Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Словеснов, Предельное интегральное кручение замкнутых аналитических кривых, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 04:50:10

Предельное интегральное кручение замкнутых аналитических кривых

А. В. Словеснов

Рассмотрим некоторую пространственную¹ замкнутую аналитическую кривую с радиус-вектором $r(t)$, $t \in [0, T]$, и плоскость Π с единичной нормалью e . Определим *сжатие* кривой $r(t)$ на плоскость Π с помощью семейства $\{r_\lambda(t)$, $\lambda \in [0, 1]\}$, где

$$r_\lambda(t) = r(t) - (1 - \lambda)(e, r(t))e, \quad t \in [0, T].$$

Пусть также $\varkappa_{int}(\lambda)$ – интегральное кручение кривой $r_\lambda(t)$:

$$\varkappa_{int}(\lambda) = \int_0^T \frac{\langle r'_\lambda(t), r''_\lambda(t), r'''_\lambda(t) \rangle}{|[r'_\lambda(t), r''_\lambda(t)]|^2} |r'_\lambda(t)| dt.$$

Тогда *предельным интегральным кручением* кривой $r(t)$ при сжатии на плоскость Π назовем величину $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \varkappa_{int}(\lambda)$. Ниже мы покажем существование этого предела, вычислив его значение. Для этого введем обозначения для подвижного репера Френе кривой $r(t) - \{\tau(t), \nu(t), \beta(t)\}$ – и заметим, что

$$\varkappa_{int}(\lambda) = \lambda \int_0^T \varkappa(t) \frac{\sqrt{\sin^2 \psi(t) + \lambda^2 \cos^2 \psi(t)}}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)} |r'(t)| dt, \quad (1)$$

где $\psi(t)$ – это угол между векторами $\tau(t)$ и e , а $\varphi(t)$ – угол между $\beta(t)$ и e . Из (1) видно, что если направление e таково, что всюду на кривой $\cos \varphi(t) \neq 0$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \varkappa_{int}(\lambda) = 0,$$

а в общем случае при его вычислении необходимо рассмотреть интегралы по сколь угодно малым окрестностям точек $t \in [0, T]$, в которых функция $\cos \varphi(t)$ обращается в ноль. Условимся называть такие точки *особыми* и отметим, что в силу аналитичности кривой, а также предположения $\varkappa(t) \neq 0$, число особых точек конечно.

Допустим, что хотя бы одна особая точка t_0 кривой $r(t)$ для плоскости Π существует, и определим ее вклад в предельное интегральное кручение. Предположив без потери общности, что $t_0 = 0$, рассмотрим интеграл (1) по окрестности $(-\delta, \delta)$ в пределе при $\lambda \rightarrow 0+0$, считая число $\delta > 0$ сколь угодно малым. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы последовательно упростить подынтегральную функцию до такой степени, чтобы интеграл (1) можно было вычислить.

Введем следующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda, \delta) &= \lambda \int_{-\delta}^{\delta} \varkappa(t) \frac{\sqrt{\sin^2 \psi(t) + \lambda^2 \cos^2 \psi(t)} - |\sin \psi(t)|}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)} |r'(t)| dt, \\ \Delta_2(\lambda, \delta) &= \lambda \int_{-\delta}^{\delta} \varkappa(t) \left(\frac{|\sin \psi(t)|}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)} - \frac{|\sin \psi(t)|}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} \right) |r'(t)| dt. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $|\Delta_1(\lambda, \delta)| \leq C \cdot \delta$, где C – некоторая абсолютная постоянная, и $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Delta_2(\lambda, \delta) = 0$. Отсюда следует, что вклад особой точки $t = 0$ в предельное интегральное кручение составляет

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \lambda \int_{-\delta}^{\delta} \varkappa(t) \frac{|\sin \psi(t)|}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} |r'(t)| dt.$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РНП (грант № 2.1.1.3704).

¹Под словом пространственная мы понимаем кривую с кручением $\varkappa \neq 0$.

Для вычисления последнего предела сделаем следующее преобразование. Обозначив буквой s натуральный параметр кривой, с помощью формул Френе находим

$$(\cos \varphi(t))'_t = (\beta(t), e)'_t = (\beta'_t(t), e) = (\beta'_s(t) \cdot s'_t, e) = \kappa(t) |r'(t)| \cdot (\nu(t), e). \quad (2)$$

Таким образом, интересующий нас предел можно переписать в виде

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \lambda \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\sin \psi(t)|}{(\nu(t), e)} \cdot \frac{(\cos \varphi(t))'_t}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} dt. \quad (3)$$

Покажем, что функция $|\sin \psi(t)|/(\nu(t), e)$ в точке $t = 0$ имеет односторонние пределы, равные 1 или -1 . Из определения особой точки следует, что вектор e лежит в плоскости $\langle \tau(0), \nu(0) \rangle$. Поскольку векторы $\tau(0)$ и $\nu(0)$ ортонормированы, то $|\sin \psi(0)| = |(\nu(0), e)|$, и в случае $(\nu(0), e) \neq 0$ существование односторонних пределов очевидно. При $(\nu(0), e) = 0$ рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} (\tau(t), e)^2 + (\nu(t), e)^2 + (\beta(t), e)^2 &\equiv 1 &\iff \cos^2 \varphi(t) + (\nu(t), e)^2 &= \sin^2 \psi(t) \\ &&\iff (\nu(t), e)^2 (1 + (\cos \varphi(t)/(\nu(t), e))^2) &= \sin^2 \psi(t). \end{aligned}$$

Как видно из (2), второе слагаемое в скобках есть бесконечно малая величина при $t \rightarrow 0$, откуда и следует существование указанных односторонних пределов, равных ± 1 . С учетом доказанного мы можем ввести следующие обозначения:

$$s_1 := \lim_{t \rightarrow 0-0} \frac{|\sin \psi(t)|}{(\nu(t), e)}, \quad s_2 := \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{|\sin \psi(t)|}{(\nu(t), e)}. \quad (4)$$

Покажем, что предел (3) можно переписать в виде

$$s_1 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \lambda \int_{-\delta}^0 \frac{(\cos \varphi(t))'_t}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} dt + s_2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \lambda \int_0^{\delta} \frac{(\cos \varphi(t))'_t}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} dt. \quad (5)$$

Действительно, число δ мы вправе выбирать произвольным, поэтому справедливость этого разложения в сумму оправдывает оценка

$$\lambda \int_{-\delta}^{\delta} |t| \cdot \frac{|(\cos \varphi(t))'_t|}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} dt \leq C \cdot \delta.$$

Последняя оценка, как нетрудно проверить, следует из представления аналитической функции $\cos \varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$: $\cos \varphi(t) \sim A \cdot t^k$, $k \geq 1$. Пределы из формулы (5) легко вычисляются:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \lambda \int_{-\delta}^0 \frac{(\cos \varphi(t))'_t}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} dt &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}((\cos \varphi(t))'_t)_{t \in (-\delta, 0)}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \lambda \int_0^{\delta} \frac{(\cos \varphi(t))'_t}{\cos^2 \varphi(t) + \lambda^2} dt &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}((\cos \varphi(t))'_t)_{t \in (0, \delta)}. \end{aligned}$$

Учитывая равенства (2) и (4), заключаем, что вклад особой точки $t = 0$ в предельное интегральное кручение равен

$$\frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(\kappa(t))_{t \in (-\delta, 0)} + \operatorname{sgn}(\kappa(t))_{t \in (0, \delta)}).$$

Таким образом, доказана

ЛЕММА 1. *Вклад особой точки $t = t_0$ в предельное интегральное кручение равен 0, если кручение в этой точке равно 0 и его знак меняется при переходе через эту точку. В противном случае ее вклад составляет $\pi \cdot \operatorname{sgn} \kappa(t)$, где точка $t \neq t_0$ достаточно близка к t_0 .*

Поскольку мы работаем с аналитическими кривыми и особых точек, как было отмечено выше, лишь конечное число, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Предельное интегральное кручение замкнутой аналитической кривой при сжатии на любую плоскость кратно числу π .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Во-первых, отметим, что при проектировании на разные плоскости могут получаться разные значения предельного интегрального кручения, сохраняется лишь их кратность числу π . Во-вторых, нетрудно показать, что любое число, кратное π , может выступать в качестве предельного интегрального кручения некоторой кривой при сжатии на некоторую плоскость. Для этого достаточно рассмотреть кривую² с радиус-вектором

$$\rho_m(t) = (\sin t, (1 - \cos t)^3, (1 - \cos t) \sin t), \quad t \in [0, 2\pi m], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что ее предельное интегральное кручение при сжатии на плоскость Oxy равно $-\pi m$.

Теорема 1 справедлива для всех кривых и всех плоскостей сжатия. Ниже мы уточним полученное утверждение, разбив кривые на два класса и исключив некоторые плоскости сжатия. Согласно работе Сабитова [2] все замкнутые аналитические кривые можно разбить на два непересекающихся класса *ориентируемых* и *полуориентируемых* кривых в зависимости, соответственно, от периодичности или антипериодичности аналитических векторов главной нормали и бинормали. Чтобы выявить различие между поведением интегрального кручения у кривых разных классов, мы наложим некоторое ограничение на плоскость сжатия, оставаясь в случае общего положения. Мы будем считать, что выбранный вектор e , ортогональный плоскости сжатия, не коллинеарен ни одному из векторов $\{\tau(t), t \in [0, T]\}$. В этом случае мы будем называть плоскость сжатия *регулярной*. Если вектор e понимать как точку на единичной сфере, то данное требование исключает из рассмотрения те направления e , которые принадлежат кривой $\tau(t)$, $t \in [0, T]$, расположенной на этой сфере, т. е. множество направлений двумерной меры 0. Таким образом, указанное ограничение соответствует случаю общего положения.

ТЕОРЕМА 2. *Предельное интегральное кручение замкнутой аналитической кривой при сжатии на регулярную плоскость кратно числу π с четным коэффициентом пропорциональности, если кривая периодическая, и пропорционально π с нечетным коэффициентом пропорциональности, если кривая полупериодическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем регулярную плоскость сжатия Π и рассмотрим некоторую особую точку t_0 . Сразу отметим, что отсутствие таких точек означает, что мы работаем с ориентируемой кривой, а предельное интегральное кручение равно 0, что согласуется с формулировкой теоремы. Согласно лемме 1 вклад особой точки t_0 в предельное интегральное кручение определяется поведением кручения в окрестности этой точки. Поскольку мы рассматриваем регулярную плоскость, то в точке t_0 выполняется неравенство $(\nu(t_0), e) \neq 0$. Поэтому из формулы (2) следует, что вклад одной особой точки t_0 составляет $\pm\pi$, если график функции $\cos \varphi(t) = (\beta(t), e)$ пересекает ось абсцисс, и равен 0, если он касается оси абсцисс. В случае ориентируемой кривой указанная функция является периодической и пересекает ось абсцисс четное число раз. Для полуориентируемой кривой эта функция, будучи антипериодической, пересекает ось абсцисс нечетное число раз, откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим кривую (6), которая при четных m является ориентируемой, а при нечетных – полуориентируемой. Как отмечалось в замечании к теореме 1, ее предельное интегральное кручение при сжатии на плоскость Oxy

²Эта кривая была построена Г. Шварцем в работе [1] при изучении аналитических лент Мебиуса.

равно $-\pi t$. Если вычислить предельное кручение той же кривой при сжатии на плоскость Oxz , то оно окажется равным πt . Это значит, что меняя параметр и направление сжатия, можно получить кривую с любым интегральным кручением из интервала $(-\pi t, \pi t)$. Так как t – произвольное натуральное число, последнее, в свою очередь, позволяет говорить о существовании кривой (как ориентируемой, так и полуориентируемой) с любым наперед заданным интегральным кручением.

Автор выражает благодарность И. Х. Сабитову за постановку задачи и многочисленные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Schwarz, *Pacific J. Math.*, **143**:1 (1990), 195–200. [2] И. Х. Сабитов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 197–224.

А. В. Словеснов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: alexslovesnov@narod.ru

Поступило

20.03.2010