Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Парамонов, О C^m -продолжении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини на $\mathbb{R}^N$, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 149–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:35:46

О C^m -продолжении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини на $\mathbb{R}^N$

П. В. Парамонов

1. Введение. Эта статья является непосредственным продолжением работ [1] и [2], где, в частности, более подробно обсуждается история вопроса и вводятся необходимые понятия и обозначения. В настоящей работе мы имеем дело со следующей задачей.

Для каких компактных множеств X в $\mathbb{R}^N$ всякая функция $f \in C^m(X)$, субгармоническая внутри X , может быть продолжена до функции F , субгармонической и класса C^m на всем $\mathbb{R}^N$, с условием $\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^N)} \leq A_{Xm} \|f\|_{C^m(X)}$ (где $A_{Xm} \in (0, +\infty)$ зависит только от X и m)?

Основной результат этой работы (теорема 1.1) показывает, что при $m \in (1, 3)$ предыдущее свойство выполняется для любой замкнутой (ограниченной) области X в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) со связным дополнением и C^1 -гладкой границей, удовлетворяющей условию Ляпунова–Дини. Аналогичное утверждение в случае $N = 2$ было получено в [1] другими методами (и при чуть более слабых ограничениях).

Напомним, что функция $\varepsilon(\cdot) \in C([0, +\infty))$ с условиями $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\varepsilon(t)$ (нестрого) возрастает и $\varepsilon(t)/t$ убывает на $(0, +\infty)$, причем

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt < +\infty,$$

называется функцией класса Дини.

Ограниченная область D в $\mathbb{R}^N$, $N \in \{2, 3, \dots\}$, с C^1 -гладкой границей $S = \partial D$ называется областью Ляпунова–Дини (коротко (Л–Д)-областью), если существует функция класса Дини $\varepsilon(\cdot)$ такая, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на S справедлива оценка $|\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^o - \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^o| \leq \varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, где $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^o$ – внешняя (по отношению к D) единичная нормаль к S в точке $\mathbf{x} \in S$.

Для открытого множества Ω в $\mathbb{R}^N$ через $SH(\Omega)$ (соответственно $H(\Omega)$) обозначается класс всех вещественнозначных субгармонических (соответственно гармонических) функций в Ω . Всюду в дальнейшем мы фиксируем $N \in \{3, 4, \dots\}$ и произвольную (Л–Д)-область D в $\mathbb{R}^N$. Все встречающиеся ниже константы $A, A_1, \dots$ положительны (конечны) и зависят только от m, N, D . При этом значения постоянных $A_1, A_2, \dots$ фиксируются, а значение A может меняться от случая к случаю.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть D является (Л–Д)-областью в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, со связным дополнением, $m \in (1, 3)$. Тогда для любой функции $f \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$ найдется функция $F \in BC^m(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$ с условиями $F|_{\overline{D}} = f$ и $\|F\|_{m, \mathbb{R}^N} \leq A \|f\|_{m, \overline{D}}$.

В [1; § 2] для всех $m \in [0, +\infty)$ вводятся (банаховы) пространства $BLip^m(\Omega)$ и $BC^m(\Omega)$ (соответственно, $Lip^m(X)$ и $C^m(X)$) “ m -липшицевых” и “ m -гладких” функций на открытом множестве Ω (соответственно на компакте X) с (конечными) нормами $\|f\|_{m, \Omega}$ (соответственно $\|f\|_{m, X}$). Там же определяются пространства (Фреше) $Lip^m(\Omega)$ и $C^m(\Omega)$. Напомним, что в случаях $m = 0$ или $\Omega = \mathbb{R}^N$ соответствующие индексы в обозначениях указанных пространств и норм опускаются. Размерность 2 в этих определениях без труда заменяется на произвольную.

Аналог теоремы 1.1 при $m = 1$ справедлив при более жестких требованиях на область D (см. теоремы 2.2 и 3.1 работы [3] и теорему 3 работы [2]). Следующее утверждение, полученное в [1] для плоского случая, дословно переносится и на все размерности.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12160 офи.м) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3877.2008.1).

Оно показывает, что значения $t \in [0, 1) \cup [3, +\infty)$ параметра гладкости в рассматриваемом контексте особого интереса не представляют.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. При $t \in [0, 1) \cup [3, +\infty)$ аналог теоремы 1.1 не верен даже для шаров в $\mathbb{R}^N$.

Уточним последнее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть B – шар в $\mathbb{R}^N$. При $t \in [0, 1)$ найдется функция $f \in C^m(\overline{B}) \cap H(B)$, которую нельзя непрерывно продолжить до субгармонической функции ни в какую окрестность $\overline{B}$. При $t \in [3, +\infty)$ утверждение теоремы 1.1 остается верным для функций $f \in C^m(\overline{B}) \cap H(D)$.

Доказательство теоремы 1.1 приводится в разделе 2. Оно во многом следует методам работы [1]. По существу, технику конформных отображений, используемую в последней работе, удастся надлежащим образом заменить техникой функций Грина (см. [2] и [4]). Доказательство предложения 1.3 приводится в самом конце раздела 2.

В вопросе о точности условий теоремы 1.1 до сих пор ясности нет. Так, можно доказать, что заключение этой теоремы остается верным, если D – куб в $\mathbb{R}^N$.

Некоторые следствия и задачи сформулированы в разделе 3.

2. Доказательства. Всюду далее мы находимся в условиях и обозначениях теоремы 1.1, для доказательства которой нам потребуются несколько лемм. Сначала сформулируем один вспомогательный результат, который следует из теоремы 2.5 работы [4].

ЛЕММА 2.1. Пусть D является (Л–Д)-областью в $\mathbb{R}^N$ со связным дополнением (что эквивалентно связности границы $S = \partial D$ и связности множества $D_o = \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$). Пусть $g \in H(D_o) \cap C(\overline{D}_o)$ такова, что $g|_S = 0$ и $g(\infty) = 1$. Тогда $g \in BC^1(\overline{D}_o)$, $\|g\|_{1, \overline{D}_o} \leq A_1$ и для всех $\mathbf{x} \in S$ имеем

$$A_1 \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} \geq 1.$$

Всюду далее $\rho(\mathbf{x})$ означает расстояние от точки $\mathbf{x}$ до поверхности S .

ЛЕММА 2.2. При $t \in (1, +\infty)$ определим $G_m(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}))^m$ в D_o и $G_m(\mathbf{x}) = 0$ в $\overline{D}$, где функция g взята из предыдущей леммы. Тогда

$$G_m \in SH(\mathbb{R}^N) \cap BLip^m(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \partial D),$$

причем

- (a) $\|G_m\|_m \leq A$;
- (b) $\Delta G_m(\mathbf{x}) \geq A_2(\rho(\mathbf{x}))^{m-2}$ при $\mathbf{x} \in D_o$, $\rho(\mathbf{x}) \leq A_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 3.2 из [1] с использованием следующих неравенств, вытекающих из леммы 2.1 и формулы Пуассона для шара в D_o с центром $\mathbf{x}$ и радиусом $A_4\rho(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \Delta G_m(\mathbf{x}) &= m(m-1)g^{m-2}(\mathbf{x})|\nabla g(\mathbf{x})|^2, & \mathbf{x} \in D_o, \\ (2A_1)^{-1} < |\nabla g(\mathbf{x})| &\leq A_1, \quad (2A_1)^{-1}\rho(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq A_1\rho(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D_o, \quad \rho(\mathbf{x}) \leq A_3, \\ |\nabla^s g(\mathbf{x})| &\leq A\rho(\mathbf{x})^{1-s}, & s \leq m, \quad \mathbf{x} \in D_o. \end{aligned}$$

Напомним, что субгармоничность G_m в окрестности S вытекает из формулы Гаусса–Остроградского и имеющей регулярности поверхности S (см. окончание доказательства теоремы 2.2 работы [3]).

Следующая лемма, сводящая теорему 1.1 при $t \in (2, 3)$ к случаю $f \in C^m(\overline{D}) \cap H(D)$, доказывается так же, как лемма 3.1 из [1] (при $t \in (2, 3)$). Нетрудно показать, что при $t \geq 3$ она не верна.

ЛЕММА 2.3. Пусть $m \in (2, 3)$, $f \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$. Тогда найдется

$$F_1 \in BC^m(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$$

такая, что

- (a) $f - F_1 \in H(D)$,
- (b) $\|F_1\|_m \leq A\|f\|_{m, \overline{D}}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $f \in SH(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in (1, 2]$, или $f \in H(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in (2, +\infty)$. Тогда найдется функция

$$F_2 \in SH(\mathbb{R}^N) \cap BLip^m(\mathbb{R}^N) \cap C^m(\mathbb{R}^N \setminus \partial D)$$

такая, что

- (a) $F_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \overline{D}$,
- (b) $\|F_2\|_m \leq A\|f\|_{m, \overline{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Уитни (см. [5; гл. 6]) продолжим функцию f с множества $\overline{D}$ до функции $F_0 \in BC^m(\mathbb{R}^N)$ с носителем в A_3 -окрестности компакта $\overline{D}$ и условиями

$$\|F_0\|_m \leq A\|f\|_{m, \overline{D}}, \quad |\Delta F_0(\mathbf{x})| \leq A\|f\|_{m, \overline{D}}(\rho(\mathbf{x}))^{m-2}, \quad \mathbf{x} \in D_o.$$

Последняя оценка при $m \in (1, 2]$ вытекает из [5; гл. 6, § 2.3, оценка 2.3.2(б')], а при $m > 2$ она непосредственно следует из определения нормы $\|\cdot\|_m$ и условия $\Delta F_0 = 0$ в $\overline{D}$. Из леммы 2.2 получаем, что найдется $A_4 > 0$ такая, что функция

$$F_2 = F_0 + A_4\|f\|_{m, \overline{D}}G_m$$

удовлетворяет всем требованиям леммы 2.4. Субгармоничность F_2 в окрестности S доказывается как в лемме 2.2.

ЛЕММА 2.5. Пусть $f \in SH(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in (1, 2]$ или $f \in H(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m > 2$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция $F_\varepsilon \in SH(\mathbb{R}^N) \cap C^m(\mathbb{R}^N)$ такая, что

- (a) если $m \in (1, 2)$, то $(f - F_\varepsilon) \in SH(D)$ и $\text{supp } \Delta F_\varepsilon \cap D \subset \text{supp } \Delta f$;
если $m > 2$, то $(f - F_\varepsilon) \in H(D)$ (в частности, $F_\varepsilon \in H(D)$);
- (b) $\|f - F_\varepsilon\|_{m, \overline{D}} < \varepsilon$;
- (c) $\|F_\varepsilon\|_m \leq A\|f\|_{m, \overline{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (доказательств) теорем О'Фаррелла (см. [6; теорема 1']) и Вердери ([7; теоремы 1 и 2]) вытекает, что найдется функция $G_\varepsilon \in BC^m(\mathbb{C}) \cap SH(D)$ (если $m > 2$, то $G_\varepsilon \in BC^m(\mathbb{C}) \cap H(D)$), гармоническая в некоторой окрестности U_ε границы ∂D области D , с условиями

$$\|G_\varepsilon - F_0\|_m < \varepsilon, \quad (f - G_\varepsilon) \in SH(D), \quad \text{supp } \Delta G_\varepsilon \cap D \subset \text{supp } \Delta f,$$

где функция F_0 та же, что и в доказательстве леммы 2.4. Действительно, само утверждение о C^m -аппроксимации (при всех $m > 1$) составляет содержание указанных теорем. А в доказательствах этих теорем локализованные (по методу Витушкина [8]) функции с особенностями, лежащими *внутри* D , остаются (в качестве слагаемых) в приближающей функции без изменений.

Выберем такое малое $\delta \in (0, A_3)$, чтобы граница S_δ области D_δ , ограниченной C^1 -поверхностью $\{\mathbf{x} \in D_o \mid g(\mathbf{x}) = \delta\}$ (см. лемму 2.1), принадлежала U_ε . Для области D_δ и функции G_ε (используя функцию $g_\delta = (g - \delta)/(1 - \delta)$ вместо g) применим лемму 2.4 и получим функцию $F_{\varepsilon 2}$ с теми же свойствами, что и у F_2 , за исключением свойства (а) этой леммы, вместо которого выполнено $F_{\varepsilon 2}(\mathbf{x}) = G_\varepsilon(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \overline{D}_\delta$. (В предшествующих доказательствах использовались те свойства функции g , которые остаются верными и для функции g_δ вне $\overline{D}_\delta$). Остается регуляризовать полученную функцию $F_{\varepsilon 2}$, как это сделано в конце доказательства леммы 3.4 работы [1].

Завершается доказательство теоремы 1.1 так же, как в [1] (в конце § 3). Из приведенного доказательства вытекает также утверждение второй части предложения 1.3.

Нам остается обсудить доказательство первой части предложения 1.3. В примере 4.3 работы [2] приведена функция $f_p \in C^1(X)$, где $X = [-1, 1]_{x_1} \times \{0\}_{x_2}$, которую нельзя непрерывно продолжить ни в какую окрестность компакта X до функции, субгармонической в окрестности точки $(0, 0)$. Методом конформных отображений из f_p легко строится функция $g \in C^1(S)$ (где S – граница единичного круга B на плоскости) такая, что решение f задачи Дирихле в B с граничными данными g является искомой функцией. Действительно, хорошо известно, что в указанных условиях $f \in C^m(\bar{B})$ при всех $m \in [0, 1)$. На размерности $N > 2$ перенести указанный пример особого труда не представляет.

3. Следствия и задачи. Теорему 1.1 можно переформулировать в терминах продолжения соответствующей меры Рисса $\sigma = \Delta f$ функции f из D в $\mathbb{R}^N$, как это сделано в [1; следствие 4.3]. Кроме того, аналог теоремы 1.1 справедлив для Lip^m -продолжений субгармонических функций при $m \in (1, 3]$ (см. [1; теорема 4.4]). Доказательство этого аналога аналогично доказательству леммы 2.4.

Следующая задача представляет несомненный самостоятельный интерес. Ее аналог при $m = 1$ исследовался в [2] (теорема 1), что явилось базой для доказательства аналога полученной выше теоремы 1.1 для случая $m = 1$ ([2; теорема 3]). Пусть $N \in \{2, 3, \dots\}$, $m > 1$ и D является (Л–Д)-областью в $\mathbb{R}^N$, $D_o = \mathbb{R}^N \setminus \bar{D}$. Пусть $u_i \in H(D) \cap C^m(\bar{D})$, а u_o есть (единственное) решение задачи Дирихле в D_o с граничными данными $u_o|_{\partial D_o} = u_i|_{\partial D_o}$ (в неограниченной компоненте множества D_o дополнительно требуется, чтобы $u_o(\infty) = 0$ при $N \geq 3$ или $|u_o(\infty)| < +\infty$ при $N = 2$, где $u_o(\infty) = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} u_o(\mathbf{x})$ должен существовать).

Задача 3.1. При каких условиях на границу S области D из указанных выше условий следует, что $u_o \in C^m(\bar{D}_o)$ и $\|u_o\|_{m, \bar{D}_o} \leq A \|u_i\|_{m, \bar{D}}$?

Пусть в условиях последней задачи $u_i = 1$ в $\bar{D}$. Тогда очевидно, что $u_o = 1 - g$, где функция g взята из леммы 2.1. Из этой леммы и цитируемой выше теоремы Уитни (о C^m -продолжении) сразу вытекает следующее необходимое условие: поверхность S должна быть класса C^m .

В заключение сформулируем еще один важный вопрос.

Задача 3.2. При каких условиях на границу S ограниченной области D в $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, справедлив аналог теоремы [1; теорема 4.1] о локальности условия C^m -субгармонической продолжаемости?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. В. Парамонов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 139–152. [2] П. В. Парамонов, *Матем. сб.*, **199**:12 (2008), 79–116. [3] М. С. Мельников, П. В. Парамонов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 105–118. [4] К.-О. Widman, *Math. Scand.*, **21** (1967), 17–37. [5] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973. [6] A. G. O’Farrell, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **79**:11 (1979), 103–114. [7] J. Verdera, *Duke Math. J.*, **55**:1 (1987), 157–187. [8] А. Г. Витушкин, *УМН*, **22**:6 (1967), 141–199.

П. В. Парамонов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: petr.paramonov@list.ru

Поступило

05.03.2010