Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веснин, Д. Реповш, Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 12–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8922>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:03:29

Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников

А. Ю. Веснин, Д. Реповш

Для компактного прямоугольного многогранника R в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ обозначим через $\text{vol}(R)$ его объем, а через $\text{vert}(R)$ – число вершин. Верхние и нижние оценки величины $\text{vol}(R)$ в терминах $\text{vert}(R)$ были недавно получены Аткинсоном. Строя 2-параметрическое семейство многогранников, мы показываем, что асимптотическая верхняя оценка $5v_3/8$, где v_3 – объем правильного идеального тетраэдра в $\mathbb{H}^3$, является двойной предельной точкой для отношений $\text{vol}(R)/\text{vert}(R)$. Более того, мы улучшаем нижнюю оценку для случая $\text{vert}(R) \leq 56$.

Библиография: 12 названий.

1. Прямоугольные многогранники в трехмерном пространстве Лобачевского. В каждом из возможных геометрических пространств прямоугольные многогранники являются весьма удобными “строительными блоками” для различных геометрических конструкций. Мы будем рассматривать многогранники в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. Необходимые и достаточные условия, при которых многогранник заданного комбинаторного типа реализуется как компактный выпуклый прямоугольный многогранник в $\mathbb{H}^3$, были описаны Погореловым в 1967 г. в самом первом номере “Математических заметок” [1]. Простейшим из компактных прямоугольных гиперболических многогранников является додекаэдр со всеми двугранными углами $\pi/2$ (а следовательно, и всеми плоскими углами $\pi/2$). Как и было бы естественно ожидать, такие многогранники играют весьма полезную роль при построении гиперболических 3-многообразий. Так, можно попытаться построить гиперболическое 3-многообразие, используя прямоугольный многогранник как его фундаментальный многогранник. Или же можно построить такое гиперболическое 3-многообразие, что его фундаментальная группа является подгруппой без кручения в группе Коксетера, порожденной отражениями в гранях прямоугольного многогранника [2]. Ниже мы рассматриваем только компактные многогранники, т.е. многогранники, не имеющие идеальных вершин.

Начнем с формулировок двух недавних результатов. Иноуэ в [3] ввел две операции на прямоугольных многогранниках, названные им *декомпозиция* и *реберная*

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00255) и интеграционного гранта СО РАН – УрО РАН. Работа второго автора выполнена при поддержке грантов P1-0292-0101, J1-9643-0101 и J1-2057-0101 Исследовательского агентства Словении.

хирургия, и доказал, что многогранники Лёбелля (которые мы подробно обсудим ниже) являются универсальными в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 1 [3; теорема 9.1]. Пусть P_0 – компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Тогда существует последовательность объединений попарно непересекающихся прямоугольных гиперболических многогранников $P_1, \dots, P_k$ такая, что для $i = 1, \dots, k$ P_i получено из P_{i-1} операцией декомпозиции или операцией реберной хирургии, а P_k – множество многогранников Лёбелля. При этом

$$\text{vol}(P_0) \geq \text{vol}(P_1) \geq \text{vol}(P_2) \geq \dots \geq \text{vol}(P_k).$$

Аткинсон [4] оценил объем прямоугольного многогранника в терминах числа его вершин следующим образом.

ТЕОРЕМА 2 [4; теорема 2.3]. Если P – компактный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами, то

$$(V - 2) \cdot \frac{v_8}{32} \leq \text{vol}(P) < (V - 10) \cdot \frac{5v_3}{8},$$

где v_8 – объем правильного идеального октаэдра, а v_3 – объем правильного идеального тетраэдра. Существует последовательность компактных многогранников P_i , где P_i имеет V_i вершин таких, что $\text{vol}(P_i)/V_i$ стремится к $5v_3/8$ при i стремящемся к бесконечности.

Семейство многогранников P_i , предложенное Аткинсоном, описано в доказательстве [4; предложение 6.4].

В этой заметке мы покажем, что многогранники Лёбелля могут служить в качестве подходящего семейства, на котором реализуется верхняя оценка. Тем самым, многогранники Лёбелля играют важную роль не только в теореме 1, но и в теореме 2.

Обозначим через $\text{vert}(R)$ число вершин прямоугольного многогранника R . Следующий результат показывает, что величина $5v_3/8$ является двойной предельной точкой в том смысле, что она является предельной точкой для предельных точек последовательностей отношений $\text{vol}(R)/\text{vert}(R)$.

ТЕОРЕМА 3. Для любого целого $k \geq 1$ существует последовательность компактных прямоугольных гиперболических многогранников $R_k(n)$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_k(n))}{\text{vert}(R_k(n))} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_3}{8}.$$

Как будет видно из доказательства, многогранники $R_1(n)$ являются многогранниками Лёбелля, а многогранники $R_k(n)$, $k > 1$, – башнями, составленными из них.

Кроме того, в следствии 4 мы улучшим нижние оценки из теоремы 2 в случае, когда $\text{vert}(R) \leq 56$.

2. Многогранники и многообразия Лёбелля. Многогранники Лёбелля были введены в [2] как обобщение прямоугольного 14-гранника, использовавшегося в работе [5].

Напомним, что давая положительный ответ на вопрос о существовании пространственных форм Клиффорда–Клейна (т.е. замкнутых многообразий) постоянной отрицательной кривизны, Лёбелль [5] построил в 1931 г. первый пример замкнутого

ориентируемого гиперболического 3-многообразия. Это многообразие было получено склеиванием восьми экземпляров прямоугольного 14-гранника (обозначенного через $R(6)$ и изображенного на рис. 1). Его верхнее и нижнее основания являются правильными шестиугольниками, а боковая поверхность образована 12 пятиугольниками, расположенными аналогично боковой поверхности додекаэдра. Очевидно, $R(6)$ можно воспринимать как обобщение прямоугольного додекаэдра при замене пятиугольных верхнего и нижнего оснований шестиугольными.

Как показано в [2], додекаэдр и многогранник $R(6)$ являются элементами следующего семейства многогранников. Для каждого $n \geq 5$ рассмотрим прямоугольный многогранник $R(n)$ в $\mathbb{H}^3$, имеющий $(2n+2)$ граней, две из которых (рассматриваемые как его верхнее и нижнее основания) являются правильными n -угольниками. Его боковая поверхность образована $2n$ пятиугольниками, расположенными по аналогии с пятиугольниками на боковой поверхности додекаэдра. В частности, $R(5)$ – это прямоугольный додекаэдр (см. рис. 1). Существование многогранников $R(n)$ в $\mathbb{H}^3$ легко устанавливается благодаря теореме Погорелова [1] или теореме Андреева [6].

Рис. 1. Многогранники $R(6)$ и $R(5)$

Подход, предложенный в [2], позволяет строить как ориентируемые, так и неориентируемые замкнутые гиперболические 3-многообразия из восьми экземпляров любого компактного прямоугольного гиперболического многогранника. А именно, каждая раскраска граней прямоугольного многогранника в четыре цвета такая, что никакие две грани одного цвета не имеют общее ребро, задает состоящую из сохраняющих ориентацию изометрий подгруппу без кручения индекса восемь в группе Коксетера исходного многогранника.

Таким образом, каждая четырехцветная раскраска задает ориентируемое гиперболическое 3-многообразие, получаемое из восьми экземпляров прямоугольного многогранника. Этот подход также позволяет строить неориентируемые гиперболические 3-многообразия, но при этом требуется от пяти до семи цветов.

В [2] отмечено, что многообразие, построенное Лёбеллем в 1931 г., может быть задано четырехцветной раскраской многогранника $R(6)$. Кроме того, для каждого $n \geq 5$ явно указаны примеры как ориентируемых, так и неориентируемых многообразий, строящихся из восьми экземпляров $R(n)$. Замкнутые ориентируемые гиперболические 3-многообразия, кодируемые четырехцветными раскрасками многогранников $R(n)$, $n \geq 5$, получили название *многообразия Лёбелля*. (Отметим, что для заданного n число таких многообразий может быть отлично от единицы.) Многогранники $R(n)$ естественно называть *многогранниками Лёбелля*.

Свойства многообразий Лёбелля изучались довольно интенсивно: точные формулы объемов получены в [7] и [8]; инвариантные поля следов фундаментальных групп многообразий и их арифметичность были численно исследованы в [9]; в [10] многие многообразия описаны как двулистные разветвленные накрытия 3-сферы; двусторонние оценки сложности многообразий Лёбелля получены в [11], [12].

Для выражения объемов гиперболических многогранников традиционно используется восходящая к работе Лобачевского 1832 г. следующая *функция Лобачевского*:

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \log |2 \sin(t)| dt.$$

Поскольку каждое многообразие Лёбелля, соответствующее параметру n , получается склеиванием изометриями восьми экземпляров многогранников $R(n)$, формула объема многообразий Лёбелля, установленная в [7], влечет следующую формулу для $\text{vol}(R(n))$.

ТЕОРЕМА 4. *Для всех $n \geq 5$ имеет место формула*

$$\text{vol}(R(n)) = \frac{n}{2} \left(2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_n\right) \right),$$

где

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2 \cos(\pi/n)}\right).$$

Легко проверить, что $\theta_n \rightarrow \pi/6$ и

$$\frac{\text{vol}(R(n))}{n} \rightarrow \frac{5v_3}{4}$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь мы воспользовались тем, что $v_3 = 3\Lambda(\pi/3) = 2\Lambda(\pi/6)$. Более того, асимптотическое поведение объемов многообразий Лёбелля было установлено в [12; предложение 2.10]. Отсюда легко следует описание асимптотического поведения $\text{vol}(R(n))$ при n стремящемся к бесконечности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Следующие неравенства имеют место для достаточно больших n :*

$$\frac{5v_3}{4} \cdot n - \frac{17v_3}{2n} < \text{vol}(R(n)) < \frac{5v_3}{4} \cdot n.$$

Поскольку $\text{vert}(R(n)) = 4n$, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Следующие неравенства имеют место для достаточно больших n :*

$$\frac{5v_3}{16} - \frac{17v_3}{8n^2} < \frac{\text{vol}(R(n))}{\text{vert}(R(n))} < \frac{5v_3}{16}.$$

3. Доказательство теоремы 3. Мы будем использовать многогранники Лёбелля $R(n)$ как блоки для построения прямоугольных многогранников с нужными свойствами. Представим многогранник $R(n)$ его боковой поверхностью, как это сделано на рис. 2 для многогранников $R(6)$ и $R(5)$, подразумевая, что левый и правый края должны быть отождествлены.

Рис. 2. Многогранники $R(6)$ и $R(5)$ Рис. 3. Многогранник $R_3(6)$

Для целого $k \geq 1$ обозначим через $R_k(n)$ многогранник построенный из k экземпляров многогранника $R(n)$ склеиванием их по n -угольным граням подобно башне. В частности, $R_1(n) = R(n)$. Многогранник $R_3(6)$ представлен на рис. 3.

Очевидно, $R_k(n)$ является прямоугольным многогранником с n -угольными верхним и нижним основаниями и боковой поверхностью, образованной $2n$ пятиугольниками и $(k-1) \cdot n$ шестиугольниками.

Поскольку $\text{vol}(R_k(n)) = k \cdot \text{vol}(R(n))$, предложение 1 влечет, что для достаточно больших n выполнено

$$k \cdot \frac{5v_3}{4} \cdot n - k \cdot \frac{17v_3}{2n} < \text{vol}(R_k(n)) < k \cdot \frac{5v_3}{4} \cdot n.$$

Поскольку $\text{vert } R_k(n) = (2k+2)n$, получаем

$$\frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_3}{8} - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{17v_3}{4n^2} < \frac{\text{vol}(R_k(n))}{\text{vert}(R_k(n))} < \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_3}{8}.$$

Таким образом, семейство прямоугольных многогранников $R_k(n)$ таково, что для каждого целого $k \geq 1$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_k(n))}{\text{vert}(R_k(n))} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_3}{8},$$

и верхняя оценка $5v_3/8$ является двойной предельной точкой в том смысле, что она является предельной точкой для указанных выше предельных точек при $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_k(n))}{\text{vert}(R_k(n))} = \frac{5v_3}{8}.$$

Таким образом, теорема доказана.

4. Другие оценки объемов. Поскольку 1-скелет прямоугольного компактного гиперболического многогранника P является трехвалентным плоским графом, из формулы Эйлера для многогранника следует, что

$$V = 2F - 4,$$

где V – число вершин многогранника P , а F – число его граней. Более того, из формулы Эйлера следует, что P имеет, по крайней мере, 12 граней (это число граней соответствует додекаэдру). Таким образом, теорема 2 влечет следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть P – компактный прямоугольный гиперболический многогранник с F гранями. Тогда

$$(F - 3) \cdot \frac{v_8}{16} \leq \text{vol}(P) < (F - 7) \cdot \frac{5v_3}{4}.$$

Напомним, что константы v_3 и v_8 имеют следующий вид:

$$v_3 = 3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.0149416064096535\dots,$$

$$v_8 = 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.663862376708876\dots$$

Поскольку площадь прямоугольного n -угольника равна $\pi/2 \cdot (n - 4)$, площадь боковой поверхности компактного прямоугольного гиперболического многогранника P с F гранями равна $\pi \cdot (F - 6)$. Таким образом, следствие 2 влечет следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть P – компактный прямоугольный гиперболический многогранник, площадь боковой поверхности которого равна S . Тогда

$$\left(\frac{S}{\pi} + 3\right) \cdot \frac{v_8}{16} \leq \text{vol}(P) < \left(\frac{S}{\pi} - 1\right) \cdot \frac{5v_3}{4}.$$

Отметим, что теорема 4 может быть использована для доказательства того, что функция объема $\text{vol}(R(n))$ является монотонно возрастающей функцией от n (см. доказательства в [2] или [12]), и для вычисления объемов многогранников Лёбелля. В частности,

$$\text{vol}(R(5)) = 4.306\dots, \quad \text{vol}(R(6)) = 6.203\dots, \quad \text{vol}(R(7)) = 7.563\dots$$

Вместе с теоремой 1 это влечет, что прямоугольным гиперболическим многогранником наименьшего объема является $R(5)$ (додекаэдр), а вторым по объему является многогранник $R(6)$. Так, если P – компактный прямоугольный гиперболический многогранник, отличный от додекаэдра, то

$$\text{vol}(P) \geq 6.203\dots$$

Таким образом, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть P – компактный прямоугольный гиперболический многогранник, отличный от додекаэдра, имеющий V вершин и F граней. Тогда

$$\text{vol}(P) \geq \max\left\{(V - 2) \cdot \frac{v_8}{32}, 6.203\dots\right\}, \quad \text{vol}(P) \geq \max\left\{(F - 3) \cdot \frac{v_8}{16}, 6.203\dots\right\}.$$

Оценки из следствия 4 улучшают нижние оценки из теоремы 2 для $V \leq 56$ и нижние оценки из следствия 2 для $F \leq 30$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Погорелов, “О правильном разбиении пространства Лобачевского”, *Матем. заметки*, **1**:1 (1967), 3–8.
- [2] А. Ю. Веснин, “Трёхмерные гиперболические многообразия типа Лебелля”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:5 (1987), 50–53.
- [3] T. Inoue, “Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra”, *Algebr. Geom. Topol.*, **8**:3 (2008), 1523–1565.
- [4] C. K. Atkinson, “Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra”, *Algebr. Geom. Topol.*, **9**:2 (2009), 1225–1254.
- [5] F. Löbell, “Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford–Kleinscher Räume negativer Krümmung”, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig*, **83** (1931), 167–174.
- [6] Е. М. Андреев, “О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского”, *Матем. сб.*, **81**:3 (1970), 445–478.
- [7] А. Ю. Веснин, “Объёмы трёхмерных гиперболических многообразий Лебелля”, *Матем. заметки*, **64**:1 (1998), 17–23.
- [8] A. D. Mednykh, A. Yu. Vesnin, “Löbell manifolds revised”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **4** (2007), 605–609.
- [9] O. Antolín-Camarena, G. R. Maloney, R. K. W. Roeder, “Computing arithmetic invariants for hyperbolic reflection groups”, *Complex Dynamics. Families and Friends*, A. K. Peters, Wellesley, MA, 2008, 597–631.
- [10] А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, “Трёхмерные гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы графы”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:4 (1999), 745–763.
- [11] А. Ю. Веснин, С. В. Матвеев, К. Петронио, “Двусторонние оценки сложности многообразий Лёбелля”, *Докл. РАН*, **416**:3 (2007), 295–297.
- [12] S. Matveev, C. Petronio, A. Vesnin, “Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds”, *J. Aust. Math. Soc.*, **86**:2 (2009), 205–219.

А. Ю. Веснин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск

E-mail: vesnin@math.nsc.ru

Поступило

29.12.2009

Д. Реповш

University of Ljubljana, Словения

E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si