Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Серов, О сходимости рядов Фурье по собственным функциям оператора Шредингера с потенциалом Като, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 755–763

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm893>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:08:06

УДК 517.95

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ КАТО

В. С. Серов

В работе получены точные условия абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье по собственным функциям оператора Шрёдингера с потенциалом Като в ограниченной области для функций из областей определения обобщенных дробных степеней исходного оператора Шрёдингера, а также из обобщенных классов Бесова с точным показателем.

Библиография: 15 названий.

0. Введение. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, с гладкой границей. Пусть, кроме того, Ω_1 – строго внутренняя подобласть области Ω . Рассмотрим в области Ω оператор Шрёдингера H :

$$H \equiv -\Delta + q(x), \quad (0.1)$$

где Δ – лапласиан в $\mathbb{R}^N$, а действительный потенциал $q(x)$, удовлетворяет условиям

$$q(x) \in K_N(\Omega_1) \quad \text{и} \quad q(x) \in C^\infty \cap L^\infty(\Omega \setminus \Omega_1). \quad (0.2)$$

Здесь символом $K_N(\Omega_1)$ обозначен класс Като в области Ω_1 . При этом мы считаем, что $q(x) \in K_N(\Omega_1)$, если следующая функция $\tilde{q}(x)$:

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega_1, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

принадлежит классическому классу Като K_N [1], т.е. функция $\tilde{q}(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| < \delta} |\tilde{q}(y)| \omega(|x-y|) dx = 0, \quad (0.3)$$

где функция $\omega(t)$ имеет вид

$$\omega(t) = \begin{cases} t^{2-N}, & N > 2, \\ \ln(1/t), & N = 2. \end{cases} \quad (0.4)$$

В силу теоремы 1.11 из [2, с. 16] и классической “KLMN-теоремы” [3, теорема X.17] симметричная квадратичная форма в $L^2(\Omega)$, соответствующая оператору H , имеет полуограниченное снизу замыкание на $C_0^\infty(\Omega)$, которое единственным образом определяет полуограниченный снизу самосопряженный оператор $\hat{H}$ с областью определения $D(\hat{H})$. При этом справедливо вложение $D(\hat{H}) \subset \dot{W}_2^1(\Omega)$ и для любых $u \in D(\hat{H})$ и $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \hat{H}u \cdot \bar{v} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega} qu\bar{v} dx. \quad (0.5)$$

Более того, оператор $\hat{H}$ имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ конечной кратности, $\{\lambda_n\} \rightarrow +\infty$, и полную ортонормированную в $L^2(\Omega)$ систему собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ (см. [4]). Не ограничивая общности изложения, мы в дальнейшем будем предполагать, что оператор $\hat{H} > 0$. В данной работе изучаются вопросы абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье по системе собственных функций оператора $\hat{H}$ для различных классов дифференцируемых функций. При этом любой функции $f \in L^2(\Omega)$ мы можем поставить в соответствие формальный ряд

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot u_n(x), \quad (0.6)$$

где f_n – коэффициенты Фурье функции f по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Мы интересуемся сходимостью рядов (0.6). Полный обзор результатов, касающихся вопросов сходимости рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных эллиптических операторов второго порядка с гладкими коэффициентами, можно найти в монографии В. А. Ильина [5]. Что касается операторов, коэффициенты которых могут иметь особенности, то отметим здесь только работы, представляющие интерес с точки зрения данной статьи. В работе Ш. А. Алимова и И. Йо [6] рассмотрен оператор Шрёдингера с потенциалом, имеющим особенность из $L^2 \cap L^{N/2+\varepsilon}$ в некоторой фиксированной точке. В этой работе доказана поточечная сходимость средних Рисса рядов Фурье по собственным функциям этого оператора для функций из классов Лиувилля. В работе [7] тех же авторов рассмотрен оператор Шрёдингера во всем пространстве, потенциал которого имеет степенную особенность первого порядка на некоторой гладкой поверхности. В этой работе доказана сходимость спектральных разложений в норме соболевских пространств. В работе А. Р. Халмухамедова [8] результаты работы [6] перенесены на случай произвольной натуральной степени оператора Шрёдингера с точечной особенностью, а в работе [9] получена равномерная сходимость рядов Фурье по собственным функциям операторов, рассмотренных в [6]. Отметим работу Р. Р. Ашурова [10], в которой этот же результат получен для оператора с потенциалом из $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. Для операторов произвольного четного порядка в ограниченной области, коэффициенты которых могут иметь локальные особенности на произвольной гладкой поверхности лишь из класса Като, в работах автора [11], [12] получены окончательные результаты об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье по собственным функциям таких операторов для функций из классов Бесова и для функций из областей определения соответствующих степеней исходных операторов.

1. Функция Грина оператора Шрёдингера с потенциалом Като. Изучение функции Грина оператора $\hat{H}$ начнем с построения локального фундаментального решения оператора $H - zI$ для комплексных z . Пусть $Z = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta, 0 < \theta < \pi/2, \theta \text{ фиксировано}\}$ – множество на комплексной плоскости. Пусть далее $z \notin Z$. *Фундаментальным решением* оператора $H - zI$ в шаре $B(x_0, R)$ назовем функцию $F(x, y, z)$, $x, y \in B(x_0, R)$, удовлетворяющую в смысле теории распределений равенству

$$(H_x - zI)F(x, y, z) = \delta(x - y), \quad (1.1)$$

где $\delta(\cdot)$ – δ -функция Дирака. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Найдутся числа $R_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что в любом шаре $B(x_0, R) \subset \Omega$, $x_0 \in \Omega$, радиуса $R \leq R_0$ существует фундаментальное решение $F(x, y, z)$ оператора $H - zI$, $z \notin Z$, вида (0.1), (0.2), которое удовлетворяет следующим оценкам:*

$$|F(x, y, z)| \leq C_0 e^{-\delta|x-y||z|^{1/2}} \begin{cases} |x-y|^{2-N}, & N > 2, \\ 1 + |\ln|x-y||, & N = 2, \end{cases} \quad (1.2)$$

где C_0 – некоторая константа, зависящая только от размерности пространства и исходного потенциала q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать фундаментальное решение $F(x, y, z)$ в виде решения следующего интегрального уравнения:

$$F(x, y, z) = F_0(x, y, z) - \int_{B(x_0, R)} F_0(x, u, z) q(u) F(u, y, z) du, \quad (1.3)$$

где x_0 – произвольная фиксированная точка области Ω , а $F_0(x, y, z)$ – фундаментальное решение оператора $-\Delta - zI$. Известно, что функция $F_0(x, y, z)$ имеет вид

$$F_0(x, y, z) = C_N (\sqrt{z}|x-y|)^{-(N-2)/2} K_{(N-2)/2}(\sqrt{z}|x-y|), \quad (1.4)$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда порядка ν и $\sqrt{z}$ – корень из комплексного числа z такой, что $\operatorname{Im} \sqrt{z} > 0$. Явный вид функции $F_0(x, y, z)$ (1.4) и оценки функции Макдональда позволяют получить следующие оценки:

$$|F_0(x, y, z)| \leq C_N e^{-\delta|x-y|\sqrt{|z|}} \begin{cases} |x-y|^{N-2}, & N > 2, \\ 1 + |\ln|x-y||, & N = 2, \end{cases} \quad (1.5)$$

с некоторыми положительными константами δ и C_N . Решение $F(x, y, z)$ уравнения (1.3) будем искать в виде ряда из итераций

$$F(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(x, y, z), \quad (1.6)$$

где $F^{(0)}(x, y, z) = F_0(x, y, z)$, а функция $F^{(k)}(x, y, z)$ для $k \geq 1$ определяется следующим образом:

$$F^{(k)}(x, y, z) = - \int_{B(x_0, R)} F_0(x, u, z) q(u) F^{(k-1)}(u, y, z) du. \quad (1.7)$$

Для оценки первой итерации рассмотрим прежде случай $N \geq 3$. В этом случае получим неравенство

$$|F^{(1)}(x, y, z)| \leq C_N^2 e^{-\delta|x-y|\sqrt{|z|}} \int_{B(x_0, R)} |x-u|^{2-N} |q(u)| |u-y|^{2-N} du. \quad (1.8)$$

Для оценки интеграла в (1.8) рассмотрим два случая: $|x-u| \leq |u-y|$, $|x-u| \geq |u-y|$. И в том и другом случаях легко получить для этого интеграла оценку сверху:

$$\left(\frac{|x-y|}{2}\right)^{2-N} \int_{B(x, 2R)} |x-u|^{2-N} q(u) du \leq (2|x-y|)^{2-N} \varphi(2R), \quad (1.9)$$

где $x, y \in B(x_0, R)$, а символом $\varphi(2R)$ обозначено выражение

$$\varphi(2R) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-u| \leq 2R} |x-u|^{2-N} |\tilde{q}(u)| du.$$

В силу принадлежности функции $\tilde{q}$ классу Като K_N функция $\varphi(2R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$. Далее по индукции нетрудно получить оценки

$$|F^{(k)}(x, y, z)| \leq C_N (C_N \varphi(2R))^k |x-y|^{2-N} e^{-\delta|x-y|\sqrt{|z|}}, \quad (1.10)$$

где $x, y \in B(x_0, R)$, а константа C_N зависит только от размерности пространства. Отсюда вытекает, что если число $R_0 > 0$ выбрать так, чтобы выполнялось условие $C_N \varphi(2R_0) < 1$, то функция $F(x, y, z)$ существует в виде ряда из итераций (1.6). Кроме того, из (1.10) вытекают оценки для функции $F(x, y, z)$ в случае $N \geq 3$. Случай $N = 2$ рассматривается аналогично с очевидными изменениями. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Гладкость потенциала в операторе Шрёдингера в данном случае (принадлежность лишь классу Като) не позволяет получить оценки для производных первого порядка фундаментального решения $F(x, y, z)$, в отличие от случая, когда потенциал имеет заданные особенности на поверхности размерности, меньшей чем размерность исходной области (см. [11]).

Символом $\hat{G}_t$, $t \geq 0$, обозначим оператор $(\hat{H} + tI)^{-1}$, который существует в силу положительности оператора $\hat{H}$, является интегральным с ядром $G(x, y, t)$, действует из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и для которого справедливы следующие соотношения:

$$(\hat{H} + tI)\hat{G}_t = \hat{G}_t(\hat{H} + tI) = I, \quad \|\hat{G}_t\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{t + c_0}, \quad c_0 > 0. \quad (1.11)$$

Функция $G(x, y, t)$ называется *функцией Грина* оператора $\hat{H}$, а $\hat{G}_t$ — *оператором Грина*. Мы хотим получить оценки функции $G(x, y, t)$, используя оценки фундаментального решения $F(x, y, z)$. С этой целью введем функцию $F^*(x, y, t)$ следующего вида:

$$F^*(x, y, t) = F(x, y, -t), \quad (1.12)$$

где $x, y \in B(x_0, R)$, $t \geq 0$, а $F(x, y, -t)$ — фундаментальное решение оператора $H + tI$. Тогда для любой функции $f \in D(\hat{H})$, $\text{supp } f \subset B(x_0, R)$, имеет место равенство

$$\int_{B(x_0, R)} F^*(x, y, t) (H_y + tI) f(y) dy = f(x), \quad (1.13)$$

которое получается интегрированием по частям. Далее наряду с областями Ω и Ω_1 из введения рассмотрим произвольную область Ω' , удовлетворяющую условиям

$$\overline{\Omega}_1 \subset \Omega', \quad \overline{\Omega}' \subset \Omega. \quad (1.14)$$

Пусть функция $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такова, что $\eta(x) = 1$, если $x \in \Omega'$. Определим функцию $E(x, y, t)$ следующим образом:

$$E(x, y, t) = F^*(x, y, t)\eta(y). \quad (1.15)$$

Тогда для функции $E(x, y, t)$ в смысле теории распределений справедливо равенство

$$\begin{aligned} (H_y + tI)E(x, y, t) &= \eta(y)(H_y + tI)F^*(x, y, t) + 2\nabla_y \eta(y) \cdot \nabla_y F^*(x, y, t) + (\Delta \eta)F^*(x, y, t) \\ &= \eta(y)(H_y + tI)F^*(x, y, t) + P(x, y, t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где символом $P(x, y, t)$ обозначено выражение

$$2\nabla_y \eta(y) \cdot \nabla_y F^*(x, y, t) + (\Delta \eta)F^*(x, y, t). \quad (1.17)$$

Легко видеть, что функция $P(x, y, t)$ из (1.16) и (1.17) тождественно равна нулю, если $x, y \in B(x_0, R)$ и $y \in \Omega'$. Более того, из оценок (1.5) фундаментального решения и из предыдущего факта следует, что для функции $P(x, y, t)$ справедлива оценка

$$|P(x, y, t)| \leq C_N e^{-\delta_1 \sqrt{t}} \quad (1.18)$$

для $x, y \in B(x_0, R)$ и $x \in \Omega', y \in \Omega$ с некоторым $\delta_1 > 0$. Более того, используя оценку (1.18), нетрудно получить оценку следующего вида:

$$\|H^n \hat{P}f\|_{L^2(B(x_0, R) \cap \Omega')} \leq C_n e^{-\delta_1 \sqrt{t}} \|f\|_{L^2(B(x_0, R))} \quad (1.19)$$

для любого $n = 1, 2, \dots$ и любой функции $f \in L^2(B(x_0, R))$. Здесь и в дальнейшем символом $\hat{P}$ обозначается интегральный оператор с ядром P . Далее для любой функции $f \in D(\hat{H})$, $\text{supp } f \subset B(x_0, R)$, используя (1.13), (1.16), (1.17), получим равенство

$$\hat{E}_t((\hat{H} + tI)f)(x) = f(x) + \hat{P}f(x), \quad (1.20)$$

где $x \in B(x_0, R) \cap \Omega'$. Обозначая теперь $(\hat{H} + tI)f$ символом g , из (1.20) получим равенство

$$\hat{E}_t g(x) = \hat{G}_t g(x) + \hat{P}\hat{G}_t g(x), \quad (1.21)$$

где $x \in B(x_0, R) \cap \Omega'$, а функция $g \in L^2(B(x_0, R))$. Таким образом, используя (1.21), имеем представление для оператора Грина в виде суммы двух интегральных операторов

$$\hat{G}_t g(x) = \hat{E}_t g(x) + \hat{Q}_t g(x), \quad (1.22)$$

где $x \in B(x_0, R) \cap \Omega'$, интегральный оператор $\hat{E}_t$ имеет ядро вида (1.15) и следующие оценки:

$$|E(x, y, t)| \leq C e^{-\delta|x-y|\sqrt{t}} \begin{cases} |x-y|^{2-N}, & N > 2, \\ 1 + |\ln|x-y||, & N = 2, \end{cases} \quad (1.23)$$

где $x, y \in B(x_0, R)$, $x \in \Omega'$, а интегральный оператор $\hat{Q}_t$ действует из $L^2(B(x_0, R))$ в область определения любой натуральной степени оператора $\hat{H}$, что является следствием оценки (1.19).

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрение всей области Ω вместо шара $B(x_0, R)$ получается конечным разбиением единицы. Поэтому в дальнейшем будем считать, не ограничивая общности изложения, что все результаты этого пункта справедливы для всей исходной области Ω .

2. Дробные степени оператора $\hat{H}$ и сходимости рядов Фурье. Пусть слабоколеблющаяся функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям работы автора [13]. По спектральной теореме Дж. Неймана для любого действительного s имеет место представление

$$\hat{H}^s \varphi(\hat{H}) = \int_0^\infty \lambda^s \varphi(\lambda) dE_\lambda, \quad (2.1)$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda=0}^\infty$ – спектральное семейство, соответствующее положительному самосопряженному оператору $\hat{H}$. При этом область определения оператора (2.1) есть множество

$$D(\hat{H}^s \varphi(\hat{H})) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_0^\infty \lambda^{2s} \varphi^2(\lambda) d(E_\lambda f, f) < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

В нашем случае E_λ имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n \cdot u_n(x), \quad (2.3)$$

где f_n – коэффициенты Фурье функции f по полной ортонормированной системе собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ оператора $\hat{H}$. Поэтому соотношения (2.1) и (2.2) переписутся в виде

$$\hat{H}^s \varphi(\hat{H}) f(x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^s \varphi(\lambda_n) f_n \cdot u_n(x), \quad (2.4)$$

$$D(\hat{H}^s \varphi(\hat{H})) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^\infty |f_n|^2 \lambda_n^{2s} \varphi^2(\lambda_n) < \infty \right\}. \quad (2.5)$$

Кроме этого нам потребуется специальное представление отрицательных дробных степеней оператора $\hat{H}$. Пусть число τ удовлетворяет условию $0 < \tau < 1$. В этом случае имеет место следующее представление [13]:

$$\hat{H}^{-\tau} \varphi(\hat{H}) = \frac{\sin \tau \pi}{\pi} \int_0^\infty t^{-\tau} \psi(t) \hat{G}_t dt, \quad (2.6)$$

где функция ψ слабоколеблющаяся и удовлетворяет неравенству $|\psi(t)| \leq C \varphi(t)$. Учитывая теперь представление (1.22), оператор (2.6) легко представить в виде суммы двух интегральных операторов:

$$\hat{H}^{-\tau} \varphi(\hat{H}) = \hat{E}_\varphi^\tau + \hat{Q}, \quad (2.7)$$

где оператор $\hat{Q}$ действует из $L^2(\Omega)$ в область определения любой степени оператора $\hat{H}$, а для ядра $E_\tau^\varphi(x, y)$ интегрального оператора $\hat{E}_\varphi^\tau$ справедливы оценки

$$|E_\tau^\varphi(x, y)| \leq C |x - y|^{2\tau - N} \varphi(|x - y|^{-1}), \quad (2.8)$$

где $0 < \tau < 1$, $x \in \Omega'$, $y \in \Omega$, а константа C зависит от области Ω' . Оценки (2.8) есть следствие оценок (1.23) и результатов работы автора [13]. Справедлива следующая основная лемма.

ЛЕММА. Пусть функция φ удовлетворяет условию Дини на бесконечности. Тогда для любой функции $f \in L^2(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|\hat{H}^{-N/4}\varphi^{1/2}(\hat{H})f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 < N/4 < 1$, то оценка (2.9) вытекает из (2.8) и неравенства Коши–Буняковского. В случае, когда число $N/4 \geq 1$, представим его в виде суммы: $N/4 = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n_0}$, $0 < \tau_j < 1$, $j = 1, \dots, n_0$, а оператор $\hat{H}^{-N/4}\varphi^{1/2}(\hat{H})$ в виде суперпозиции:

$$\hat{H}^{-N/4}\varphi^{1/2}(\hat{H}) = \hat{H}^{-\tau_{n_0}} \circ \dots \circ \hat{H}^{-\tau_1}\varphi^{1/2}(\hat{H}).$$

Затем, применив оценку (2.8) и лемму 1 работы автора [14], получим оценку (2.9). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого компакта $K \subset \Omega$ справедлива равномерная по $x \in K$ оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n(x)|^2 \varphi(\lambda)}{\lambda_n^{N/2}} \leq C_K. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу спектральной теоремы и соотношения (2.4) неравенство (2.9) можно переписать в виде

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-N/4} \varphi^{1/2}(\lambda_n) f_n \cdot u_n(x) \right| \leq C_K \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \right)^{1/2},$$

где $x \in K \subset \Omega$, K – компакт. После этого неравенство (2.10) является следствием двойственности. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 2.1. Для любой функции f , принадлежащей области определения оператора $\hat{H}^{N/4}\varphi^{-1/2}(\hat{H})$, где функция φ удовлетворяет условию Дини на бесконечности, ряд Фурье (0.6) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.4), (2.10) и неравенство Коши–Буняковского, получим неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| |u_n(x)| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \lambda_n^{N/2} \varphi^{-1}(\lambda_n) \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|^2 \lambda_n^{-N/2} \varphi(\lambda_n) \right)^{1/2} \\ &\leq C_K \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \lambda_n^{N/2} \varphi^{-1}(\lambda_n) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

равномерное для $x \in K \subset \Omega$. После этого утверждение теоремы есть следствие неравенства (2.5). Теорема доказана.

Теперь предположим дополнительно к условиям (0.2) введения, что $N = 2$ или $N = 3$ и потенциал $q \in L^2(\Omega)$. В этом случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $1 \leq p \leq 2$, слабоколеблющаяся функция ψ такова, что функция ψ^2 удовлетворяет условию Дини на бесконечности. Тогда для любой функции f , принадлежащей обобщенному классу Бесова $\tilde{B}_{p,2}^{N/p,\psi}(\Omega)$, ряд Фурье (0.6) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение обобщенных классов Бесова можно найти, например, в работе автора [15].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство (см. [2])

$$|(qf, f)| \leq \varepsilon \|f\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}^2 + C(\varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.11)$$

то отсюда легко получить следующее неравенство:

$$|(\hat{H}f, f)| \leq C \|f\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Это неравенство означает, что если потенциал $q \in L^2(\Omega)$, то пространство $\dot{W}_2^2(\Omega)$ содержится в $D(\hat{H})$. Следует отметить, что это утверждение и неравенства (2.11) и (2.12) справедливы для любой размерности пространства N . Если теперь предположить, что $N = 2$ или $N = 3$, то включение $\dot{W}_2^2(\Omega) \subset D(\hat{H})$ влечет за собой включение (см. работу автора [11])

$$\tilde{B}_{2,2}^{N/2,\psi}(\Omega) \subset D(\hat{H}^{N/4}\psi^{-1}(\hat{H})). \quad (2.13)$$

В таком случае, утверждение данной теоремы есть следствие включения (2.13) и теоремы 2.1 данной работы. Теорема 2.2 полностью доказана.

Теперь откажемся от условия того, что $N = 2$ или $N = 3$, но оставим условие принадлежности потенциала $q(x)$ пространству $L^2(\Omega)$. При этом считаем выполненными условия (0.2) введения. В этом случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть потенциал $q(x)$ удовлетворяет вышеперечисленным условиям. Тогда для любой функции $f \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|f - E_\lambda f\|_{W_2^2(\Omega)} = 0. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число μ выбрано достаточно большим и положительным. Символом $\hat{H}_\mu$ обозначим оператор $\hat{H} + \mu I$. Неравенство (2.11) в случае потенциала q из $L^2(\Omega)$ позволяет для любой функции $f \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ легко доказать неравенство

$$\|\hat{H}_\mu f\|_{L^2(\Omega)} \geq C_1 \|f\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)}, \quad (2.15)$$

где $C_1 > 0$. В таком случае имеет место неравенство

$$\|\hat{H}_\mu^{-1} g\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.16)$$

справедливое для любой функции $g \in L^2(\Omega)$. Пусть теперь $f \in \dot{W}_2^2(\Omega)$. Тогда для этой функции имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \|f - E_\lambda f\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)} &= \|\hat{H}_\mu^{-1}(\hat{H}_\mu f - E_\lambda \hat{H}_\mu f)\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)} \\ &\leq \|\hat{H}_\mu f - E_\lambda \hat{H}_\mu f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где последнее неравенство вытекает из (2.16), а стремление к нулю в (2.17) есть следствие спектральной теоремы Дж.Неймана, поскольку для любой функции $f \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ функция $\hat{H}_\mu f \in L^2(\Omega)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kato Т. Schrödinger operators with singular potentials // Isr. J. Math. 1972. V. 13. P. 135–148.
- [2] Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [4] Рисс М., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [5] Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991.
- [6] Alimov S. A., Joo I. On the Riesz summability of eigenfunction expansions // Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 5–18.
- [7] Alimov S. A., Joo I. On eigenfunction expansions connected with the Schrödinger operator // Acta Sci. Math. 1985. V. 48. P. 5–12.
- [8] Халмухамедов А. Р. О сходимости спектральных разложений сингулярного оператора // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2107–2117.
- [9] Халмухамедов А. Р. Разложение по собственным функциям оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1642–1645.
- [10] Ашуров Р. Р. Асимптотика спектральной функции оператора Шрёдингера с потенциалом $q \in L_2(\mathbb{R}^3)$ // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 169–172.
- [11] Серов В. С. Об абсолютной сходимости спектральных разложений операторов с особенностью // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 127–136.
- [12] Серов В. С. О спектральных разложениях функций из H_p^α дифференциального оператора с особенностью на поверхности // Докл. РАН. 1995. Т. 340. № 1. С. 26–28.
- [13] Серов В. С. Обобщенные ядра дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1892–1902.
- [14] Серов В. С. О фундаментальном решении дифференциального оператора с особенностью // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С. 531–534.
- [15] Серов В. С. Об интерполяции классов Бесова и абсолютной сходимости рядов Фурье // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 174–176.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
17.03.1999