Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Быков, Решетки в одномерном кватернионном линейном пространстве, инвариантные относительно конечных линейных групп, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 122–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:52:48

Решетки в одномерном кватернионном линейном пространстве, инвариантные относительно конечных линейных групп

Ю. В. Быков

Введение. Пусть $\mathbb{H}$ – тело кватернионов над $\mathbb{R}$, порожденное такими элементами i, j, k , что

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Мы отождествляем $\mathbb{C}$ с подполем $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ в $\mathbb{H}$.

Пусть V – правое n -мерное линейное пространство над $\mathbb{H}$. Элемент конечного порядка из $\mathrm{GL}(V)$ называется *отражением*, если пространство его неподвижных точек $(n-1)$ -мерно. Все конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(V)$, порожденные отражениями, классифицированы в [1]. Имея в виду перенесение на кватернионный случай методов полученной в [2] классификации дискретных групп, порожденных аффинными эрмитовыми отражениями, мы приходим к задаче об описании с точностью до подобия (т.е. умножения на ненулевой элемент из $\mathbb{H}$) решеток в V , инвариантных относительно таких конечных подгрупп в $\mathrm{GL}(V)$, которые порождены отражениями (под *решеткой* мы понимаем свободную подгруппу ранга $4n$ в аддитивной группе V). В этой заметке такое описание дано при $n = 1$. Оно существенно используется в исследовании общего случая, который будет рассмотрен отдельно.

Итак, далее мы считаем, что V – это $\mathbb{H}$ с умножением на константы справа, $\mathrm{End}(V)$ – это $\mathbb{H}$, действующее на V умножением слева, а $\mathrm{GL}(V)$ – мультипликативная группа $\mathbb{H}^*$ тела $\mathbb{H}$. Все неединичные элементы конечного порядка из $\mathbb{H}^*$ являются отражениями. Описание конечных подгрупп в $\mathbb{H}^*$ хорошо известно (см., например, [3]) и состоит в следующем (ниже через $\langle M \rangle$ обозначается подгруппа группы G , порожденная подмножеством $M \subseteq G$):

Предложение 1. *С точностью до сопряженности конечные подгруппы в $\mathbb{H}^*$ исчерпываются следующим списком попарно несопряженных подгрупп:*

- $\mathbf{C}_m = \langle \varepsilon_m \rangle$, где $\varepsilon_m = e^{2\pi i/m}$ – циклическая группа порядка m ;
- $\mathbf{D}_m = \langle \mathbf{C}_{2m}, k \rangle$ – бинарная диэдральная группа порядка $4m$;
- $\mathbf{T} = \langle \mathbf{D}_2, \omega \rangle$, где $\omega = (-1 + i + j + k)/2$ – бинарная тетраэдральная группа порядка 24;
- $\mathbf{O} = \langle \mathbf{T}, \alpha \rangle$, где $\alpha = (i - 1)/\sqrt{2}$ – бинарная октаэдральная группа порядка 48;
- $\mathbf{I} = \langle \mathbf{D}_2, \beta \rangle$, где $\beta = \cos(\pi/5) + \cos(3\pi/5)i - j/2$ – бинарная икосаэдральная группа порядка 120.

Далее обозначения из предложения 1 используются без напоминаний.

Инвариантные решетки.

Предложение 2. (i) $\mathbf{C}_m$ -инвариантные решетки в V существуют только при $m = 1, 2, 3, 4$ и 6.

(i) При $m = 1, 2$ любая решетка в V является $\mathbf{C}_m$ -инвариантной.

(iii) Если $m = 3, 4, 6$, то с точностью до подобия множество $\mathbf{C}_m$ -инвариантных решеток в V совпадает с множеством всех подгрупп вида

$$(\mathbb{Z} + \varepsilon_m \mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_m \mathbb{Z})\nu, \quad (1)$$

где 1 и $\nu \in \mathbb{H}$ линейно независимы над $\mathbb{C}$ относительно умножения слева, а норма любого ненулевого элемента из подгруппы (1) не меньше 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим V как 4-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$. В базисе $1, i, j, k$ матрица линейного оператора ε_m имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \end{pmatrix}.$$

Значит, след этого оператора равен $4 \cos(2\pi/m)$. Допустим, что в V имеется $\mathbf{C}_m$ -инвариантная решетка Γ . Любой ее базис является и базисом V над $\mathbb{R}$. Ввиду $\mathbf{C}_m$ -инвариантности Γ матрица оператора ε_m в таком базисе целочисленна. Поэтому след этого оператора является целым числом. Значит, если $\mathbf{C}_m$ -инвариантная решетка в V существует, то $4 \cos(2\pi/m) \in \mathbb{Z}$. Отсюда легко следует утверждение (i).

(ii) Утверждение (ii) очевидно.

(iii) Ясно, что подгруппа (1) при любом m является $\mathbf{C}_m$ -инвариантной, и при $m = 3, 4, 6$ она является решеткой в V . Любая $\mathbf{C}_m$ -инвариантная решетка Γ в V является конечно порожденным модулем без кручения над кольцом $\mathbb{Z}[\varepsilon_m] = \mathbb{Z} + \varepsilon_m \mathbb{Z}$ относительно умножения слева. Пусть $m = 3, 4, 6$. Тогда это кольцо является кольцом главных идеалов [4; I, § 4], а потому Γ – свободный $\mathbb{Z}[\varepsilon_m]$ -модуль. Поскольку $\text{rk}_{\mathbb{Z}}(\Gamma) = 4$, а $\text{rk}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\varepsilon_m]) = 2$, ранг этого модуля равен 2. Элементы любого его базиса линейно независимы над $\mathbb{C}$ относительно умножения слева, так как линейная оболочка Γ над $\mathbb{R}$ (а потому и над $\mathbb{C}$) совпадает с V . Используя мультипликативность нормы и то, что норма любого ненулевого элемента из $\mathbb{Z}[\varepsilon_m]$ не меньше 1, из известной теоремы о свободных модулях над кольцами главных идеалов [5; XV, § 2, теорема 5] мы выводим, что всякий ненулевой элемент $\gamma \in \Gamma$ минимальной нормы включается в базис $\mathbb{Z}[\varepsilon_m]$ -модуля Γ . Тогда $\Gamma\gamma^{-1}$ – решетка вида (1). Это доказывает утверждение (iii).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (i) Если в V существует решетка, инвариантная относительно нециклической группы $\mathbf{D}_m$, то $m = 2$ или 3.

(ii) С точностью до подобия следующими двумя решетками исчерпываются все $\mathbf{D}_2$ -инвариантные решетки в V :

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} + j\mathbb{Z} + k\mathbb{Z}, \quad (2)$$

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} + j\mathbb{Z} + \left(\frac{1+i+j+k}{2}\right)\mathbb{Z}. \quad (3)$$

(iii) С точностью до подобия единственной $\mathbf{D}_3$ -инвариантной решеткой в V является

$$(\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z})k. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\mathbf{D}_m$ -инвариантные решетки $\mathbf{C}_{2m}$ -инвариантны, так как $\mathbf{C}_{2m} \subset \mathbf{D}_m$. Отсюда и из предложения 2 вытекает утверждение (i) (так как $\mathbf{D}_1$ циклическая).

(ii) Из $\mathbf{D}_2 = \langle \mathbf{C}_4, k \rangle$ и предложения 2 следует, что если $\mathbf{D}_2$ -инвариантная решетка в V существует, то она подобна решетке

$$(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})\nu, \quad (5)$$

где 1 и ν линейно независимы над $\mathbb{C}$ относительно умножения слева, а $\mathbf{D}_2$ -инвариантность решетки (5) эквивалентна условию

$$k((\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})\nu) \subseteq (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})\nu. \quad (6)$$

Выясним, при каком ν выполнено (6). Пусть $\nu = a + ib + jc + kd$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Заменяя ν на его сумму с подходящим элементом из $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, без ограничения общности можно считать, что

$$|a| \leq \frac{1}{2}, \quad |b| \leq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Условие (6) записывается в виде

$$(k\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}) + ((ak + bj - ci - d)\mathbb{Z} + (aj - bk - c + di)\mathbb{Z}) \\ \subseteq (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})(a + bi + cj + dk).$$

Поэтому оно эквивалентно тому, что для любых $(A, B, C, D) \in \mathbb{Z}^4$ следующая система уравнений относительно X, Y, Z, W

$$\begin{cases} A + Ca - Db = -Zd - Wc, \\ B + Cb + Da = -Zc + Wd, \\ Cc - Dd = Y + Zb + Wa, \\ Cd + Dc = X + Za - Wb \end{cases} \quad (8)$$

имеет целочисленное решение. Предположим, что система (8) обладает этим свойством, и исследуем, какими могут быть a, b, c, d .

Положим $B = C = D = 0, A = -1$. Из первого равенства системы (8) следует $c^2 + d^2 \neq 0$. Легко видеть, что в этом случае (8) имеет единственное решение

$$\begin{cases} X = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}, \\ Y = \frac{-bd - ac}{c^2 + d^2}, \\ Z = \frac{d}{c^2 + d^2}, \\ W = \frac{c}{c^2 + d^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Поскольку $|\nu| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \geq 1$ (см. предложение 2 (iii)), из (7) следует $c^2 + d^2 \geq 1/2$, откуда $0 < Z^2 + W^2 \leq 2$, так как $Z^2 + W^2 = 1/(c^2 + d^2)$. Значит, $Z^2 + W^2 = 1$ или 2 , поскольку Z и W – целые числа.

Если $Z^2 + W^2 = 1$, то $c^2 + d^2 = 1$ и либо $Z = \pm 1, W = 0$, либо $Z = 0, W = \pm 1$. Из двух последних равенств (9) следует тогда, что либо $c = 0, d = \pm 1$, либо $c = \pm 1, d = 0$. Поскольку X и Y – целые числа, из первых двух равенств (9) следует, что и a, b целые. Ввиду (7) получаем $a = b = 0$. Значит, $\nu = \pm j$ или $\pm k$. Ясно, что при таком ν решетка (5) совпадает с решеткой (2). Отметим также, что, ввиду предложения 2 (iii), последнее показывает $\mathbf{C}_4$ -инвариантность решетки (2), а значит, и $\mathbf{D}_2$ -инвариантность, так как ее k -инвариантность очевидна.

Если же $Z^2 + W^2 = 2$, то $c^2 + d^2 = 1/2$ и $|Z| = |W| = 1$. Из последних двух равенств (9) следует тогда, что $|c| = |d| = 1/2$, а из первых двух, с учетом целочисленности X и Y и условий (7) и $|\nu| \geq 1$, следует, что $|a| = |b| = 1/2$. Заменяя ν (в зависимости от знаков c и d) на $\pm \nu$ или $\pm i\nu$, можно считать, не меняя решетки (5), что $c = d = 1/2$. Заменяя затем элемент ν на его сумму с подходящим элементом из $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, можно считать, не меняя решетки (5), что $\nu = (1 + i + j + k)/2$. Легко видеть, что при таком ν решетка (5) совпадает с решеткой (3). Отметим также, что ввиду предложения 2 (iii) последнее показывает $\mathbf{C}_4$ -инвариантность решетки (3). Поскольку, как нетрудно проверить, эта решетка k -инвариантна, это показывает, что она и $\mathbf{D}_2$ -инвариантна. Это завершает доказательство утверждения (ii).

(iii) Из $\mathbf{D}_3 = \langle \mathbf{C}_6, k \rangle$ и предложения 2 (iii) следует, что если $\mathbf{D}_3$ -инвариантная решетка в V существует, то она подобна решетке

$$(\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z})\nu, \quad (10)$$

для которой

$$k((\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z})\nu) \subseteq (\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_6\mathbb{Z})\nu,$$

или, эквивалентно,

$$(\mathbb{Z} + \varepsilon_6 \mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_6 \mathbb{Z})\nu \subseteq k((\mathbb{Z} + \varepsilon_6 \mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} + \varepsilon_6 \mathbb{Z})\nu). \quad (11)$$

Выясним, при каком ν выполнено (11). Пусть $\nu = a + ib + jc + kd$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Поскольку $\varepsilon_6 = (1 + i\sqrt{3})/2$, заменяя элемент ν на его сумму с подходящим элементом из $\mathbb{Z} + \varepsilon_6 \mathbb{Z}$, без ограничения общности можно считать, что выполнено условие

$$|a| \leq \frac{1}{2}, \quad |b| \leq \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (12)$$

Условие (11) записывается в виде условия

$$\begin{aligned} k\mathbb{Z} + \left(\frac{j\sqrt{3}+k}{2}\right)\mathbb{Z} + (-d-ic+jb+ka)\mathbb{Z} + \left(\frac{ka+jb-ic-d}{2} + (ja-kb-c+id)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{Z} \\ \supseteq \mathbb{Z} + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{Z} + (a+ib+jc+kd)\mathbb{Z} \\ + \left(\frac{a+ib+jc+kd}{2} + (-b+ia+ck-jd)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

которое, в свою очередь, эквивалентно тому, что для любых $(A, B, C, D) \in \mathbb{Z}^4$ следующая система уравнений относительно X, Y, Z, W

$$\begin{cases} -Cd - \frac{D(d+\sqrt{3}c)}{2} = X + \frac{Y}{2} + Za + \frac{W(a-\sqrt{3}b)}{2}, \\ -Cc - \frac{D(c-\sqrt{3}d)}{2} = \frac{\sqrt{3}Y}{2} + Zb + \frac{W(b+\sqrt{3}a)}{2}, \\ \frac{\sqrt{3}B}{2} + Cb + \frac{D(b+\sqrt{3}a)}{2} = Zc + \frac{W(c-\sqrt{3}d)}{2}, \\ A + \frac{B}{2} + Ca + \frac{D(a-\sqrt{3}b)}{2} = Zd + \frac{W(d+\sqrt{3}c)}{2} \end{cases} \quad (13)$$

имеет целочисленное решение. Предположим, что эта система обладает указанным свойством, и исследуем, какими могут быть a, b, c, d . Заметим, что из $|\nu| \geq 1$ и (12) следует неравенство

$$c^2 + d^2 \geq \frac{9}{16}. \quad (14)$$

Положим далее $A = 1, B = C = D = 0$. Тогда из последних двух уравнений системы (13) мы получаем, что

$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{3}W}{2(Z^2 + ZW + W^2)}, \\ d = \frac{2Z + W}{2(Z^2 + ZW + W^2)}, \end{cases} \quad (15)$$

откуда следует равенство $c^2 + d^2 = 1/(Z^2 + ZW + W^2)$. Поскольку Z и W – целые числа, из этого равенства и (14) легко вывести, что $(Z, W) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ или $(\pm 1, \mp 1)$. Рассмотрим каждую из этих возможностей отдельно.

Пусть $(Z, W) = (0, 1)$. Тогда из (15) следует, что $c = \sqrt{3}/2, d = 1/2$, а из первых двух уравнений системы (13) – что $a = -Y - X/2, b = (4Y + X)\sqrt{3}/2$. Поскольку X и Y – целые числа, отсюда и из (12) следует, что $a = b = 0$. Итак, в этом случае $\nu = (j\sqrt{3}+k)/2 = \varepsilon_6^5 k$.

В остальных случаях аналогичное рассуждение дает следующее.

Если $(Z, W) = (0, -1)$, то $c = -\sqrt{3}/2, d = -1/2, a = Y + X/2, b = -X\sqrt{3}/2$, откуда $a = b = 0$ и, значит, $\nu = -(j\sqrt{3}+k)/2 = \varepsilon_6^2 k$.

Если $(Z, W) = (1, 0)$, то $c = 0$, $d = 1$, $a = -X - Y/2$, $b = -Y\sqrt{3}/2$, откуда $a = b = 0$ и, значит, $\nu = k$.

Если $(Z, W) = (-1, 0)$, то $c = 0$, $d = -1$, $a = X + Y/2$, $b = Y\sqrt{3}/2$, откуда $a = b = 0$ и, значит, $\nu = -k$.

Если $(Z, W) = (1, -1)$, то $c = -\sqrt{3}/2$, $d = 1/2$, $a = (-X + Y)/2$, $b = (-3X + Y)\sqrt{3}/2$, откуда $a = b = 0$ и, значит, $\nu = (-j\sqrt{3} + k)/2 = \varepsilon_6 k$.

Если $(Z, W) = (-1, 1)$, то $c = \sqrt{3}/2$, $d = -1/2$, $a = (X - Y)/2$, $b = (X + Y)\sqrt{3}/2$, откуда $a = b = 0$ и, значит, $\nu = (j\sqrt{3} - k)/2 = \varepsilon_6^4 k$.

Ясно, что в каждом из этих случаев при найденном значении ν решетка (10) совпадает с решеткой (4).

Чтобы завершить доказательство утверждения (iii), остается заметить, что решетка (4) является $\mathbf{C}_6$ -инвариантной в силу предложения 2 (iii) и k -инвариантной ввиду равенства $k\varepsilon_6 = \varepsilon_6^5 k$. Значит, она $\mathbf{D}_3$ -инвариантна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко проверить, что решетка (2) не инвариантна относительно ω и β , а (3) инвариантна относительно ω и не инвариантна относительно α и β .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (i) *С точностью до подобия единственной $\mathbf{T}$ -инвариантной решетки в V является решетка (3).*

(ii) *В V не существует $\mathbf{O}$ -инвариантных решеток.*

(iii) *В V не существует $\mathbf{I}$ -инвариантных решеток.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (iii) следуют из предложения 3, замечания 1 и, соответственно, равенств $\mathbf{T} = \langle \mathbf{D}_2, \omega \rangle$ и $\mathbf{I} = \langle \mathbf{D}_2, \beta \rangle$, а утверждение (ii) – из утверждения (i), замечания 1 и равенства $\mathbf{O} = \langle \mathbf{T}, \alpha \rangle$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. M. Cohen, *J. Algebra*, **64**:2 (1980), 293–324. [2] V. L. Popov, *Discrete Complex Reflection Groups*, Commun. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, **15**, Rijksuniv. Utrecht, Utrecht, 1982. [3] P. Du Val, *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1964. [4] К. Айерлэнд, М. Роузен, *Классическое введение в современную теорию чисел*, Мир, М., 1987. [5] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.

Ю. В. Быков

Московский государственный институт
электроники и математики (технический университет)
E-mail: yurikbykov@mail.ru

Поступило
26.03.2010