Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, М. А. Прохорович, Скорость сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой и размерность Хаусдорфа, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 145–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:48:41

Скорость сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой и размерность Хаусдорфа

В. Г. Кротов, М. А. Прохорович

Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ . Введем обозначения

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

– шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, r_B – радиус шара B , λB – шар радиуса λr_B , концентрический с B ,

$$f_B = \int_B f d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu$$

– среднее значение функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$ (средние Стеклова). Через $L^p = L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ .

Мы будем иметь дело со свойствами функций, которые зависят от изменения их значений на множестве меры нуль, поэтому условимся, что значение локально суммируемой функции в каждой точке определяется равенством $f(x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} f_{B(x, r)}$.

Ниже считаем выполненным условие удвоения $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$;¹ тогда при некотором $\gamma > 0$

$$\mu\{B(x, R)\} \leq c\left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R. \quad (1)$$

Параметр γ важен в дальнейшем – он выполняет роль размерности X .

Рассмотрим максимальные функции

$$\mathcal{S}_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} r_B^{-\alpha} \int_B |f(y) - f_B| d\mu(y),$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам B , $r_B \in (0, 1)$, содержащим точку $x \in X$. С помощью этих максимальных функций определим классы

$$C_\alpha^p = C_\alpha^p(X) = \{f \in L^p : \|f\|_{C_\alpha^p} = \|f\|_{L^p} + \|\mathcal{S}_\alpha f\|_{L^p} < \infty\}. \quad (2)$$

Для $\mathbb{R}^n$ это определение восходит к работам [1], [2] (см. подробнее [3]), а в общем случае оно было введено в [4], [5]. Класс $C_1^p(X)$ совпадает с классом Хайлаша–Соболева [6] (см. также [5], [7]), а при $X = \mathbb{R}^n$ – с классическим пространством Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ [1], [6].

Напомним определение хаусдорфовых s -вместимости $\mathbb{H}_\infty^s(E)$ и размерности $\dim_{\mathbb{H}}(E)$ множества $E \subset X$:

$$\mathbb{H}_\infty^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i) \right\}, \quad \dim_{\mathbb{H}}(E) = \inf \{s : \mathbb{H}_\infty^s(E) = 0\}.$$

В таких терминах в [8]–[10] изучался вопрос о массивности множества точек Лебега для функций из классов C_α^p . Приведем итоговый результат.

¹Здесь и всюду дальше через c обозначаем различные положительные постоянные, значения которых не играют роли.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \gamma/\alpha$. Тогда для любой функции $f \in C_\alpha^p$ существует множество $E \subset X$ такое, что $\dim_{\mathbb{H}}(E) \leq \gamma - \alpha p$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \oint_{B(x,r)} f d\mu = f^*(x),$$

более того,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \oint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q d\mu = 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

История подобных результатов на $\mathbb{R}^n$ достаточно подробно изложена в [11; гл. 6.2]. Для $\alpha = 1$ утверждение теоремы 1 было частично получено в [8; теорема 4.4]. Случай $0 < \alpha \leq 1$ был рассмотрен в [9; теорема 1], а в [10; теорема 1] было снято ограничение $\alpha \leq 1$. Вопрос о том, можно ли в теореме 1 дополнительно утверждать, что $\mathbb{H}_\infty^{\gamma-\alpha p}(E) = 0$, остается открытым.

В нашей работе мы дадим решение аналогичной задачи для скорости сходимости средних Стеклова для функций из классов C_α^p .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \gamma/\alpha$, $0 < \beta < \alpha$. Тогда для любой функции $f \in C_\alpha^p$ существует множество $E \subset X$ такое, что

- 1) $\mathbb{H}_\infty^{-(\alpha-\beta)p}(E) = 0$, в частности $\dim_{\mathbb{H}}(E) \leq \gamma - (\alpha - \beta)p$;
- 2) для всех $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r \rightarrow +0} r^{-\beta} \left(\oint_{B(x,r)} |f - f(x)|^q d\mu \right)^{1/q} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

При $\alpha \leq 1$ утверждение теоремы 1 можно вывести из результатов [12; следствие 6] и [9; теорема 2]. Однако условие $\alpha \leq 1$ существенно сужает множество возможных ситуаций – для некоторых X классы Гёльдера $H^\alpha \subset C_\alpha^p$ могут быть нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$ (см., например, [13; пример 1]).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных фактов. Прежде всего отметим, что для любого шара $B \subset X$ и $p > 0$

$$\oint_B |f - f_B| d\mu \leq r_B^\alpha \left(\oint_B [\mathcal{S}_\alpha f]^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (3)$$

Это следует из усреднения по $y \in B$ очевидного неравенства

$$\oint_B |f - f_B| d\mu \leq r_B^\alpha \mathcal{S}_\alpha f(y), \quad y \in B.$$

ЛЕММА 1. Если $0 < \delta < \gamma$ и $g \in L^1$, то

$$\mathbb{H}_\infty^{\gamma-\delta}(E) = 0, \quad \text{где} \quad E = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} r^\delta \oint_{B(x,r)} |g| d\mu > 0 \right\}.$$

ЛЕММА 2. Если $f \in L_{\text{loc}}^1$, $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, то для любого шара B

$$\left(\oint_B |f - f_B|^q d\mu \right)^{1/q} \leq c r_B^\alpha \left(\oint_{2B} [\mathcal{S}_\alpha f]^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (4)$$

Лемма 1 имеется в работе второго автора [10; лемма 3], а лемма 2 является частным случаем результатов работы [14; теорема 1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть E_1 – дополнение ко множеству точек $x \in X$, для которых выполнено соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +0} [f(x) - f_{B(x,r)}] = 0; \quad (5)$$

тогда по теореме 1

$$\mathbb{H}_{\infty}^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E_1) = 0. \quad (6)$$

Пусть $x \in X \setminus E_1$, $r \in (0, 1)$ и $B_j = B(x, 2^{-j}r)$ для $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|f(x) - f_{B(x,r)}| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |f_{B(x,2^{-j-1}r)} - f_{B(x,2^{-j}r)}|.$$

Отсюда в силу условия удвоения (1) и неравенства (3) получаем

$$\begin{aligned} r^{-\beta} |f(x) - f_{B(x,r)}| &\leq r^{-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu(B_j)}{\mu(B_{j+1})} \int_{B_j} |f - f_{B_j}| d\mu \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\beta} \left(r^{(\alpha-\beta)p} \int_{B_j} [\mathcal{S}_{\alpha} f]^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq c \sup_{t < r} \left(t^{(\alpha-\beta)p} \int_{B(x,t)} [\mathcal{S}_{\alpha} f]^p d\mu \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

и правая часть сходится к нулю при $r \rightarrow +0$, если

$$\lim_{r \rightarrow +0} r^{(\alpha-\beta)p} \int_{B(x,r)} [\mathcal{S}_{\alpha} f]^p d\mu = 0.$$

В силу леммы 1, примененной к функции $g = [\mathcal{S}_{\alpha} f]^p$ и $\delta = (\alpha - \beta)p$,

$$\mathbb{H}_{\infty}^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E_2) = 0, \quad E_2 = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} r^{(\alpha-\beta)p} \int_{B(x,r)} [\mathcal{S}_{\alpha} f]^p d\mu > 0 \right\}. \quad (7)$$

Итак, на дополнении ко множеству $E = E_1 \cup E_2$ выполнено соотношение (5), а по лемме 2

$$r^{-\beta} \left(\int_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^q d\mu \right)^{1/q} \leq c \left(r^{(\alpha-\beta)p} \int_{B(x,2r)} [\mathcal{S}_{\alpha} f]^p d\mu \right)^{1/p},$$

и для $x \in X \setminus E_2$ правая часть сходится к нулю при $r \rightarrow +0$. Следовательно, для любого $x \in X \setminus E$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} r^{-\beta} \left(\int_{B(x,r)} |f - f(x)|^q d\mu \right)^{1/q} &\leq \lim_{r \rightarrow +0} r^{-\beta} |f(x) - f_{B(x,r)}| + \lim_{r \rightarrow +0} r^{-\beta} \left(\int_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^q d\mu \right)^{1/q} = 0. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\mathbb{H}_{\infty}^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E) = 0$ в силу (6) и (7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. P. Calderón, *Studia Math.*, **44** (1972), 563–582. [2] A. P. Calderón, R. Scott, *Studia Math.*, **62**:1 (1978), 75–92. [3] R. A. DeVore, R. C. Sharpley, *Maximal Functions Measuring Smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc., **47**, № 293, 1984. [4] J. Hu, *J. Math. Anal. Appl.*, **280**:1 (2003), 91–101. [5] D. Yang, *Sci. China Ser. A*, **46**:5 (2003), 675–689. [6] P. Hajlasz, *Potential Anal.*, **5**:4 (1996), 403–415. [7] И. А. Иванишко, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 937–941.

- [8] P. Hajlasz, J. Kinnunen, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **14**:3 (1998), 601–622. [9] М. А. Прохорович, *Матем. заметки*, **82**:1 (2007), 99–107. [10] М. А. Прохорович, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 616–621. [11] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Grundlehren Math. Wiss., **314**, Springer-Verlag, Berlin, 1996. [12] В. Г. Кротов, *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **41**:2 (2006), 25–42. [13] A. Jonsson, *J. Math. Anal. Appl.*, **290**:1 (2004), 86–104. [14] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, *Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси*, **14**:1 (2006), 51–61.

В. Г. Кротов

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: krotov@bsu.by

Поступило

18.05.2010

М. А. Прохорович

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: prokhorovich@bsu.by