным обратно-лексикографическим сегментом называется множество

$$\mathcal{R}^i(u) = \{w \in M_d : w \geq u\},$$

и *конечным обратно-лексикографическим сегментом* — множество

$$\mathcal{R}^f(u) = \{w \in M_d : w \leq u\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Отметим, что $\mathcal{R}^i(u) = \mathcal{R}(x_1^d, u)$ и $\mathcal{R}^f(u) = \mathcal{R}(u, x_n^d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Градуированный идеал I в S называется *обратно-лексикографически сегментным идеалом* (или *обратно-лекссегментным идеалом*), если он порожден обратно-лексикографическим сегментом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $N \subset M_d$. Множество

$$\{x_i u : u \in N, i = 1, \dots, n\} \subset M_{d+1}$$

называется *тенью* множества N и обозначается через $\text{Shad}(N)$.

Определим i -ю тень по индукции при помощи соотношения

$$\text{Shad}^i(N) = \text{Shad}(\text{Shad}^{i-1}(N)).$$

Отметим, что если N является начальным обратно-лекссегментом степени d , то $\text{Shad}(N)$, вообще говоря, не является начальным обратно-лекссегментом степени $d+1$. Например, если $S = K[x_1, x_2, x_3]$ и $N = \{x_1^2, x_1 x_2\} \subset M_2$, то

$$\text{Shad}(N) = \{x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_1^2 x_3, x_1 x_2 x_3\} \subset M_3$$

не есть обратно-лекссегмент степени 3. Действительно, $x_2^3 > x_1^2 x_3$, но $x_2^3 \notin \text{Shad}(N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Обратно-лексикографический сегмент $\mathcal{R}$ называется *вполне обратно-лексикографическим сегментом*, если все итерированные тени сегмента $\mathcal{R}$ являются обратно-лексикографическими сегментами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть I – градуированный идеал в S . Компонента градуировки идеала I называется *обратно-лексикографическим сегментом*, если она порождена обратно-лексикографическим сегментом как векторное пространство над k ; I называется *вполне обратно-лекссегментным идеалом*, если все компоненты градуировки идеала I суть обратно-лексикографические сегменты.

В конце этого раздела мы рассмотрим некоторые свойства начальных и конечных обратно-лекссегментов, которые нам пригодятся в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $u \in M_d$. Начальный обратно-лекссегмент $\mathcal{R}^i(u)$ является полным обратно-лекссегментом, если и только если $x_{n-1}^d \geq u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно из [7; следствие 2.12], $\text{Shad}(\mathcal{R}^i(u))$ является обратно-лекссегментом, если и только если $x_{n-1}^d \in \mathcal{R}^i(u)$, т.е. $x_{n-1}^d \geq u$.

Так что для доказательства предложения достаточно применить этот результат необходимое число раз.

СЛЕДСТВИЕ 1.9. Пусть $u \in M_d$ и $J = (\mathcal{R}^i(u))$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) J является вполне обратно-лекссегментом;
- (ii) J_{d+1} является обратно-лекссегментом;
- (iii) $x_{n-1}^d \geq u$.

Более того, нетрудно проверить, что справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть $u \in M_d$. Конечный обратно-лекссегмент $\mathcal{R}^f(u)$ является вполне обратно-лекссегментом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сделать наблюдение, что $\mathcal{R}^f(u)$ можно рассматривать как начальный лекссегмент

$$\mathcal{L}^i(u) = \{w \in M_d : w \geq_{\text{lex}} u\},$$

где $\geq_{\text{lex}}$ – это обычный лексикографический порядок на S с обращенным порядком переменных, т.е. для которого $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$. Поэтому предложение следует из хорошо известного свойства: начальные лекссегменты являются вполне лексикографическими сегментами. [1], [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$ – произвольный обратно-лекссегментный идеал в S , порожденный компонентой степени d , и $u \geq v$.

Положим $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Тогда имеется включение $I \subseteq J \cap K$, которое, вообще говоря, является собственным.

Например, если

$$I = ((\mathcal{R}(x_2^2 x_3, x_1^2 x_4))) \subset k[x_1, x_2, x_3, x_4],$$

то моном $x_1 x_2^2 x_4 \in J \cap K$, но $x_1 x_2^2 x_4 \notin I$. Действительно,

$$\mathcal{R}(x_2^2 x_3, x_1^2 x_4) = \{x_2^2 x_3, x_1 x_3^2, x_2 x_3^2, x_3^3, x_1^2 x_4\},$$

и I не является вполне обратно-лекссегментным идеалом, поскольку

$$\text{Shad}(\mathcal{R}(x_2^2 x_3, x_1^2 x_4)) \neq \mathcal{R}(x_1 x_2^2 x_3, x_1^2 x_4).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12. Напомним, что мономиальный идеал I в S называется *стабильным*, если [9]:

для любого $u \in G(I)$ имеется включение $(x_j u)/x_{M(u)} \in I$ при всех $j < M(u)$.

Пусть u – моном в S . Заметим, что начальный обратно-лекссегментный идеал $(\mathcal{R}^i(u))$ – это стабильный идеал в S [7; предложение 2.8], и что конечный обратно-лекссегментный идеал $(\mathcal{R}^f(u))$ является стабильным идеалом при обращенном порядке переменных.

2. Вполне обратно-лекссегментные идеалы. В этом разделе мы изучаем вполне обратно-лекссегментные идеалы. Начнем со следующей леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть $u \geq v$ – два монома в M_d . Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$ и $J = (\mathcal{R}^i(v))$. Если I_{d+1} является обратно-лекссегментом, то J_{d+1} есть обратно-лекссегмент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, отметим, что

$$\text{Shad}(M_d) = M_{d+1}, \quad \text{Shad}(\mathcal{R}^f(v)) = \mathcal{R}^f(x_1 v) = \{w \in M_{d+1} : w \leq x_1 v\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i(x_1 v) &= \{w \in M_{d+1} : w \geq x_1 v\} = M_{d+1} \setminus \{w \in M_{d+1} : w < x_1 v\} \\ &\subseteq \text{Shad}(\mathcal{R}(x_1^d, v)) = \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v)). \end{aligned}$$

Согласно предположению I_{d+1} является обратно-лекссегментом, т.е.

$$\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) = \mathcal{R}(x_1 u, v x_n).$$

Значит,

$$\mathcal{R}^i(vx_n) = \mathcal{R}(x_1u, vx_n) \cup \mathcal{R}^i(x_1v) \subseteq \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v)).$$

Поскольку $\text{Shad}(\mathcal{R}^i(v)) \subseteq \mathcal{R}^i(vx_n)$, отсюда следует, что $\mathcal{R}^i(vx_n) = \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v))$, что и доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $u \geq v$ – два монома в M_d , и пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$ вполне обратнo-лекссегментный идеал в S . Если $n \notin \text{supp}(u)$, то $u \geq x_{n-1}^d \geq v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = (\mathcal{R}^i(v))$. Если I является вполне обратнo-лекссегментным идеалом, то I_{d+1} есть обратнo-лекссегмент, и J_{d+1} также является обратнo-лекссегментом (лемма 2.1). Следовательно, $x_{n-1}^d \geq v$ (следствие 1.9). С другой стороны, согласно предположению $M(u) \leq n-1$ и поэтому $u \geq x_{n-1}^d$. Наконец, $u \geq x_{n-1}^d \geq v$.

Утверждение, обратное к предыдущему, неверно. Это показывает следующий пример.

ПРИМЕР 2.3. Пусть $S = k[x_1, x_2, x_3]$. Пусть $u = x_1x_2^4$ и $v = x_1^4x_3$ – два монома степени 5 в S . При этом $3 \notin \text{supp}(u)$ и $u > x_2^5 > v$. Идеал $I = (\text{Shad}(R(u, v)))$ не является вполне обратнo-лекссегментным. Действительно, $\text{Shad}(R(u, v))$ не является обратнo-лекссегментом. А именно,

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \{x_1x_2^4, x_2^5, x_1^4x_3\}, \\ \text{Shad}(R(u, v)) &= \{x_1^2x_2^4, x_1x_2^5, x_1x_2^4x_3, x_2^6, x_2^5x_3, x_1^5x_3, x_1^4x_2x_3, x_1^4x_3^2\}, \\ R(x_1u, vx_4) &= \{x_1^2x_2^4, x_1x_2^5, x_2^6, x_1^5x_3, x_1^4x_2x_3, x_1^3x_2^2x_3, x_1^2x_2^3x_3, x_1x_2^4x_3, x_2^5x_3, x_1^4x_3^2\}. \end{aligned}$$

Поэтому $\text{Shad}(R(u, v)) \neq R(x_1u, vx_4)$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $u \geq v$ – два монома из M_d . Пусть $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Тогда идеал $I = J \cap K$ порожден компонентами степеней d и $d+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$ – стабильные идеалы, порожденные компонентами одной и той же степени d (замечание 1.12), у них имеется линейная резольвента [9]. Поэтому для доказательства леммы мы можем действовать так же, как в доказательстве [3; лемма 1.3].

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть I – обратнo-лекссегментный идеал в S , порожденный компонентой степени d . Предположим, что I_{d+1} – обратнo-лекссегмент. Тогда I является вполне обратнo-лекссегментным идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству [3; теорема 1.1]. Тем не менее, приведем его для полноты изложения.

Пусть

$$I = (\mathcal{R}(u, v)), \quad J = (\mathcal{R}^i(v)), \quad K = (\mathcal{R}^f(u)),$$

$u, v \in M_d$, причем $u \geq v$. Мы докажем, что $I = J \cap K$ и J суть вполне обратнo-лекссегментные идеалы. Тогда I тоже будет вполне обратнo-лекссегментным идеалом как пересечение двух вполне обратнo-лекссегментных идеалов.

Согласно лемме 2.1 J_{d+1} является лекссегментным множеством. Поэтому имеем $(J \cap K)_{d+1} = I_{d+1}$, поскольку оба они порождены $\mathcal{R}(x_1u, vx_n)$ как k -векторные пространства. Следовательно, $I = J \cap K$ (лемма 2.4).

Наконец, из следствия 1.9 заключаем, что J тоже является вполне обратнo-лекссегментным идеалом.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $u \geq v$ – два монома в M_d . Если $n \in \text{supp}(v)$ и $u/x_{M(u)} \geq v/x_n$, то $\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$ также является обратно-лекссегментом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{R}(u, v)$ – обратно-лекссегмент степени d , и пусть w – моном степени $d + 1$. Нам нужно доказать, что $w \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$ тогда и только тогда, когда $x_1 u \geq w \geq v x_n$.

Если $w \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, то $x_1 u \geq w \geq v x_n$, поскольку начальный и конечный мономы в $\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$ – это соответственно $x_1 u$ и $v x_n$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $x_1 u \geq w \geq v x_n$, но $w \notin \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$. Если x_n делит w , то $w/x_n \geq v$, а если x_n не делит w , то $w/x_i \geq v$ для всех x_i , делящих w (поскольку x_n делит v). Кроме того, если $j = t(w)$, то $u \geq w/x_j$. Действительно, если $j = 1$, то из того, что $u x_1 \geq w$, следует, что $u \geq w/x_1$; если $j \geq 2$, то $u \geq w/x_j$ (это получается при помощи некоторых рассуждений со степенями). Итак, если $w \notin \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, то найдутся такие целые числа $s > t$, что x_s и x_t делят w , и при этом $w/x_t > u \geq v > w/x_s$. Положим

$$u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \quad v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}, \quad w = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}.$$

Тогда n -компонентный вектор

$$(a_1 - c_1, \dots, a_t - c_t - 1, \dots, a_n - c_n)$$

не равен нулю, и его последняя ненулевая компонента положительна, поскольку $w/x_t > u$. Вектор

$$(b_1 - c_1, \dots, b_s - c_s - 1, \dots, b_n - c_n)$$

также не равен нулю, и его последняя ненулевая компонента отрицательна, так как $v > w/x_s$. Вычитая второй вектор из первого, получаем, что вектор

$$(a_1 - b_1, \dots, a_t - b_t - 1, \dots, a_s - b_s + 1, \dots, a_n - b_n)$$

также отличен от нуля, а его последняя ненулевая компонента положительна. Но это приводит нас к противоречию, так как из предположения $u/x_{M(u)} \geq v/x_n$ следует, что вектор

$$(a_1 - b_1, \dots, a_{M(u)} - b_{M(u)} - 1, \dots, a_n - b_n - 1)$$

либо равен нулю, либо имеет отрицательную последнюю компоненту.

ПРИМЕР 2.7. Пусть $S = k[x_1, x_2, x_3]$, $u = x_1^3$, $v = x_1^2 x_2$, где $u > v$ и $3 \notin \text{supp}(v)$; $\mathcal{R}(u, v) = \{x_1^3, x_1^2 x_2\}$. Тогда

$$\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) = \{x_1^4, x_1^3 x_2, x_1^3 x_3, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2 x_3\}$$

не является обратно-лекссегментом, так как $x_2^4 > x_1^3 x_3$, но $x_2^4 \notin \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, т.е.

$$\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) \neq \mathcal{R}(x_1 u, v x_3).$$

Следовательно, идеал $(\mathcal{R}(u, v)) = (x_1^3, x_1^2 x_2)$ не является вполне обратно-лекссегментным идеалом.

ПРИМЕР 2.8. Пусть $S = k[x_1, x_2, x_3]$, $u = x_2^3$, $v = x_1^2 x_3$, где $u > v$ и $3 \in \text{supp}(v)$, но $u/x_2 < v/x_3$; $\mathcal{R}(u, v) = \{x_2^3, x_1^2 x_3\}$. Тогда

$$\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) = \{x_1 x_2^3, x_2^4, x_2^3 x_3, x_1^3 x_3, x_1^2 x_2 x_3, x_1^2 x_3^2\}$$

не является обратно-лекссегментом, так как $x_1 x_2^2 x_3 > x_2^3 x_3$, но выполнено $x_1 x_2^2 x_3 \notin \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, т.е. $\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) \neq \mathcal{R}(x_1 u, v x_3)$. Следовательно, идеал $(\mathcal{R}(u, v)) = (x_2^3, x_1^2 x_3)$ не является вполне обратно-лекссегментным идеалом.

Используя те же методы, что и в доказательстве теоремы 2.6, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть $I = (u_1, \dots, u_t)$ – вполне обратно-лекссегментный идеал в S , порожденный компонентой степени d . Предположим, что $n \in \text{supp}(u_t)$ и $u_1/x_{M(u_1)} \geq u_t/x_n$.

Тогда $I = (\mathcal{R}(u, v))$ есть вполне обратно-лекссегментный идеал.

Как показывает следующий пример, утверждения, обратные к предыдущим результатам, неверны.

ПРИМЕР 2.10. Пусть $S = k[x_1, x_2, x_3]$, $u = x_2^3$, $v = x_1^2 x_3$, где $u > v$ и $3 \in \text{supp}(v)$, но $u/x_2 < v/x_3$; $\mathcal{R}(u, v) = \{x_2^3, x_1^2 x_3\}$. Тогда

$$\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) = \{x_1 x_2^2, x_2^3, x_2^2 x_3, x_1^2 x_3, x_1 x_2 x_3, x_1 x_3^2\} = \mathcal{R}(x_1 u, v x_3)$$

является обратно-лекссегментом. Следовательно, идеал $(\mathcal{R}(u, v)) = (x_2^3, x_1^2 x_3)$ является вполне обратно-лекссегментным идеалом.

Следующий результат гарантирует, что проверить, является ли мономиальный идеал вполне обратно-лекссегментным, возможно, рассмотрев лишь конечное множество степеней.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Пусть $I \subset S$ – мономиальный идеал, порожденный компонентами степеней от d_1 до d_2 включительно, где $d_1 < d_2$. Тогда I является вполне обратно-лекссегментным идеалом тогда и только тогда, когда I является обратно-лекссегментным идеалом в степени d при всех $d_1 \leq d \leq d_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если I – вполне обратно-лекссегментный идеал, то I_d является обратно-лекссегментом при любом d , в частности, при $d_1 \leq d \leq d_2$.

Предположим, что I есть обратно-лекссегментный идеал в степени d для любого $d_1 \leq d \leq d_2$.

Пусть

$$G(I)_{d_2} = \{u_1, \dots, u_p\}, \quad u_1 > \dots > u_p, \quad G(I)_{d_2-1} = \{v_1, \dots, v_q\}, \quad v_1 > \dots > v_q.$$

Поскольку I – обратно-лекссегментный идеал в степени d_2 , то, в частности,

$$u_1 \geq x_{M(u_1)} v_1 \geq \dots \geq x_n v_q \geq u_p.$$

Следовательно,

$$\frac{u_1}{x_{M(u_1)}} \geq v_1 \geq \dots \geq v_q \geq \frac{u_p}{x_n},$$

и согласно теореме 2.6 I является обратно-лекссегментным идеалом в степени d_2 . Продолжая по индукции, получаем, что I является обратно-лекссегментным идеалом в произвольной степени.

3. Некоторые описания вполне обратно-лекссегментных идеалов. В этом разделе мы приводим некоторые описания вполне обратно-лекссегментных идеалов.

Для того, чтобы сформулировать основной результат этого раздела, нам потребуется напомнить некоторые понятия и результаты из работ [3] и [8].

Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$ – обратно-лекссегментный идеал в $S = k[x_1, \dots, x_n]$, порожденный компонентой степени d , где $u \geq v$. Положим $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Пусть L – идеал в S , порожденный всеми мономами степени d из S . Тогда $L = J + K$. Идеал L можно представлять себе как конечный обратно-лекссегментный идеал: $L = (\mathcal{R}^f(x_1^d))$; следовательно, L является стабильным идеалом относительно лексикографического порядка, в котором $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$.

То же рассуждение можно применить и к идеалу $K = (\mathcal{R}^f(u))$.

Кроме того, идеал $J = (\mathcal{R}^i(v))$ является стабильным согласно замечанию 1.12. В частности, из наличия резольвенты Элияху–Кервера следует, что у идеалов J , K , L имеются линейные резольвенты, т.е.

$$\mathrm{Tor}_i^S(k, S/J)_j = 0 \quad \text{при} \quad i > 0, \quad j \neq i + d - 1,$$

и аналогично для K и L . Здесь через $\mathrm{Tor}_i^S(k, S/J)_j$ обозначается j -я компонента градуировки пространства $\mathrm{Tor}_i^S(k, S/J)$.

Напомним, что для произвольного градуированного идеала D градуированное векторное пространство $\mathrm{Tor}_i^S(k, S/D)$ изоморфно гомологиям Кошуля $H_i(\underline{x}; S/D)$, где $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$. Чтобы упростить обозначения, назовем эти группы гомологий $T_i(D)$.

В [8] авторы находят циклы, классы гомологий которых образуют базисы пространств $T_i(D)$, в случае, когда D является стабильным идеалом. Для описания этих циклов введем некоторые обозначения, которые будут использованы далее в нашей работе.

Для элемента $w \in M_d$ положим

$$w' = \frac{w}{x_{M(w)}}, \quad w'' = \frac{w}{x_{m(w)}}.$$

Мы рассматриваем алгебру Кошуля как внешнюю алгебру над k -векторным пространством с базисом $e_1, \dots, e_n$. Тогда у i -й компоненты комплекса Кошуля имеется базис

$$e_\sigma = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}, \quad \sigma = \{j_1, \dots, j_i\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad j_1 < \dots < j_i.$$

Как показано в [8], базис в $T_i(L)$ образован классами гомологий следующих циклов:

$$w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma, \quad w \in M_d, \quad |\sigma| = i - 1, \quad m(w) < \min(\sigma).$$

Аналогичным образом, если $w \in K$, то классы гомологий тех же циклов образуют базис пространства $T_i(K)$.

Такие циклы называются *неклассическими* циклами [3].

Циклы, классы гомологий которых образуют базис пространства $T_i(J)$ – это

$$w' e_\sigma \wedge e_{M(w)}, \quad w \in \mathcal{R}^i(v), \quad |\sigma| = i - 1, \quad \max(\sigma) < M(w).$$

Такие циклы называются *классическими* циклами [3].

Наконец, заметим, что точная последовательность S -модулей

$$0 \rightarrow R/J \cap K \rightarrow R/J \oplus R/K \rightarrow R/L \rightarrow 0$$

дает длинную точную последовательность

$$\cdots \rightarrow T_{i+1}(L) \rightarrow T_i(J \cap K) \rightarrow T_i(J) \oplus T_i(K) \xrightarrow{\varphi} T_i(L) \rightarrow \cdots. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ — мономы степени d в кольце S , пусть $u \neq x_1^d$, $u \geq v$, и пусть I — идеал, порожденный $\mathcal{R}(u, v)$. Тогда I есть вполне обратнo-лекссегментный идеал в S тогда и только тогда, когда $b_n \neq 0$ и u имеет место одно из следующих условий:

- (a) $u = x_1^{d-p} x_n^p$ и $v = x_{n-1}^{d-p} x_n^p$ для некоторого целого числа $0 < p \leq d$;
- (b) $a_n \neq b_n$, и для всякого $w > u$ существует такое число $i < n$, что $i \in \text{supp}(w)$ и $x_n w / x_i \geq v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.5 I является вполне обратнo-лекссегментным идеалом в S тогда и только тогда, когда $\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)) = \mathcal{R}(x_1 u, v x_n)$, т.е. когда $\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$ является обратным лекссегментом.

Если $b_n = 0$, то $v \geq x_{n-1}^d$. Пусть элемент $w \in M_d$ таков, что $w > u$. Тогда выполнено $m = w x_n \in \mathcal{R}(x_1 u, v x_n)$. Предположим, что $m \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$. Тогда $m = x_j n_j$, где $n_j \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, для некоторого j . Но из $n_j \geq v$ следует, что $j = n$. Значит, из $m = x_j n_j = x_n w$ следует, что $n_j = w < u$. Противоречие.

Таким образом,

$$m \in \mathcal{R}(x_1 u, v x_n) \setminus \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)).$$

- (a) Пусть $0 \neq a_n = b_n = p$. Предположим, что $u \neq x_1^{d-p} x_n^p$; тогда

$$x_1^{d-p} x_n^{p+1} \in \mathcal{R}(x_1 u, v x_n) \setminus \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)).$$

Действительно,

$$x_1 u = x_1^{a_1+1} \cdots x_n^p \geq x_1^{d-p} x_n^{p+1} \geq v x_n = x_1^{b_1} \cdots x_n^{p+1}.$$

Предположим, что $x_1^{d-p} x_n^{p+1} \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$. Тогда

$$x_1^{d-p} x_n^{p+1} = x_j m_j, \quad u \geq m_j \geq v.$$

Отметим, что

$$x_1^{d-p} x_n^{p+1} = x_1 (x_1^{d-p-1} x_n^{p+1}) = x_1 m_1 \quad \text{или} \quad x_1^{d-p} x_n^{p+1} = x_n (x_1^{d-p} x_n^p) = x_n m_n,$$

однако

$$v = x_1^{b_1} \cdots x_n^p > m_1 = x_1^{d-p-1} x_n^{p+1} \quad \text{и} \quad m_n = x_1^{d-p} x_n^p > u = x_1^{a_1} \cdots x_n^p.$$

Допустим, что $v \neq x_{n-1}^{d-p} x_n^p$. Тогда

$$x_{n-1}^{d-p+1} x_n^p \in \mathcal{R}(x_1 u, v x_n) \setminus \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$$

и

$$x_1 u = x_1^{a_1+1} \cdots x_n^p \geq x_{n-1}^{d-p+1} x_n^p \geq v x_n = x_1^{b_1} \cdots x_n^{p+1}.$$

Если $x_{n-1}^{d-p+1} x_n^p \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, то $x_{n-1}^{d-p+1} x_n^p = x_j m_j$, $u \geq m_j \geq v$.

Поскольку

$$x_{n-1}^{d-p+1} x_n^p = x_{n-1} (x_{n-1}^{d-p} x_n^p) = x_{n-1} m_{n-1} \quad \text{или} \quad x_{n-1}^{d-p+1} x_n^p = x_n (x_{n-1}^{d-p+1} x_n^{p-1}) = x_n m_n,$$

получаем, что

$$v = x_1^{b_1} \cdots x_n^p > m_{n-1} = x_{n-1}^{d-p} x_n^p \quad \text{и} \quad m_n = x_{n-1}^{d-p+1} x_n^{p-1} > u = x_1^{a_1} \cdots x_n^p.$$

Теперь пусть $u = x_1^{d-p} x_n^p$ и $v = x_{n-1}^{d-p} x_n^p$. В этом случае

$$\mathcal{R}(x_1 u, v x_n) = \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v)),$$

т.е. $\mathcal{R}(x_1 u, v x_n) \subseteq \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$.

Действительно, пусть $z = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \in \mathcal{R}(x_1 u, v x_n)$. Тогда

$$x_1 u = x_1^{d-p+1} x_n^p \geq x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \geq v x_n = x_{n-1}^{d-p} x_n^{p+1}$$

и, следовательно, $p \leq c_n \leq p+1$.

Пусть $c_n = p$. Тогда $z = x_1^{c_1} \cdots x_n^p = x_{m(z)} w$, где $w = x_{m(z)}^{c_{m(z)}-1} \cdots x_n^p \in \mathcal{R}(u, v)$. Действительно, нетрудно проверить, что

$$u = x_1^{d-p} x_n^p \geq w = x_{m(z)}^{c_{m(z)}-1} \cdots x_n^p \geq x_{n-1}^{d-p} x_n^p.$$

Пусть $c_n = p+1$. Тогда $z = x_1^{c_1} \cdots x_n^{p+1} = \tilde{w} x_n$, где элемент $\tilde{w} = x_1^{c_1} \cdots x_n^p$ таков, что

$$u = x_1^{d-p} x_n^p \geq \tilde{w} = x_1^{c_1} \cdots x_n^p \geq v = x_{n-1}^{d-p} x_n^p,$$

т.е. $\tilde{w} \in \mathcal{R}(u, v)$.

Итак, мы доказали, что $m \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$, т.е. $\mathcal{R}(x_1 u, v x_n) = \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$.

(б) Нам нужно доказать, что для $b_n \neq 0$ и $a_n \neq b_n$, идеал I является вполне обратно-лекссегментным тогда и только тогда, когда для всякого $w > u$ существует такое число $i < n$, что $i \in \text{supp}(w)$ и $x_n w / x_i \geq v$.

Пусть $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Мы уже знаем, что K является вполне обратно-лекссегментным идеалом (предложение 1.10), и, поскольку $b_n \neq 0$, т.е. $x_{n-1}^d \geq v$, то и идеал J является вполне обратно-лекссегментным (следствие 1.9).

В частности, $J \cap K$ является вполне обратно-лекссегментным идеалом. С другой стороны, $I \subseteq J \cap K$, $I_d = (J \cap K)_d$, и согласно лемме 2.4 идеал $J \cap K$ порожден компонентами степеней d и $d+1$.

Таким образом, отсюда следует, что I является вполне обратно-лекссегментным идеалом тогда и только тогда, когда $I = J \cap K$, т.е. тогда и только тогда, когда идеал $J \cap K$ порожден компонентой степени d .

Пусть L – идеал в S , порожденный всеми мономами степени d из S . Последнее условие эквивалентно утверждению о том, что гомоморфизм

$$\varphi: T_2(J) \oplus T_2(K) \rightarrow T_2(L)$$

в точной последовательности (3.1) сюръективен [3; лемма 1.3, доказательство]. Рассмотрим классы гомологий *неклассических* циклов

$$w'' e_{m(w)} \wedge e_i, \quad \text{где} \quad w \in M_d, \quad m(w) < i,$$

образующих базис в $T_2(L)$, и классы гомологий *неклассических* циклов

$$w''e_{m(w)} \wedge e_i, \quad \text{где } w \in \mathcal{R}^f(u), \quad m(w) < i,$$

которые образуют базис в $T_2(K)$. Эти классы гомологий отображаются при помощи φ в какие-то соответствующие им классы гомологий. Итак, все элементы вида $[w''e_{m(w)} \wedge e_i]$, где $w \in \mathcal{R}^f(u)$ и $m(w) < i$, лежат в образе гомоморфизма φ .

Пусть $w \in \mathcal{R}^i(v) \setminus \mathcal{R}^f(u)$. Имеем неравенство $w > u$. Дифференциал соответствующего цикла равен

$$\begin{aligned} d(w''e_{m(w)} \wedge e_i) &= w''x_{m(w)}e_i - w''x_ie_{m(w)} \\ &= \frac{w}{x_{m(w)}x_{m(w)}} e_i - w''x_ie_{m(w)} = we_i - w''x_ie_{m(w)}. \end{aligned}$$

Если $i \neq n$, то $w''x_i \in J$. Действительно, если $w = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$ и $w > u > v$, отсюда следует, что $c_n \leq a_n < b_n$. Тогда $[w''e_{m(w)} \wedge e_i] \in T_2(J)$.

Таким образом, те циклы $w''e_{m(w)} \wedge e_i$, для которых $w > u$ и $i \neq n > m(w)$, лежат в образе гомоморфизма φ .

Пусть U – это k -векторное подпространство в $T_2(L)$, порожденное элементами $[w''e_{m(w)} \wedge e_i]$ при всевозможных $w \in M_d$, для которых $i \neq n > m(w)$, и элементами $[w''e_{m(w)} \wedge e_n]$, для которых $w \in \mathcal{R}^f(u)$.

Тогда φ сюръективен тогда и только тогда, когда индуцированный гомоморфизм

$$\bar{\varphi}: T_2(J) \rightarrow T_2(L)/U$$

также сюръективен.

Базис в $T_2(J)$ образован классами гомологий *классических* циклов $z'e_i \wedge e_{M(z)}$, для которых $z \in \mathcal{R}^i(v)$, $i < M(z)$. Ясно, что $\text{im } \bar{\varphi}$ порождается образами классических циклов.

Рассмотрим два случая: $i \leq m(z)$ и $i > m(z)$.

Пусть $i \leq m(z) < M(z)$. Тогда $m(z'x_i) = m(z/x_{M(z)}x_i) = i$, поскольку $i \leq m(z)$. Далее, $(z'x_i)'' = z'x_i/x_{m(z'x_i)} = z'x_i/x_i = z'$. Значит,

$$z'e_i \wedge e_{M(z)} = (z'x_i)''e_{m(z'x_i)} \wedge e_{M(z)},$$

где $i = m(z'x_i) < M(z)$. Следовательно, если $M(z) \neq n$, то $\varphi([z'e_i \wedge e_{M(z)}]) \in U$, откуда получаем, что $\bar{\varphi}([z'e_i \wedge e_{M(z)}]) = 0$.

Если $M(z) = n$, то

$$\bar{\varphi}([z'e_i \wedge e_{M(z)}]) = \bar{\varphi}([z'e_i \wedge e_n]) = [(z'x_i)''e_{m(z'x_i)} \wedge e_n]$$

является элементом канонического базиса пространства $T_2(L)/U$.

Пусть $i > m(z)$. Рассмотрим границу $z'/x_{m(z)}e_{m(z)} \wedge e_i \wedge e_{M(z)}$, $m(z) < i < M(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} d\left(\frac{z'}{x_{m(z)}} e_{m(z)} \wedge e_i \wedge e_{M(z)}\right) \\ = \frac{z'}{x_{m(z)}x_{m(z)}} e_i \wedge e_{M(z)} - \frac{z'}{x_{m(z)}x_i} e_{m(z)} \wedge e_{M(z)} + \frac{z'}{x_{m(z)}x_{M(z)}} e_{m(z)} \wedge e_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z' e_i \wedge e_{M(z)} - \frac{z'}{x_{m(z)} x_i} e_{m(z)} \wedge e_{M(z)} + \frac{z}{x_{m(z)}} e_{m(z)} \wedge e_i \\
&= z' e_i \wedge e_{M(z)} - \frac{z'}{x_{m(z)} x_i} e_{m(z)} \wedge e_{M(z)} + z'' e_{m(z)} \wedge e_i.
\end{aligned}$$

Значит,

$$[z' e_i \wedge e_{M(z)}] = \left[\frac{z'}{x_{m(z)} x_i} e_{m(z)} \wedge e_{M(z)} \right] - [z'' e_{m(z)} \wedge e_i].$$

Поскольку $i \neq n$, $[z'' e_{m(z)} \wedge e_i] \in U$. Далее, $m(z) = m(z' x_i) = m(z/x_{m(z)} x_i)$, так как $i > m(z)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}([z' e_i \wedge e_{M(z)}]) &= \left[\frac{z'}{x_{m(z)} x_i} e_{m(z)} \wedge e_{M(z)} \right] \\
&= \left[\frac{z'}{x_{m(z' x_i)} x_i} e_{m(z' x_i)} \wedge e_{M(z)} \right] = [(z' x_i)'' e_{m(z' x_i)} \wedge e_{M(z)}].
\end{aligned}$$

Если $M(z) \neq n$, то $\bar{\varphi}([z' e_i \wedge e_{M(z)}]) = 0$, так как $[(z' x_i)'' e_{m(z' x_i)} \wedge e_{M(z)}] \in U$.

Если $M(z) = n$, то $\bar{\varphi}([z' e_i \wedge e_{M(z)}]) = \bar{\varphi}([z' e_i \wedge e_n])$ является элементом канонического базиса пространства $T_2(L)/U$.

Наконец, мы видим, что базис в образе отображения $\bar{\varphi}$ задается элементами

$$[(z' x_i)'' e_{m(z' x_i)} \wedge e_n] = \left[\left(\frac{z}{x_n x_i} \right)'' e_{m(z/x_n x_i)} \wedge e_n \right],$$

где $z \in \mathcal{R}^i(v)$, $i \neq n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Отображение $\bar{\varphi}$ сюръективно тогда и только тогда, когда выполнено условие (b) теоремы, т.е. когда для всех $w > u$ существует такое $1 \leq i < n$, что $w/x_i x_n \geq v$, т.е. когда для всех $w > u$ существуют такие $z \in \mathcal{R}^i(v)$ и $1 \leq i < n$, что $z x_i/x_n = w$.*

Действительно, канонический базис пространства $T_2(L)/U$ задается циклами $[w'' e_{m(w)} \wedge e_n]$, $w > u$. Если имеет место (b), то ясно, что

$$[w'' e_{m(w)} \wedge e_n] = \left[\left(\frac{z x_i}{x_n} \right)'' e_{m(z x_i/x_n)} \wedge e_n \right] \in \text{im } \bar{\varphi}.$$

Тогда $\text{im } \bar{\varphi} = T_2(L)/U$.

С другой стороны, если отображение $\bar{\varphi}$ сюръективно, то его ограничение на каждую компоненту полиградуировки также сюръективно. Поскольку полистепенни всех элементов $[w'' e_{m(w)} \wedge e_n]$ канонического базиса пространства $T_2(L)/U$ различны, это должен быть образ некоторого классического цикла в $T_2(J)$, откуда и следует требуемое.

В завершение этого раздела приведем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть $u \geq v$ — такие мономы из M_d , для которых $u \neq x_1^d$ и $v \neq x_n^d$. Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$, $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Тогда*

- (i) *$I = J \cap K$ тогда и только тогда, когда I является вполне обратно-лекссегментным идеалом;*

- (ii) $J \cap K$ является вполне обратнo-лекссегментным идеалом тогда и только тогда, когда J является вполне обратнo-лекссегментным идеалом, т.е. тогда и только тогда, когда $x_{n-1}^d \geq v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$. Если $b_n = 0$, то $v \geq x_{n-1}^d$. Тогда J_{d+1} не является обратнo-лекссегментом (следствие 1.9), а значит, и I_{d+1} не является обратнo-лекссегментом (лемма 2.1).

Более того, если w – моном, для которого $w > u$, то можно убедиться в том, что $wx_n \in J \cap K$, но $wx_n \notin I$. Действительно, $w \in \mathcal{R}^i(v)$, и поэтому $wx_n \in J$. Далее, $wx_n \in K$. Поскольку $w > u$, $w \notin \mathcal{R}(u, v)$, то $wx_n \notin I$. Значит, $I \neq J \cap K$.

Теперь предположим, что $b_n \neq 0$. Тогда $v \leq x_{n-1}^d$ и J является вполне обратнo-лекссегментным идеалом. Тогда $J \cap K$ также является вполне обратнo-лекссегментным идеалом, т.е. $(J \cap K)_{d+1} = \mathcal{R}(x_1u, vx_n)$. Согласно лемме 2.4 $I = J \cap K$ тогда и только тогда, когда $(J \cap K)_{d+1} \subseteq I$, т.е. когда $\mathcal{R}(x_1u, vx_n) \subseteq I$. Согласно теореме 2.5, это эквивалентно тому, что I является вполне обратнo-лекссегментным идеалом.

- (ii) Идеал J является вполне обратнo-лекссегментным идеалом тогда и только тогда, когда $x_{n-1}^d \geq v$. Известно, что если J вполне обратнo-лекссегментный, то, поскольку K вполне обратнo-лекссегментный, их пересечение $J \cap K$ также является вполне обратнo-лекссегментным идеалом.

Теперь предположим, что $J \cap K$ есть вполне обратнo-лекссегментный идеал. Нам нужно доказать, что $x_{n-1}^d \geq v$.

Предположим, что $u \geq v > x_{n-1}^d$. Тогда $x_{n-1}^{d+1} \geq vx_n$. Кроме того, из того, что $u > x_{n-1}^d$, следует, что выполнено $M(u) \leq n-1$, откуда $M(x_1u) \leq n-1 = M(x_{n-1}^{d+1})$, т.е. $x_1u \geq x_{n-1}^{d+1}$. Наконец, $x_{n-1}^{d+1} \in \mathcal{R}(x_1u, vx_n)$.

Отметим, что $x_{n-1}^d \notin \mathcal{R}^i(v)$, так что $x_{n-1}^{d+1} \notin J$. Значит, $x_{n-1}^{d+1} \notin J \cap K$.

4. Обратнo-лекссегментные идеалы, обладающие линейными резольвентами. В этом разделе мы изучаем обратнo-лекссегментные идеалы, у которых имеется линейная резольвента.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ – мономы степени d в S , где $u \neq x_1^d$ и $u \geq v$. Пусть I – обратнo-лекссегментный идеал в S .

Тогда у I имеется линейная резольвента в следующих случаях:

- (1) I – начальный или конечный обратнo-лекссегментный идеал;
- (2) $I = (\mathcal{R}(u, v))$, $b_n \neq 0$, где $u = x_1^{d-p}x_n^p$, $v = x_{n-1}^{d-p}x_n^p$, для некоторого целого числа $0 < p \leq d$;
- (3) $I = (\mathcal{R}(u, v))$, $a_n \neq b_n \neq 0$ и $x_nw/x_{m(w)} \geq v$ при всех $w > u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Начальные и конечные обратнo-лекссегментные идеалы являются стабильными идеалами, так что утверждение следует из [9].

(2) Можно предположить, что $u \neq x_1^d$ и $v \neq x_n^d$. Тогда $I = \mathcal{R}(x_1^{d-p}x_n^p, x_{n-1}^{d-p}x_n^p)$ при некотором $0 < p < d$. Несложно проверить, что I изоморфен как S -модуль начальному обратнo-лекссегментному идеалу, порожденному множеством $\mathcal{R}(x_1^{d-p}, x_{n-1}^{d-p}) = \mathcal{R}^i(x_{n-1}^{d-p})$; тогда, согласно пункту (1), у I имеется линейная резольвента.

(3) Чтобы доказать, что у I имеется линейная резольвента, достаточно показать, что гомоморфизм

$$\varphi: T_{s+1}(J) \oplus T_{s+1}(K) \rightarrow T_{s+1}(L)$$

из (3.1) является сюръективным. Здесь через L обозначен идеал в S , порожденный всеми мономами степени d в S .

Согласно [8] классы гомологий циклов $w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$, где $w \in M_d$ и $1 \leq m(w) < i_2 < \cdots < i_s \leq n$, образуют базис в $T_{s+1}(L)$. Ясно, что если $w \in \mathcal{R}^f(u)$, то $w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$ лежит в образе отображения φ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} d(w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}) \\ = w''x_{m(w)}e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s} + \sum_{j=2}^s \pm w''x_{i_j}e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{j-1}} \wedge e_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}. \end{aligned}$$

Значит, если $w \in \mathcal{R}^i(v) \setminus \mathcal{R}^f(u)$ и $i_s \neq n$, то $w''x_{i_j} \in \mathcal{R}^i(v)$, для всех i_j , и поэтому $w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$ — это цикл, класс гомологий которого принадлежит $T_{s+1}(J)$. Значит, $[w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}] \in \text{im } \varphi$.

Значит, для того чтобы доказать, что отображение φ сюръективно, остается показать, что все элементы вида $[w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_n]$, где $w > u$, принадлежат $\text{im } \varphi$.

Согласно предположению существует такой элемент $z \in \mathcal{R}^i(v)$, что $w = zx_{m(w)}/x_n$. Значит, $M(z) = n$. Поскольку $z \neq x_n^d$, отсюда следует, что $m(z) \leq m(w)$. Значит,

$$w'' = \frac{w}{x_{m(w)}} = \frac{(zx_{m(w)}/x_n)}{x_{m(w)}} = \frac{z}{x_n} = \frac{z}{x_{M(z)}} = z'.$$

Поэтому

$$w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_n = z'e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{M(z)}$$

является классическим циклом. Значит,

$$[w''e_{m(w)} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_n] \in \text{im } \varphi,$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В случаях (1) и (2) I является вполне обратно-лекссегментным идеалом. Однако не у всех вполне обратно-лекссегментных идеалов есть линейные резольвенты. Например, идеал $I = (\mathcal{R}(x_2^2, x_1x_3))$ в $S = k[x_1, x_2, x_3]$ (см. пример 2.10) является вполне обратно-лекссегментным идеалом, но линейной резольвенты у него нет. Минимальная градуированная свободная S -резольвента идеала I выглядит так:

$$0 \rightarrow S(-4) \rightarrow S^2(-2) \rightarrow I \rightarrow 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В теореме 4.1 мы приводим достаточные условия, для того чтобы у идеала, порожденного вполне обратно-лекссегментом, была бы линейная резольвента. В работе [11] мы укажем некоторые характеристики вполне обратно-лекссегментных идеалов, обладающих линейными резольвентами. Другими словами, будут описаны все вполне обратно-лекссегментные идеалы с линейными резольвентами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Hulett, H. M. Martin, “Betti numbers of lex-segment ideals”, *J. Algebra*, **275**:2 (2004), 629–638.
- [2] A. Aramova, E. De Negri, J. Herzog, “Lexsegment ideals with linear resolution”, *Illinois J. Math.*, **42**:3 (1998), 509–523.
- [3] E. De Negri, J. Herzog, “Completely lexsegment ideals”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:12 (1998), 3467–3473.
- [4] F. S. Macaulay, “Some properties of enumerations in the theory of modular systems”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **26**:1 (1927), 531–555.
- [5] D. Bayer, M. Stillman, “A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order”, *Duke Math. J.*, **55**:2 (1987), 321–328.
- [6] D. Bayer, M. Stillman, “A criterion for detecting m -regularity”, *Invent. Math.*, **87**:1 (1987), 1–11.
- [7] T. Deery, “Rev-lex segment ideals and minimal Betti numbers”, *The Curves Seminar at Queen's*. v. X (Kingston, ON, 1995), Queen’s Papers in Pure and Appl. Math., **102**, Queen’s Univ., Kingston, ON, 1996, 193–219.
- [8] A. Aramova, J. Herzog, “Koszul cycles and Eliahou–Kervaire type resolutions”, *J. Algebra*, **181**:2 (1996), 347–370.
- [9] S. Eliahou, M. Kervaire, “Minimal resolutions of some monomial ideals”, *J. Algebra*, **129**:1 (1990), 1–25.
- [10] D. Eisenbud, *Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [11] M. Crupi, M. La Barbiera, *Minimal Graded Resolutions of Reverse Lexsegment Ideals*, Preprint, 2009.

М. Круппи

University of Messina, Italy

E-mail: mcrupi@unime.it

Поступило

21.09.2009

М. Ла Барбьера

University of Messina, Italy

E-mail: monicalb@libero.it