Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Катковская, Критерий компактности М. Рисса для пространства измеримых функций, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 134–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:14:35

Критерий компактности М. Рисса для пространства измеримых функций

И. Н. Катковская

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное измеримое подмножество положительной меры Лебега $mX > 0$. Известный критерий Рисса позволяет проверять компактность множеств в $L^p(X)$ в терминах L^p -непрерывности.

ТЕОРЕМА 1. *Множество $S \subset L^p(X)$, $p > 0$, вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и*

$$\lim_{|h| \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \int_X |f(x+h) - f(x)|^p d\mu(x) = 0. \quad (1)$$

При $p \geq 1$ это доказал Рисс [1], а при $0 < p < 1$ – Цуджи [2]. Сдвиг $x+h$ точки $x \in X$ не обязан принадлежать X , поэтому (следуя Колмогорову [3], который поступал так, рассматривая свой критерий компактности в L^p) мы предполагаем ниже, что все функции, заданные на X , продолжены нулем на дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Обозначим через $M(X)$ множество классов эквивалентности измеримых функций на X . Если в $M(X)$ ввести метрику

$$d_M(f, g) = \int_X \varphi_0(f - g) d\mu, \quad \text{где } \varphi_0(t) = \frac{|t|}{1 + |t|},$$

то оно становится полным метрическим пространством и сходимость в $M(X)$ совпадает со сходимостью по мере (см., например, [4; с. 353]).

Целью нашей работы является доказательство аналога критерия Рисса для пространства $M(X)$. Первый критерий полной ограниченности в $M(X)$ доказал М. Фреше [5]: множество $S \subset M(X)$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда оно почти равномерно ограничено и почти равномерно непрерывно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta > 0$ и $\lambda > 0$, что для любой функции $f \in S$ найдется измеримое подмножество $E(f) \subset X$ со свойствами

- а) $\mu E(f) < \varepsilon$;
- б) $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $x, y \in X \setminus E(f)$, $d(x, y) < \delta$;
- в) $|f(x)| \leq \lambda$ при $x \in X \setminus E(f)$.

В [6] было дано более простое доказательство этого утверждения. В [7; с. 426] имеется краткий обзор других работ по этому поводу.

Введем характеристики функций, в терминах которых формулируется наш основной результат. Определим функцию распределения

$$\mu(\lambda, f) = m\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}, \quad \lambda > 0, \quad f \in M(X)$$

(mE – мера Лебега множества E) и модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f)_M = \sup_{0 < |h| < \delta} d_M(f_h, f), \quad \delta > 0,$$

где $f_h(x) = f(x+h)$. Легко видеть, что для каждой функции $f \in M(X)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mu(\lambda, f) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta, f)_M = 0. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 2. Множество $S \subset M(X)$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{f \in S} \omega(\delta, f)_M = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{f \in S} \mu(\lambda, f) = 0. \quad (4)$$

Первое условие (3) аналогично условию (1) из критерия Рисса для пространств L^p . Специфика пространства $M(X)$ состоит в том, что оно является ограниченным множеством, а одного условия (3) недостаточно для полной ограниченности $S \subset M$. Это показывает простой пример $S = \{n : n \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, (4) является адекватной заменой условию ограниченности множества.

Доказательство теоремы 2 использует аналог классического неравенства Джексона для приближения в метрике пространства $M([a, b]^n)$ ступенчатыми функциями.

Под значением $f(x)$ в точке x для (класса эквивалентности) функции $f \in M(X)$ мы будем понимать аппроксимативный предел в этой точке. Тогда эти значения определены почти всюду (см., например, [4; с. 425]).

Нам понадобится следующая лемма, связанная с известным тождеством Ульянова [8; лемма 2]: если $g \in L^1([\alpha, \beta])$ и $g(t, s) = g(s, t)$ при $\alpha \leq t, s \leq \beta$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, s) dt ds = 2 \int_0^{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta-\tau} g(t + \tau, t) dt d\tau, \quad (5)$$

и являющаяся его многомерным обобщением.

ЛЕММА 1. Если $F \in L^1(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \times \prod_{i=1}^n [a_i, b_i])$ и $F(x, y) = F(y, x)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_1}^{b_1} F(x, y) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n \\ &= 2^n \int_0^{b_n-a_n} \int_{a_n}^{b_n-h_n} \dots \int_0^{b_1-a_1} \int_{a_1}^{b_1-h_1} F(x + h, x) dx_1 dh_1 \dots dx_n dh_n. \end{aligned} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательное применение n раз равенства (5) не проходит, так как после первого использования мы теряем симметричность подынтегральной функции.

Мы сначала дадим доказательство тождества (5) (отличное от приведенного в [8; лемма 2]), разбивая его на две части, чтобы видеть, где используется условие симметричности функции g . Запишем интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, s) dt ds &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^s g(t, s) dt ds + \int_{\alpha}^{\beta} \int_s^{\beta} g(t, s) dt ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_t^{\beta} g(t, s) ds dt + \int_{\alpha}^{\beta} \int_s^{\beta} g(t, s) dt ds. \end{aligned}$$

В первом слагаемом справа поменяем обозначения для переменных и используем симметричность функции g ; получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, s) dt ds = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \int_s^{\beta} g(t, s) dt ds. \quad (7)$$

Далее во внутреннем интеграле справа в (7) выполним замену $t = s + \tau$, а затем поменяем порядок интегрирования

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_s^{\beta} g(t, s) dt ds = \int_0^{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta-\tau} g(t + \tau, t) dt d\tau. \quad (8)$$

Отметим, что вывод (8) из (7) не использовал симметричность g .

Для доказательства (6) надо сначала n раз последовательно применить (7) по каждой (двойной) переменной, используя симметричность F :

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_1}^{b_1} F(x, y) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n \\ &= 2^n \int_{a_n}^{b_n} \int_{y_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \int_{y_1}^{b_1} F(x, y) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n. \end{aligned}$$

После этого надо n раз последовательно применить (8) к интегралам по $dx_i dy_i$ ($i = 1, \dots, n$) и мы получим (6). Лемма доказана.

Так как X ограничено, найдется n -мерный куб $[a, b]^n$, содержащий X . Зафиксируем это куб для дальнейшего. Для $l \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{H}_l$ класс функций χ на $[a, b]^n$, постоянных на каждом из n -мерных интервалов

$$\prod_{i=1}^n \left(a + (b-a) \frac{k_i - 1}{l}, a + (b-a) \frac{k_i}{l} \right), \quad k \in \{1, \dots, l\}^n.$$

Пусть еще

$$\mathcal{H}_l(\lambda) = \{\chi \in \mathcal{H}_l : |\chi(x)| \leq \lambda\}.$$

ЛЕММА 2. Для любых $f \in M([a, b]^n)$ и $l \geq 2$ найдется функция $\chi \in \mathcal{H}_l$, для которой справедливо неравенство

$$d_M(f, \chi) \leq 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, f\right)_M. \quad (9)$$

Если $|f(x)| \leq \lambda$, то χ в (9) может быть выбрана из $\mathcal{H}_l(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем следующее простое соображение (см. [9], [10], где утверждение, подобное лемме 2, доказывалось в одномерном случае для пространств L^p , $0 < p < 1$). Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, $mE > 0$ и $f \in M(E)$, то для почти всех $y \in E$ справедливо неравенство

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_E \varphi_0(f(x) - c) dx \leq \int_E \varphi_0(f(x) - f(y)) dx.$$

Интегрируя это неравенство по $y \in E$, получим

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_E \varphi_0(f(x) - c) dx \leq \frac{1}{mE} \int_E \int_E \varphi_0(f(x) - f(y)) dx dy.$$

Аналогично оценивается $\inf_{c: |c| \leq \lambda} \int_E \varphi_0(f(x) - c) dx$, если $|f(x)| \leq \lambda$.

Используя это соображение и лемму 1 для функции $F(x, y) = \varphi_0(|f(x) - f(y)|)$, получаем

$$\begin{aligned} \inf_{\chi \in \mathcal{H}_n} d_M(f, \chi) &= \sum_{k_1=1}^l \cdots \sum_{k_n=1}^l \inf_{a_k} \prod_{i=1}^n \int_{a+(b-a)(k_i-1)/l}^{a+(b-a)k_i/l} \varphi_0(f(x) - a_k) dx_i \\ &\leq \left(\frac{l}{b-a}\right)^n \sum_{k_1=1}^l \cdots \sum_{k_n=1}^l \prod_{i=1}^n \int_{a+(b-a)(k_i-1)/l}^{a+(b-a)k_i/l} \int_{a+(b-a)(k_1-1)/l}^{a+(b-a)k_1/l} \varphi_0(f(x) - f(y)) dx_i dy_i \\ &\leq \left(\frac{2l}{b-a}\right)^n \sum_{k_1=1}^l \cdots \sum_{k_n=1}^l \prod_{i=1}^n \int_0^{(b-a)/l} \int_{a+(b-a)(k_i-1)/l}^{a+(b-a)k_i/l-h_i} \varphi_0(f(x+h) - f(x)) dx_i dh_i \\ &\leq \left(\frac{2l}{b-a}\right)^n \prod_{i=1}^n \int_0^{(b-a)/l} \int_a^{b-h_i} \varphi_0(f(x+h) - f(x)) dx_i dh_i \leq 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, f\right)_M \end{aligned}$$

(произведение интегралов понимается, конечно, как повторное интегрирование).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. *Необходимость.* Пусть $\{g_k\}_{k=1}^N$ ε -сеть для S в $M(X)$, $f \in S$ и номер $1 \leq k \leq N$ определяется так, что $d_M(f, f_k) < \varepsilon$. Тогда для $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} m\{|f - f_k| > \lambda\} &\leq \frac{2\lambda}{1+\lambda} m\{|f - f_k| > \lambda\} \\ &\leq 2 \int_{\{|f - f_k| > \lambda\}} \frac{|f - f_k|}{1 + |f - f_k|} dx \leq 2d_M(f, f_k) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

и

$$m\{|f| > 2\lambda\} \leq m\{|f - f_k| > \lambda\} + \max_k m\{|f_k| > \lambda\} < 3\varepsilon$$

для достаточно больших λ (см. (2)).

Далее,

$$\omega(\delta, f)_M \leq \omega(\delta, f - f_k)_M + \max_k \omega(\delta, f_k)_M < 2\varepsilon + \max_{1 \leq k \leq N} \omega(\delta, f_k)_M,$$

а последнее слагаемое справа будет меньше ε для достаточно малых δ (см. (2)).

Достаточность. Для $\lambda > 0$ и функции $f \in M(X)$ определим срезку $S_\lambda f$ на уровне λ как

$$S_\lambda f(x) = \min\{|f(x)|, \lambda\} \operatorname{sign} f.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\sup_{f \in K} \mu(\lambda, f) < \frac{\varepsilon}{2^{n+4}},$$

после чего выберем $l > 1$ так, чтобы

$$\sup_{f \in S} \omega\left\{\frac{b-a}{l}, f\right\} < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

Теперь для каждой функции $f \in S$ подберем $\chi \in \mathcal{H}_l(\lambda)$ так, чтобы

$$d_M(S_\lambda f, \chi) \leq 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, f\right)_M.$$

Это можно сделать в силу условий (4) и (3) соответственно.

Тогда, используя выбор параметров λ , l и χ , получаем

$$\begin{aligned} d_M(f, \chi) &\leq d_M(f, S_\lambda f) + d_M(S_\lambda f, \chi) \leq \mu(\lambda, f) + 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, S_\lambda f\right)_M \\ &\leq \mu(\lambda, f) + 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, f - S_\lambda f\right)_M + 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, f\right)_M \\ &\leq 2^{n+2} \mu(\lambda, f) + 2^n \omega\left(\frac{b-a}{l}, f\right)_M < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, множество $\mathcal{H}_n(\lambda)$ является $\varepsilon/2$ -сетью для K .

Пусть $\mathcal{H}_n(\lambda, t)$ – конечное подмножество из $\mathcal{H}_n(\lambda)$, состоящее из функций, принимающих на каждом интервале постоянства одно из значений tk , где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm[\lambda/t]$. Тогда, очевидно, $\mathcal{H}_n(\lambda, \varepsilon/2)$ является конечной $\varepsilon/2$ -сетью для $\mathcal{H}_n(\lambda)$ и, следовательно, конечной ε -сетью для S . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Riesz, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **6**:2-3 (1933), 136–142. [2] M. Tsuji, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **3**:1-2 (1951), 33–36. [3] A. Kolmogoroff, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I*, **9** (1931), 60–63. [4] В. И. Богачев, *Основы теории меры*. т. 1, РХД, М.–Ижевск, 2003. [5] M. Fréchet, *Fund. Math.*, **9**:1-2 (1927), 25–32. [6] E. H. Hanson, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**:6 (1933), 397–400. [7] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. т. 1: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962. [8] П. Л. Ульянов, *Матем. сб.*, **63**:3 (1964), 356–391. [9] В. И. Иванов, *Матем. заметки*, **18**:5 (1975), 641–658. [10] В. Г. Кротов, П. Освальд, Э. А. Стороженко, *Матем. сб.*, **98**:3 (1975), 395–415.

И. Н. Катковская

Белорусский национальный технический университет

E-mail: vkrotov@cosmostv.by

Поступило

18.05.2010