Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Волков, В. Л. Мирошниченко, О приближении производных скачком интерполяционного сплайна, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 127–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:54:39

О приближении производных скачком интерполяционного сплайна

Ю. С. Волков, В. Л. Мирошниченко

Пусть $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда $s(x)$ – сплайн степени $2n - 1$ по разбиению Δ , если $s(x) \in C^{2n-2}[a, b]$, и на каждом подотрезке сетки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$, сплайн $s(x)$ есть многочлен степени $2n - 1$. Обозначим

$$\underline{h} = \min_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1}), \quad \bar{h} = \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1})$$

соответственно наименьший и наибольший шаги разбиений. Считаем, что сплайн $s(x)$ в узлах сетки интерполирует значения некоторой достаточно гладкой функции $f(x)$, т.е. $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, N$. Также считаем, что $s(x)$ и $f(x)$ являются $(b - a)$ -периодическими, что однозначно определяет сплайн $s(x)$ (см., например, [1], [2]).

Хорошо известно, что полиномиальные сплайны $s(x)$, интерполирующие значения гладкой функции $f(x)$, обладают хорошими аппроксимативными свойствами, и вместе с приближением самой функции $f(x)$ производные сплайна $s^{(k)}(x)$ приближают соответствующие производные $f^{(k)}(x)$ интерполируемой функции (см., например, [1], [2]). И, что самое удивительное, сплайном нечетной степени $2n - 1$ можно приблизить производную $f^{(2n)}(x)$ интерполируемой функции несмотря на то, что производная любого звена (куска полинома) такого сплайна тождественно равна нулю. Именно величина разрыва

$$\beta_i = s^{(2n-1)}(x_i + 0) - s^{(2n-1)}(x_i - 0)$$

старшей $(2n - 1)$ -й производной сплайна в узле x_i , отнесенная к величине шага равномерной сетки (называемая *скачком*), приближает $(2n)$ -ю производную исходной функции.

По видимому, впервые такой результат был получен в 1967 г. [2], [3]. Альберг, Нильсон, Уолш [2] показали только сам факт приближения, а Куртис, Повелл [3] для кубических сплайнов установили порядок приближения, который оказался достаточно высоким, используя, однако, эвристические аргументы. Для сплайнов пятой степени порядок приближения приведен в работах [4], [5]. Порядок приближения скачком для сплайнов произвольной нечетной степени установлен практически одновременно и независимо в работах [6], [7].

Все указанные результаты о приближении скачком сплайна доказаны для случая равномерной сетки и периодических краевых условий; однако для кубического случая Альберг, Нильсон, Уолш [2] показали, что

$$\max_i \left| \frac{\beta_i}{\bar{h}} - f^{(4)}(x_i) \right| \rightarrow 0$$

на последовательности сеток, стремящихся к равномерным. Кроме того, в работе [8] рассмотрены и иные граничные условия.

Для представления сплайнов и производных удобно использовать базис из нормализованных B -сплайнов [1], которые неотрицательны и имеют минимальный носитель из $2n$ последовательных интервалов разбиения

$$N_i(x) = (x_{i+2n} - x_i) \cdot (-x)_+^{2n-1} [x_i, \dots, x_{i+2n}],$$

Работа выполнена при поддержке Отделения математических наук РАН (грант № 2009-1.3.8), Интеграционных проектов СО РАН (грант № 2009-81) и проектов СО РАН, выполняемых совместно с УрО РАН (грант № 2009-14).

причем

$$\sum_{j=i-2n+1}^i N_j(x) \equiv 1, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Однако в случае периодических сплайнов для представления более удобны периодические аналоги – периодические B -сплайны. Сетку Δ считаем периодически продолженной за пределы отрезка $[a, b]$; тогда периодические B -сплайны определяем так:

$$\tilde{N}_i(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} N_{i+\nu N}(x).$$

Отметим, что если $N > 2n$, то в этой сумме при любом значении x не более одного ненулевого слагаемого.

Интерполяционный сплайн $s(x)$ однозначно может быть представлен в виде разложения по базису:

$$s(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{N}_i(x), \quad x \in [a, b].$$

Для разрывов в узлах сетки старшей производной сплайна

$$\beta_i = s^{(2n-1)}(x_i + 0) - s^{(2n-1)}(x_i - 0)$$

известна [9], [10] система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \tilde{N}_i(x_j) \beta_j = (2n-1)! \{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+2n}] - f[x_i, \dots, x_{i+2n-1}]\}. \quad (1)$$

Интересно отметить, что матрицей данной системы является транспонированная матрица от хорошо известной коллокационной матрицы.

ТЕОРЕМА 1. Для равномерной сетки ($\underline{h} = \bar{h} = h$) имеет место

$$\frac{\beta_i}{h} = f^{(2n)}(x_i) + o(1).$$

Доказательство немедленно следует из таких фактов, что по свойствам разделенных разностей

$$(2n-1)! \{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+2n}] - f[x_i, \dots, x_{i+2n-1}]\} = \frac{x_{i+2n} - x_i}{2n} f^{(2n)}(\xi_i)$$

для некоторого $\xi_i \in [x_i, x_{i+2n}]$, и для равномерной сетки

$$\sum_{j=1}^N \tilde{N}_i(x_j) = \sum_{j=1}^N \tilde{N}_j(x_i) = 1$$

теорема 1 была доказана в [2]. Там же в кубическом случае была доказана подобная теорема для последовательности сеток, стремящихся к равномерным. Теперь мы можем сформулировать и в общем случае такое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность сеток $\{\Delta\}$ такова, что $\bar{h}/\underline{h} \rightarrow 1$; тогда

$$\frac{\beta_i}{h} \rightarrow f^{(2n)}(x_i).$$

Если же последовательность сеток не стремится к равномерной, т.е. не выполнено условие $\bar{h}/\underline{h} \rightarrow 1$, то в общем случае неравномерной сетки не ясно, что понимать под скачком: на какой из шагов сетки надо делить величину β_i ? Можно попробовать под скачком понимать величину β_i/H_i , где, например, H_i – полусумма шагов слева и справа или какое-нибудь более сложное выражение.

Перепишем систему (1) в виде

$$\sum_{j=1}^N \frac{2n}{x_{i+2n} - x_i} \tilde{N}_i(x_j) \beta_j = (2n)! f[x_i, \dots, x_{i+2n}].$$

Очевидно, что β_i/H_i будет приближать величину $f^{(2n)}(x_i)$ только в том случае, если будет выполнено условие

$$\sum_{j=1}^N \frac{2n}{x_{i+2n} - x_i} H_j \tilde{N}_i(x_j) = 1. \quad (2)$$

Несмотря на то, что в сумме слева в (2) только лишь $2n - 1$ слагаемых отличны от нуля (при $N > 2n$), не ясно какое предложить выражение для H_i , чтобы равенства (2) выполнялись для всех i .

Тем не менее, выражение для H_i для некоторых специальных сеток можно подобрать.

ТЕОРЕМА 3. Если расположение узлов сетки таково, что

$$x_{2k+1} - x_{2k} = h_0, \quad x_{2k} - x_{2k-1} = h_1 \quad \text{для всех } k,$$

то равенства (2) выполняются для всех i при $H_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$ и, следовательно,

$$\frac{\beta_i}{H_i} = f^{(2n)}(x_i) + o(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такое разбиение отрезка $[a, b]$ хотя и является неравномерным, но имеется лишь 2 различных шага сетки h_0 и h_1 , которые строго чередуются. На такой сетке будут всего 2 принципиально различных B -сплайна, остальные получаются их сдвигом. Причем поскольку носитель всегда состоит из четного числа интервалов сетки, то эти различные B -сплайны получаются один из другого симметричным отражением относительно середины носителя. Следовательно, $N_i(x_{i+k}) = N_{i+1}(x_{i+2n+1-k})$. В этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \tilde{N}_i(x_j) &= N_i(x_{i+1}) + \dots + N_i(x_{i+2n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} N_i(x_{i+2j+1}) + \sum_{j=1}^{n-1} N_i(x_{i+2j}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} N_{i-2j}(x_{i+1}) + \sum_{j=1}^{n-1} N_{i+1}(x_{i+2n+1-2j}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} N_{i-2j}(x_{i+1}) + \sum_{j=1}^{n-1} N_{i+1-2n+2j}(x_{i+1}) = N_{i-2n+2}(x_{i+1}) + \dots + N_i(x_{i+1}) = 1. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{2n}{x_{i+2n} - x_i} = \frac{2}{h_0 + h_1}, \quad H_j = \frac{h_0 + h_1}{2},$$

получаем выполнение равенств (2) для всех i . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, М., 1980. [2] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The Theory of Splines and their Applications*, Academic Press, New York, 1967. [3] A. R. Curtis, M. J. D. Powell, *Using Cubic Splines to Approximate Functions of One Variable to Prescribed Accuracy*, Atomic Energy Research Establishment, Report R5602, Harwell, 1967. [4] D. J. Fyfe, *J. Inst. Math. Appl.*, **7**:3 (1971), 398–406. [5] Б. С. Киндалев, *Вычисл. системы*, **87**, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, 18–24. [6] Б. С. Киндалев, *Вычисл. системы*, **93**, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1982, 39–52. [7] T. R. Lucas, *SIAM J. Numer. Anal.*, **19**:5 (1982), 1051–1066. [8] T. R. Lucas, *SIAM J. Numer. Anal.*, **11**:3 (1974), 569–584. [9] Ю. С. Волков, *Равномерная сходимость производных интерполяционных сплайнов нечетной степени*, Препринт № 62, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1984. [10] Ю. С. Волков, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **13**:3 (2010), 243–253.

Ю. С. Волков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
E-mail: volkov@math.nsc.ru

Поступило

19.04.2010

В. Л. Мирошниченко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
E-mail: miroshn@math.nsc.ru