Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О компактных асферичных однородных многообразиях размерности ≤ 7 , *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 202–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:28:45

О компактных асферичных однородных многообразиях размерности ≤ 7

В. В. Горбачевич

В статье обсуждается классификация асферичных компактных однородных многообразий до размерности 7 включительно.

Библиография: 18 названий.

Введение. Мы будем рассматривать компактные однородные многообразия M , которые как топологические пространства являются асферичными, т.е. гомотопические группы которых $\pi_k(M)$ при всех $k \geq 2$ тривиальны. Под *однородным* многообразием понимается гладкое многообразие, на котором существует гладкое транзитивное действие некоторой конечномерной группы Ли (т.е. такое многообразие является однородным пространством некоторой группы Ли). При этом важно именно существование такого действия, само же это действие, как и соответствующая ему транзитивная группа Ли, тут не фиксируются. Однородное пространство группы Ли G всегда можно записать в виде G/H , где G – транзитивная группа Ли (которая далее обычно предполагается связной), а H – ее замкнутая подгруппа (она является стационарной подгруппой некоторой точки многообразия M). В данной статье многообразие M обычно будет компактным.

Ранее в течение многих лет автор в своих статьях уже рассматривал вопросы, касающиеся произвольных компактных однородных многообразий. Описание строения компактных однородных многообразий было резюмировано в обзоре [1] (позже автор сделал ряд существенных дополнений к указанным там результатам). Перечисление всех компактных однородных многообразий размерности ≤ 5 с точностью до диффеоморфизма было дано в [2]–[4]. Для случая размерности 6 автором было получено в [5] описание всех компактных однородных многообразий с точностью до конечнолистного накрытия.

Подход автора к описанию компактных однородных многообразий M основан, в частности, на понятии натурального расслоения. Так называется гладкое расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$, где M' – некоторое многообразие, конечнолистно накрывающее M (оно тоже компактно и однородно), база M_a этого расслоения асферична, а слой M_c является однородным пространством некоторой компактной полупростой группы Ли. При этом база и слой этого расслоения являются – с точностью до конечнолистного накрытия – гомотопическими (а часто и топологическими) инвариантами исходного многообразия M .

Обычно размерности $\dim M_a$ и $\dim M_c$ меньше, чем размерность $\dim(M)$ исходного многообразия M . Это позволяет использовать натуральное расслоения для упрощения изучения строения компактных однородных многообразий, сводя в какой-то мере его к изучению многообразий – базы и слоя натурального расслоения – меньшей размерности (однако не обязательно однородных, ибо база M_a , вообще говоря, однородной не будет). Только в двух крайних случаях такой подход совершенно неэффективен – если $M = M_c$ (но тут M почти односвязно – его фундаментальная группа конечна, а этот случай был уже довольно подробно рассмотрен многими авторами ранее) или же если $M = M_a$, т.е. если однородное многообразие M асферично. Именно изучению второго случая и посвящена данная статья. Более точно, здесь в основном будут рассмотрены асферичные однородные многообразия малой размерности. Среди них, в частности, выделяются компактные солвмногообразия (однородные пространства разрешимых групп Ли) малой размерности, которые представляют собой очень интересный, хотя и довольно трудный для изучения класс однородных многообразий.

В статье будут использоваться некоторые известные результаты об однородных пространствах групп Ли, обзор которых можно найти, например, в [1].

На самом деле результаты этой статьи справедливы и в более общем случае: а именно, для плезиокомпактных асферичных однородных многообразий. В этом случае, однако, база M_a натурального расслоения не всегда компактна, но многие результаты, доказанные автором для случая компактных однородных многообразий, были им же потом обобщены (иногда после соответствующих переформулировок) на плезиокомпактный случай.

Среди плезиокомпактных однородных многообразий мы видим, например, такое “классическое” многообразие, как $SL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$, и многие другие интересные многообразия. В данной статье иногда будут указываться те изменения, которые нужно внести в те или иные утверждения, если рассматривать не только компактные, но и все плезиокомпактные однородные многообразия.

Асферичным однородным многообразиям были посвящены статьи автора [6], [7], а также некоторые разделы других его работ. Напомним, что любое солвмногообразие – однородное пространство разрешимой группы Ли – всегда будет асферично. Поэтому изучение асферичных однородных многообразий – это естественный следующий шаг после изучения компактных солвмногообразий, которые изучаются уже много десятков лет, причем в последние десять лет привлекли к себе пристальное внимание специалистов в самых различных областях математики.

В п. 1 данной статьи рассмотрены понятия асферичных групп и алгебр Ли, а также некоторые свойства таких групп и алгебр Ли. В дальнейшем в данной статье эти результаты будут использованы при изучении асферичных однородных многообразий.

В п. 2 изучены специальные асферичные однородные пространства (для таких асферичных однородных пространств стационарная подгруппа дискретна). Подробно рассмотрено строение решеток в асферичных группах Ли.

В п. 3 описаны компактные солвмногообразия размерности ≤ 7 , а в п. 4 – произвольные компактные однородные многообразия тех же размерностей, рассматриваемые с точностью до конечнолистного накрытия. Здесь доказана теорема 2 – основ-

ной результат данной статьи, дающая описание (с точностью до конечнолистного накрытия) компактных асферичных однородных многообразия размерности 7. Вместе с подобными описаниями для меньших размерностей, ранее полученных автором, этот результат дает описание (с точностью до конечнолистного накрытия) всех компактных асферичных однородных многообразий размерности ≤ 7 .

1. Асферичные группы и алгебры Ли. Пусть $M = G/H$ – асферичное однородное пространство группы Ли G . Тогда транзитивная группа Ли G не обязательно будет асферичной как топологическое пространство (даже если она действует на M локально эффективно). Например, если G – произвольная связная группа Ли, а K – ее максимальная компактная подгруппа, то многообразие G/K диффеоморфно евклидову пространству и потому, в частности, является асферичным. Но при этом группа Ли G вовсе не обязательно должна быть сама асферичной. Но вот если асферичное однородное многообразие M еще и компактно, то любая группа Ли, транзитивная и локально эффективная на нем, обязательно будет асферичной (как топологическое пространство). Этот факт (доказанный в [6]), приводит к полезности рассмотрения асферичных групп Ли как отдельного класса групп Ли.

Итак, по определению группа Ли называется *асферичной*, если она асферична как топологическое пространство (т.е. все ее гомотопические группы, начиная со второй, тривиальны). Напомним роль первой (фундаментальной) гомотопической группы для описания асферичных пространств: такие пространства определяются своей фундаментальной группой однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности. Далее, алгебру Ли назовем асферичной, если соответствующая ей связная группа Ли асферична. При этом выбор группы Ли с данной алгеброй Ли в данном случае несущественен, так как все такие группы Ли локально изоморфны и потому одновременно либо все асферичны, либо все они не являются асферичными (у них гомотопические группы π_k при каждом $k \geq 2$ изоморфны).

Если группа Ли G асферична, то любое ее однородное пространство будет асферичным [6].

Важный класс асферичных групп Ли – стягиваемые или, как мы их будем далее называть, *гомотопически тривиальные* группы Ли. Так будут называться группы Ли, которые гомотопически эквивалентны точке, т.е. могут быть стянуты (непрерывно или даже гладко) в точку. У них все гомотопические группы тривиальны. В [7] показано, что все такие группы Ли диффеоморфны евклидову пространству (причем даже в случае, когда все гомотопические группы этих групп Ли предполагаются лишь конечными). Ясно, что гомотопически тривиальные группы Ли – это в точности все односвязные асферичные группы Ли.

Алгебраическое строение асферичных групп Ли хорошо известно (см. например [1], [6]). Они имеют почти полупрямое разложение (разложение Леви) вида $S \cdot R$, где полупростая часть S локально изоморфна прямому произведению некоторого (возможно, нулевого) числа экземпляров группы Ли $\mathcal{A}$ (универсальной накрывающей – причем диффеоморфной $\mathbb{R}^3$ – для группы Ли $SL_2(\mathbb{R})$), а R – радикал рассматриваемой группы Ли (на него тут нет никаких ограничений). Пересечение $S \cap R$ дискретно.

Подалгебра h в алгебре Ли g называется *замкнутой*, если для некоторой связной группы Ли G , алгебра Ли которой изоморфна g , связная подгруппа H , соответствующая подалгебре h , будет замкнута в G . Отметим, что в этом определении выбор группы Ли G с заданной алгеброй Ли часто бывает очень существенен – для других групп Ли с той же алгеброй Ли соответствующая связная подгруппа Ли может оказаться и незамкнутой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В асферичной алгебре Ли любая подалгебра замкнута.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, замкнутость связной подгруппы Ли в некоторой группе Ли G эквивалентна замкнутости ее пересечений со всеми компактными подгруппами группы Ли G [8]. Мы здесь будем использовать односвязные асферичные группы Ли G – т.е. гомотопически тривиальные. Но для них все компактные подгруппы тривиальны. Поэтому и пересечения с ними – всегда тривиальны. Поэтому соответствующие всем подалгебрам Ли связные подгруппы Ли замкнуты.

Заметим, что условие асферичности тут существенно. Например, в алгебре Ли $\mathfrak{su}(3)$ (очевидно, не асферичной) одномерная подалгебра, дающая иррациональную обмотку двумерного тора в соответствующей группе Ли $SU(3)$, не будет замкнутой.

Если группа Ли G разрешима и односвязна, то она, как известно, диффеоморфна $\mathbb{R}^n$, в частности, она гомотопически тривиальна. При этом такая группа Ли будет и линейной, т.е. для нее существует точное линейное представление. Для произвольных гомотопически тривиальных групп Ли подобное утверждение уже неверно. Дело в том, что уже асферичная группа Ли $\mathcal{A}$ не является линейной. Более того, среди локально изоморфных ей групп Ли линейны только две – это $SL(2, \mathbb{R})$ и $PSL(2, \mathbb{R})$. Этот факт вытекает из того, что линеаризатор группы Ли $\mathcal{A}$ (наименьший нормальный делитель, фактор-группа по которому линейна) для группы Ли $\mathcal{A}$ равен $2Z(\mathcal{A})$, где $Z(\mathcal{A})$ – центр группы Ли $\mathcal{A}$ (см. например [9]). При этом $\mathcal{A}/2Z(\mathcal{A}) = SL(2, \mathbb{R})$, а $\mathcal{A}/Z(\mathcal{A}) = PSL(2, \mathbb{R})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Асферичная группа Ли G линейна тогда и только тогда, когда линейен ее радикал, а полупростая часть конечнолистно покрывается прямым произведением групп Ли $SL(2, \mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [8] доказано, что связная группа Ли линейна тогда и только тогда, когда линейны ее полупростая часть и радикал. Поэтому нам остается только доказать утверждение предложения 1, касающееся полупростой части S группы Ли G .

Так как группа Ли G асферична, то ее полупростая часть S локально изоморфна прямому произведению нескольких экземпляров группы Ли $\mathcal{A}$. Более того, S универсально покрывается этим произведением. Так как линеаризатор прямого произведения простых групп Ли – прямое произведение линеаризаторов прямых множителей, то мы получаем, что прямое произведение групп Ли вида $SL(2, \mathbb{R})$ – это максимальная (относительно накрытий) линейная полупростая асферичная группа Ли. Тем самым указанное в формулировке предложения 1 свойство полупростой части доказано.

Линейность асферичных групп Ли (рассмотренная в предложении 2) полезна при построении полупростых расщеплений для таких групп Ли и их подгрупп.

Укажем в заключение этого пункта известное описание линейных разрешимых групп Ли R . Во-первых, для них коммутант $[R, R]$ обязательно односвязен. Во-вторых, такая R всегда может быть разложена в полупрямое произведение $R = C \cdot R_1$ тора C (связной компактной абелевой группы Ли) и некоторой односвязной разрешимой группы Ли R_1 . Более того, любая группа Ли, допускающая разложение указанного выше вида, обязательно линейна.

2. Специальные компактные асферичные однородные многообразия.

Однородное пространство G/H группы Ли G называется *специальным*, если для него стационарная подгруппа H дискретна. Любое специальное однородное пространство параллелизуемо как гладкое многообразие (т.е. его касательное расслоение тривиально), однако обратное утверждение неверно – например, для компактных ориентируемых солвмногообразий размерности 4: все они параллелизуемы, но не все диффеоморфны специальным (см., например, [10]).

Транзитивное действие группы Ли G на специальном однородном пространстве G/H локально свободно, поэтому такие однородные пространства можно было бы называть и локально-групповыми.

По аналогии с понятием однородного многообразия некоторое многообразие M будем называть специальным однородным, если существует транзитивное действие на M некоторой группы Ли, для которого это многообразие является специальным однородным.

В [7] доказана (без использованной введенной здесь терминологии)

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного асферичного компактного однородного многообразия существует многообразие, его конечнолистно накрывающее и являющееся специальным однородным многообразием.*

Для частного случая компактных солвмногообразий этот результат был доказан в [11]. На самом деле утверждение, аналогичное теореме 1, верно и для любых плезиокомпактных асферичных однородных многообразий.

Рассмотрим теперь подробнее строение компактных специальных асферичных однородных многообразий M . Мы их будем рассматривать с точностью до конечнолистного накрытия, т.е. в случае необходимости будем переходить к некоторому многообразию (всегда тоже однородному, компактному и асферичному), которое конечнолистно накрывает исходное однородное асферичное многообразие M . Как показывает опыт изучения произвольных компактных однородных многообразий, переход к подходящему конечнолистному накрытию часто существенно упрощает изучение таких многообразий.

Итак, рассмотрим некоторое компактное асферичное специальное однородное многообразие M . Точнее, пусть $M = G/\Gamma$, где G – односвязная асферичная группа Ли, а Γ – решетка в ней (т.е. дискретная подгруппа с компактным фактор-пространством). Тут фундаментальная группа $\pi_1(M)$ изоморфна группе Γ . Имеем разложение Леви $G = S \cdot R$ (полупрямое произведение), где $S = \times \mathcal{A}$, R – радикал. Так как полупростая группа Ли S не имеет компактных факторов, то (в силу [11], см. также [1]) решетку Γ или некоторую ее подгруппу конечного индекса можно гладко продеформировать внутри группы Ли G в такую решетку Γ' , которая имеет разложение в полупрямое произведение $\Gamma' = (S \cap \Gamma') \cdot (R \cap \Gamma')$ решеток $S \cap \Gamma'$ и $R \cap \Gamma'$

в полупростой (S) и разрешимой (R) группах Ли соответственно. При этом многообразии G/Γ конечнолистно покрывается многообразием, диффеоморфным G/Γ' . Все это более подробно было рассмотрено в [7]. В дальнейшем мы будем считать, что уже сама решетка Γ имеет разложение в полупрямое произведение указанного выше вида, так как переход к подгруппе конечного индекса в ней эквивалентен переходу от M к многообразию, его конечнолистно покрывающему.

Положим

$$\Gamma_s = \Gamma \cap S, \quad \Gamma_r = \Gamma \cap R.$$

Пересечение $\Gamma_s \cap Z(S)$ имеет конечный индекс в $Z(S)$, а $\Gamma_r = \mathbb{Z}^l \cdot (\Gamma \cap R)$ – полупрямое произведение (см. [7]). Отметим, что группа $S^* = S/Z(S)$ изоморфна $\bigtimes_i \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Разрешимую группу Ли R , содержащую решетку Γ_r , можно выбрать обладающей некоторыми специальными свойствами (конструкции такого рода см. в [1], [11]), но мы это здесь использовать не будем.

Продолжим описание группы Γ далее. Можно доказать, что группа Γ_s определяется по Γ однозначно с точностью до соизмеримости (см. [7]), так же как и группа Γ_r .

В дальнейшем нам понадобится использовать еще одно расслоение, введенное автором ранее для изучения произвольных компактных однородных многообразий. Речь идет о структурном расслоении (подробно описанном в [1]).

Структурное расслоение строится для базы M_a натурального расслоения; в рассматриваемом нами случае это гладкое расслоение вида $M_s \rightarrow M_a \rightarrow M_r$, где база M_s представляется в виде пространства двойных смежных классов $K^* \setminus S^*/\Gamma^*$ (здесь S^* – это прямое произведение нескольких экземпляров группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, K^* – максимальная компактная подгруппа в S^* , а Γ^* – решетка в S^* , причем свободная от кручения), а слой $M_r = R/D$ (специальное солвмногообразие), где D – решетка в некоторой односвязной разрешимой группе Ли R . Полезно отметить, что здесь база M_s никогда однородной не будет (см. [1]).

Ясно, что размерность базы этого расслоения четна (это следует из того, что $\dim(\mathrm{SO}(2) \setminus \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})) = 2$), пусть $\dim M_s = 2k$. Рассмотрим здесь простейшие случаи.

Пусть вначале $k = 0$. Здесь $G/\Gamma = R/D$ – солвмногообразие. О них подробнее см. следующий пункт.

При $k = 1$ база структурного расслоения – это M_g (замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$). Любая такая поверхность, как известно, конечнолистно покрывает поверхность F_2 , поэтому с точностью до конечнолистного накрытия эта база диффеоморфна F_2 – ориентируемой поверхности рода 2 (крендель). Если же исходное компактное асферичное однородное многообразие плезикомпактно, то для M_s возможны и другие варианты (могут появляться и некомпактные поверхности конечной инвариантной меры).

Структурное расслоение порождает следующую точную последовательность фундаментальных групп:

$$1 \rightarrow \pi_r \rightarrow \pi \rightarrow \pi_s \rightarrow 1.$$

Здесь группа $\pi_s = \pi_1(F_2)$ задается, как известно, образующими и соотношениями так:

$$\pi_s = \langle x_1, x_2, y_1, y_2 \mid [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = e \rangle.$$

Характеристический класс этого расширения – это некоторый когомологический класс $c \in H^2(\pi_s, Z(\pi_r))$ (это характеристический класс расширения, см. подробнее описание расширений групп в [12]). Действие π_s на $Z(\pi_r)$ при этом, к сожалению, может быть нетривиальным. Поэтому подробное явное описание возможных характеристических классов в нашем случае получить не удается.

Пусть теперь $k = 2$, т.е. $\dim(M_s) = 4$.

Если решетка Γ_s приводима (о понятии приводимости решеток см. например [9]), то с точностью до конечнолистного накрытия M_s диффеоморфно $F_2 \times F_2$. Рассмотрим теперь случай, когда Γ_s неприводима. Такие решетки всегда арифметичны (подробнее см. [9]) и потому могут быть описаны достаточно явно. Отметим, что число максимальных среди них конечно.

Ниже приводится конструкция арифметических решеток в $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$, подробнее см. [9; с. 86–90, особенно 89–90], там же сказано про максимальные среди них. Некоторые дополнительные сведения я почерпнул на лекциях И. И. Пятецкого-Шапиро в конце 70-х гг. прошлого века в МГУ.

Итак, пусть K – абсолютно вещественное поле (т.е. любое его вложение в $\mathbb{C}$ на самом деле оказывается вложением в $\mathbb{R}$). Положим $\deg K = N$. При $N = 2$ имеем некоторое квадратичное поле (например, таким будет поле, порожденное уравнением $x^2 - x - 1 = 0$).

Пусть $\phi_i: K \hookrightarrow \mathbb{R}$ – все вещественные вложения поля K . Далее, пусть A – некоторая ассоциативная алгебра над K с делением такая, что $\dim_K(A) = 4$ (это будут простые центральные алгебры, называемые обычно алгебрами кватернионов над K – см. [13; с. 230–231]). Всякая такая алгебра кватернионов изоморфна $D(a, b)$ – ассоциативной алгебре с базисом $1, i, j, k$ и соотношениями $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k$. Сама пара чисел (a, b) называется *символом* Гильберта, который для данной алгебры A определен, вообще говоря, не однозначно.

В частности, обычная алгебра кватернионов (Гамильтона) изоморфна $D(-1, -1)$. Далее, алгебра $D(1, 1)$ изоморфна матричной алгебре $M_2(K)$. Если алгебра кватернионов над K не изоморфна $M_2(K)$, то она является телом.

Если поле K алгебраически замкнуто, то любая алгебра кватернионов изоморфна $M_2(K)$. Над полем $K = \mathbb{R}$ алгебра кватернионов изоморфна $M_2(\mathbb{R})$ или же алгебре кватернионов Гамильтона $\mathbb{H}$ (теорема Фробениуса).

Отметим, что если L – некоторое расширение поля K , то $D \otimes L$ – алгебра кватернионов над L .

Перейдем теперь к построению неприводимых решеток на основе введенных выше понятий.

Положим $A_i = A \otimes_{\phi_i(K)} \mathbb{R}$. Это тоже будут ассоциативные алгебры размерности 4. В силу сказанного выше A_i изоморфны $M_2(\mathbb{R})$ или $\mathbb{H}$.

Предположим, что только две (т.е. пусть $n = 2$) алгебры среди A_i изоморфны $M_2(\mathbb{R})$, а все остальные $N - 2$ указанные алгебры изоморфны $\mathbb{H}$; это нам нужно, так как, напомним, мы строим решетки в прямом произведении именно двух групп Ли $SL(2, \mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь A^* – мультипликативную группу алгебры A , а также естественное вложение и естественный эпиморфизм:

$$A^* \hookrightarrow GL(2, \mathbb{R})^n \rightarrow PGL(2, \mathbb{R})^n$$

(у нас $n = 2$). В нашем случае речь идет о таких вложении и эпиморфизме:

$$A^* \hookrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}).$$

Посмотрим теперь на A^* с другой точки зрения: имеются такие вложения $A^* \subset A \subset A \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Рассмотрим $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – это линейное пространство над $\mathbb{R}$ размерности N . Поэтому $\dim A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = 4N$, причем алгебра $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ изоморфна $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_N$.

Рассмотрим теперь

$$\left(A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \right)^n = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})^n \times (\mathbb{H}^*)^{N-n}$$

(напомним, что у нас $n = 2$). Проекция на прямой множитель $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})^n$ дает вложение $A^* \hookrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})^n$.

Наконец, пусть $\mathcal{O}$ – некоторый порядок в A , а Γ – группа единиц в $\mathcal{O}$. Тогда Γ будет неприводимой арифметической решеткой в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Отсюда естественным образом получаем и неприводимую решетку в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

В результате мы описали общую конструкцию неприводимых решеток в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ на основании того, что они все арифметичны. Это дает нам в сочетании со сказанным выше о случае приводимых решеток описание (с точностью до конечнолистного накрытия) всевозможных баз M_s структурных расслоений для асферичных компактных однородных многообразий при $k = 2$.

3. О компактных солвмногообразиях размерности ≤ 7 . Напомним, что солвмногообразие – это однородное пространство некоторой разрешимой группы Ли или же многообразие, на котором существует транзитивное действие некоторой разрешимой группы Ли, хотя на нем могут транзитивно действовать и группы Ли, не являющиеся разрешимыми. Например, на двумерном торе – солвмногообразии – имеется транзитивное действие простой группы Ли $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Специальное солвмногообразие – это многообразие вида R/Γ , где Γ – решетка в разрешимой односвязной группе Ли R (которую можно считать односвязной).

Всякое компактное солвмногообразие конечнолистно покрывается специальным (причем степень накрытия можно считать степенью двойки) [10].

Мы будем здесь рассматривать компактные солвмногообразия M размерности ≤ 7 , причем с точностью до конечнолистного накрытия. Поэтому мы можем считать, что $M = R/\Gamma$, где Γ – решетка в разрешимой односвязной группе Ли R размерности ≤ 7 .

Отметим, что имеются классификации разрешимых алгебр Ли (комплексных и вещественных) размерностей ≤ 6 , но они очень громоздки. Поэтому мы их использовать не будем.

С точностью до диффеоморфизма компактное солвмногообразие определяется однозначно своей фундаментальной группой, изоморфной для многообразия вида R/Γ решетке Γ (при условии, что группа Ли R разрешима и односвязна). Поэтому нам важнее не описание односвязных разрешимых групп Ли и соответствующих им алгебр Ли, а описание решеток в них, причем с точностью до соизмеримости. Одна и та же группа может быть реализована в виде решетки в различных односвязных разрешимых группах Ли, что позволяет при переходе к изучению решеток

несколько упростить задачу классификации. Отметим, что если решетка Γ разлагается в прямое произведение двух групп, то и соответствующее солвмногообразие разлагается в прямое произведение соответствующих этим группам солвмногообразий (подробнее см. [1]).

Будем рассматривать по очереди случаи, когда группа Γ абелева, нильпотентна и разрешима (не нильпотентна).

Случай 1. Пусть Γ абелева. Тогда многообразие M диффеоморфно тору T^n .

Случай 2. Пусть теперь Γ неабелева, но нильпотентна. Такая группа может быть решеткой и в ненильпотентных группах Ли, но она обязательно будет решеткой и в некоторой нильпотентной группе Ли. Поэтому мы можем тут ограничиться случаем, когда $M = N/\Gamma$, где Γ – решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N размерности ≤ 7 .

Имеются классификации нильпотентных алгебр Ли малых размерностей. До размерности 6 включительно такие алгебры Ли классифицированы над произвольным полем характеристики 0 [14]. Решетки в соответствующих односвязных нильпотентных группах Ли тесно связаны с рациональными нильпотентными алгебрами Ли. Поэтому указанная классификация, в частности (над полем $\mathbb{Q}$), дает описание с точностью до соизмеримости всех решеток в нильпотентных односвязных группах Ли размерности ≤ 6 . При этом до размерности 5 число таких решеток конечно, а в размерности 6 появляются бесконечные (счетные) семейства попарно несоизмеримых решеток. Поэтому до размерности 6 можно считать уверенно установленной классификацию всех компактных нильмногообразий (с точностью до конечнолистного накрытия). Явно мы ее здесь выписывать не будем. Отметим, что для наших целей можно было бы ограничиться только классификацией нильпотентных алгебр Ли, не разложимых в прямые суммы.

В размерности 7 ситуация более сложная. Имеется несколько классификаций нильпотентных алгебр Ли размерности 7, причем над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Эти классификации по своей форме иногда различаются, при этом ведется постоянная работа по их унификации. К сожалению, в этой размерности нет классификации над произвольным полем характеристики 0 и потому нет описания решеток в соответствующих нильпотентных группах Ли. Ясно только, что тут существует немало бесконечных серий.

Случай 3. Пусть Γ разрешима, но не нильпотентна. В этом случае и группа Ли R не будет нильпотентна, через N обозначим ее нильрадикал. Тогда $\Gamma \cap N$ – решетка в N , причем алгебра Ли нильпотентной группы Ли N имеет рациональную структуру (подробнее см. [1], [8]).

Размерность нильрадикала N не меньше, чем $(\dim R + \dim Z(R))/2$, где $Z(R)$ – центр группы Ли R [15]. В частности, если $\dim(R) = 7$, то $\dim(N) \geq 4$, а при $\dim R = 6$ будет $\dim(N) \geq 3$. Отметим, что знание $\dim Z(R)$ тут бывает очень полезно (см. ниже).

Начнем с рассмотрения самого сложного случая – когда $\dim(R) = 7$. Тогда возможны значения $\dim(N) = 4, 5, 6$ (при $\dim(N) = 7$ мы приходим к уже рассмотренному выше нильпотентному случаю). Рассмотрим по-отдельности все три эти возможных случая, ограничиваясь только той информацией, которая нам будет полезна в дальнейшем.

Пусть вначале $\dim(N) = 4$. Тут группа Ли N будет (как следует из упоминавшейся выше классификации нильпотентных алгебр Ли малой размерности) изоморфна $\mathbb{R}^4$, $N_3 \times \mathbb{R}$ или N_4 (филиморфная группа Ли). Алгебры Ли указанных выше групп Ли N_k , $k = 3, 4$, задаются в подходящих базисах $\{X_i\}$ коммутационными соотношениями $[X_1, X_i] = X_{i+1}$.

При $\dim(N) = 5$ группа Ли N изоморфна одной из шести групп Ли $N_{5,i}$, перечисленных, например, в [1], или же она является прямым произведением групп Ли меньшей размерности.

Если $\dim(N) = 6$, то $R = \mathbb{R} \otimes_{\phi} N$ – полупрямое произведение $\mathbb{R}$ и нильпотентной шестимерной нильпотентной группы Ли N . Таких групп Ли R очень много, они связаны с автоморфизмами $\phi(1)$, сохраняющими некоторую $\mathbb{Q}$ -структуру на N .

Для описания строения солвмногообразий (для ненильпотентных групп Ли R) очень полезным бывает *расслоение Мостова*. Так называется гладкое расслоение

$$N/\Gamma \cap N \rightarrow R/\Gamma \rightarrow R/\Gamma \cdot N = T^l,$$

оно представляет собой расслоение со слоем – нильмногообразием над базой – тором T^l .

Важный для нашего рассмотрения частный случай – когда $\dim Z(R) \geq 1$. Тут при $\dim(R) = 6$ будет $\dim(N) \geq 4$, что существенно упрощает описание соответствующих солвмногообразий.

ЛЕММА. Если $\dim Z(N) = 1$ или $\dim[N, N] = 1$, то $\dim Z(R) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Gamma \cap N$ – решетка в N , то $\Gamma \cap Z(N)$ и $\Gamma \cap [N, N]$ – тоже решетки в $Z(N)$ и $[N, N]$ соответственно (см. [9]).

Пусть вначале $\dim Z(N) = 1$ (случай $\dim[N, N] = 1$ разбирается совершенно аналогично). Рассмотрим действие R на одномерном нормальном делителе $Z(N)$ сопряжениями. Действие $N \subset R$ на своем центре тривиально, поэтому после факторизации получаем действие на этом центре связной абелевой группы Ли $A = R/N$. Рассмотрим действие решетки $\Gamma/\Gamma \cap N$ на одномерном центре. Оно сохраняет там решетку, а потому обязательно будет тривиально или же имеет порядок 2. Но тогда действие связной группы Ли A на этом центре будет тривиально. Получаем, что $Z(R) \subset Z(R)$.

Аналогично доказывается, что $[N, N] \subset Z(R)$.

Укажем, в каких случаях можно применить эту лемму для описания некоторых классов солвмногообразий:

- при $N = N_3(\mathbb{R})$ имеем $\dim Z(N) = 1$;
- при $N = N_3 \times \mathbb{R}$ имеем $\dim[N, N] = 1$;
- при $N = N_4$ имеем $\dim Z(N) = 1$.

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда $\dim R = 6$. Тут всегда $\dim N \geq 3$.

Если $\dim(N) = 3$, то $N = N_3$ или $N = \mathbb{R}^3$. Покажем, что на самом деле случай $N = N_3$ невозможен. Тут $\dim Z(N) = 1$ и потому в силу [15] $\dim N \geq 4$ (см. выше). Поэтому при $\dim R = 6$ обязательно должно быть $N = \mathbb{R}^3$ или же $\dim(N) = 4, 5$.

Разрешимые односвязные группы Ли размерности 5, которые могут иметь решетки, описаны, например, в [16] (есть и другие описания). Там же приводятся некоторые примеры решеток. Нам же здесь важны не сами группы Ли, а именно решетки

в них (так как именно они определяют солвмногобразия однозначно с точностью до диффеоморфизма). Поэтому работа [16], увы, не дает нам полного описания компактных солвмногобразий размерности 6.

Полученные в этом пункте частичные результаты будут использованы в следующем пункте для описания с точностью до конечнолистного накрытия всех асферичных компактных однородных многообразий (результаты данного пункта можно рассматривать как некоторые уточнения классификации п. 4).

4. О компактных асферичных однородных многообразиях размерности ≤ 7 . Компактное однородное многообразие называется *однородно разложимым*, если оно диффеоморфно прямому произведению двух однородных многообразий меньшей размерности. Например, тор размерности ≥ 2 всегда разложим. А вот сферы S^n все однородно неразложимы. Ясно, что для описания асферичных однородных многообразий размерности $\leq k$ при некотором k достаточно описать все однородно неразложимые асферичные однородные многообразия размерности $\leq k$. Отметим, что для компактных солвмногобразий однородная разложимость многообразия эквивалентна разложимости в прямое произведение его фундаментальной группы.

Мы ниже опишем (в теореме 2) однородно неразложимые асферичные компактные многообразия M размерности 7, причем сделаем это с точностью до конечнолистного накрытия. Описание с точностью до диффеоморфизма даже для таких небольших размерностей представляется необозримым.

Начнем с краткого рассмотрения случаев размерностей ≤ 6 (подробнее они были рассмотрены ранее, в том числе и в некоторых работах автора – см. обзор [1]).

Пусть $\dim M = 1$ – тут M диффеоморфно окружности S^1 .

При $\dim M = 2$ нет однородно неразложимых M . Мы рассматриваем M с точностью до конечнолистного накрытия, поэтому, например, бутылка Клейна (компактная однородная поверхность) для нас это “то же”, что двумерный тор, а тот однородно разложим.

Пусть $\dim M = 3$ – тут имеем такие однородно неразложимые солвмногобразия: $N_3(\mathbb{R})/N_2(\mathbb{Z})$, $M(p_1, \dots, p_n)$ (серии солвмногобразий, подробно описанных в [16]; все они различны, даже с точностью до конечнолистного накрытия; здесь p_i – попарно различные простые числа), а также имеем многообразия M , не являющиеся солвмногобразиями – это многообразия $\mathcal{A}/\Gamma$, где Γ – решетка $\mathcal{A}$ (все такие многообразия диффеоморфны с точностью до конечнолистного накрытия; удобным их представителем является многообразие $S^1(F_2)$ – пространство расслоения единичных касательных векторов над кренделем F_2).

В случае, когда $\dim M = 4$, выделим два подслучая – когда группа Ли G разрешима и когда это не так.

Предположим вначале, что группа Ли G разрешима.

Если G нильпотентна, то решетка Γ изоморфна (с точностью до соизмеримости) группе из следующего списка: $\mathbb{Z}^4, N_3(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}, N_4(\mathbb{Z}) \subset N_4$. Это дает нам полное описание соответствующих нильмногобразий. Из них неразложимо только соответствующее решетке $N_4(\mathbb{Z})$.

Если G ненильпотентна, то всегда будет $\dim N \geq 2$. Рассмотрим по-отдельности возможные случаи.

При $\dim N = 2$ имеем $N = \mathbb{R}^2$ и для G имеем представление в виде расширения $0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow 0$. Описание всех таких групп см. в [17]. Для решеток D в них имеется расширение $0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow D \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0$. Неразложимые среди них, как нетрудно убедиться, только те, для которых действие подгруппы $\mathbb{Z}^2$ (в записи расширения она справа) на нормальном делителе $\mathbb{Z}^2$ точно, т.е. имеет тривиальное ядро.

При $\dim N = 3$ имеем $N = \mathbb{R}^3, N_3$.

Если $N = \mathbb{R}^3$, то G есть полупрямое произведение $\mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{R}^3$, решетки тут определяются по матрице $\phi(1)$ через кубические поля $\mathbb{Q}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (см. [18]).

Если $N = N_3$, то G есть полупрямое произведение $\mathbb{R} \times_{\phi} N_3$ – тут описание решеток тоже возможно: оно сводится к описанию решеток в группе Ли вида $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ и эти решетки параметризуются, как известно, одним числом $n \in \mathbb{N}$. Неразложимые M тут будут тогда и только тогда, когда действие ϕ нетривиально.

Если же G не разрешима, то $G = S \cdot R$ и $\dim S \geq 3$, откуда получаем, что $G = \mathcal{A} \times \mathbb{R}$ и тут решетка Γ – прямое произведение, а потому M однородно разложимо.

При $\dim M = 5, 6$ описание однородных многообразий M более сложно, оно было дано в [4], [5]. Там, в частности, фигурирует однородное асферичное многообразие $M = \mathcal{A} \times \mathcal{A} / \Pi$, имеющее расслоение вида $T^2 \rightarrow M \rightarrow D \times D / \Pi$; это комплексная поверхность размерности 2 по Кодаире, причем поверхность “общего типа”. Максимальных среди таких групп Π конечное число.

Теперь рассмотрим случай $\dim M = 7$ – это есть основной предмет данной статьи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M^7 компактно, асферично, однородно и однородно неразложимо, $G = S \cdot R$. Тогда

- (i) M – солвмногообразие (некоторые подробности из описания даны в доказательстве и в п. 3 выше);
- (ii) $S = \mathcal{A}$, $R = \mathbb{R}^4$, $G = \mathcal{A} \times_{\phi} \mathbb{R}^4$, $\Gamma = \Pi \times_{\phi} \mathbb{Z}^4$ (Π – решетка в $\mathcal{A}$);
- (iii) $S = \mathcal{A}$, $R = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^3$, $G = \mathcal{A} \times_{\psi} R$, $\Gamma = \Pi \times_{\psi} D$, $\Pi \subset \mathcal{A}$, $D = \mathbb{Z} \times_{\rho} \mathbb{Z}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = G/\Gamma$, $G = S \cdot R$ – односвязная асферичная группа Ли. Имеем $\dim S = 0, 3$ или 6 .

А) $\dim S = 0$. Это случай солвмногообразий, о котором см. предыдущий пункт. О выделении среди них однородно неразложимых уже говорилось выше.

В) $\dim S = 3$. Тогда $S = \mathcal{A}$, $\dim R = 4$, причем $\Gamma \cap R$ – решетка в R . Рассмотрим по-отдельности все возможные случаи (описание разрешимых четырехмерных групп Ли, имеющих решетки, было дано выше).

1) $R = \mathbb{R}^4$. Здесь $G = \mathcal{A} \times_{\phi} \mathbb{R}^4$, решетка $\Gamma = (\Gamma \cap S) \cdot (\Gamma \cap R)$ строится по аналогии с конструкцией подобного типа, приведенной в [5]. Здесь представление ϕ или неприводимо или изоморфно $\tau \oplus \tau$ или же $Ad \oplus 1$, где τ – тавтологическое представление, а Ad – присоединенное представление группы Ли $\mathcal{A}$.

2) $R = N = N_3 \times \mathbb{R}$. Здесь действие $\mathcal{A}$ на R тривиально. Покажем это. Действие $\mathcal{A}$ на $R = N = N_3 \times \mathbb{R}$ порождает действие $\mathcal{A}$ на $R/Z(R) = \mathbb{R}^2$, причем действие некоторой решетки в $\mathcal{A}$, если оно нетривиально, должно сохранять некоторую решетку в $\mathbb{R}^2$. Но подгруппа в $\text{Aut}(\mathbb{R}^2) = \text{GL}(2, \mathbb{R})$, сохраняющая решетку,

должна содержаться в $SL(2, \mathbb{Z})$ (точнее, содержать пересечение с $SL(2, \mathbb{Z})$ в качестве подгруппы конечного индекса). Но $SL(2, \mathbb{Z})$ не является равномерной решеткой. Поэтому указанное выше действие должно быть тривиальным. В силу этого в данном случае M однородно разложимо.

3) $R = N_4$. Здесь тоже разложение Леви прямое (доказывается примерно так же, как в п. 3 выше) и потому M однородно разложимо.

4) $R = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^3$, $\phi(1) \in GL_3(R)$. Действие ρ группы Ли $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^3$ должно быть перестановочно с ϕ . Рассмотрим два подслучая.

i) Действие $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^3$ тривиально. Тогда, как легко понять, пространство M однородно разложимо.

ii) Действие $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^3$ нетривиально. Тогда оно изоморфно (рассматриваемое как линейное представление ρ) или присоединенному представлению группы Ли $\mathcal{A}$ или же линейному представлению $\tau \oplus 1$ (прямой сумме тавтологичного представления τ и одномерного тривиального).

Если это действие изоморфно присоединенному (неприводимому) представлению, то в силу леммы Шура перестановочное с ним представление ρ должно быть скалярным. Поэтому мы можем считать, что $\rho(1)$ – единичная матрица и пересечение решетки Γ в G с R – абелева группа (изоморфная $\mathbb{Z}^4$). Поэтому в данном случае мы можем заменить R на $\mathbb{R}^4$ (применив модификацию – см. например [9]). Но тогда приходим к ситуации, уже рассмотренной выше в п. 1.

Рассмотрим теперь вторую возможность – представление ρ эквивалентно $\tau \oplus 1$. Здесь матрица $\rho(1)$ в подходящем базисе диагональна, причем $\rho(1) = \text{diag}(\alpha, \alpha, \alpha^{-2})$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как $\rho(1)$ сохраняет некоторую решетку $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$, то оно должно иметь целочисленный след и потому $2\alpha + \alpha^{-2} \in \mathbb{Z}$. Тем самым мы приходим к необходимости рассматривать единицы в некоторых кубических полях. Такого рода рассмотрения проводились в [18]. Здесь мы не будем входить в дальнейшие подробности.

5) $R = \mathbb{R} \times_{\phi} N_3$. Здесь тоже действие группы Ли $S \simeq \mathcal{A}$ тривиально, ибо индуцированное им действие на $N/[N, N]$ может быть перестановочно только со скалярным действием. Но этот случай невозможен – см. рассуждение в п. 3 выше. Следовательно, M однородно разложимо.

C) $\dim S = 6$. Здесь $G = S \times \mathbb{R}$ и M однородно разложимо.

Вместе с подобными описаниями для меньших размерностей, ранее полученных автором (см. [2]–[5]), этот результат дает описание (с точностью до конечнолистного накрытия) всех компактных асферичных однородных многообразий размерности ≤ 7 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Группы Ли и алгебры Ли* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240.
- [2] В. В. Горбацевич, “О трехмерных однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **18:2** (1977), 280–293.
- [3] В. В. Горбацевич, “О классификации четырехмерных компактных однородных пространств”, *УМН*, **32:2** (1977), 207–208.

- [4] В. В. Горбачевич, “О компактных однородных пространствах размерности 5 и выше”, *УМН*, **33**:3 (1978), 161–162.
- [5] В. В. Горбачевич, “О компактных однородных пространствах малой размерности”, *Геометрические методы в задачах алгебры и анализа*, ЯрГУ, Ярославль, 1980, 37–60.
- [6] В. В. Горбачевич, “Об асферичных однородных пространствах”, *Матем. сб.*, **100**:2 (1976), 248–265.
- [7] V. V. Gorbachevič, “Compact aspherical homogeneous spaces up to a finite covering”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **1**:3 (1983), 103–118.
- [8] А. И. Мальцев, “О линейных связных локально-замкнутых группах”, *Докл. АН СССР*, **40**:3 (1943), 108–110.
- [9] Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, “Строение групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНТИ, М., 1990, 5–253.
- [10] L. Auslander, R. H. Szczarba, “Characteristic classes of compact solvmanifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **76**:1 (1962), 1–8.
- [11] L. Auslander, “An exposition of the structure of solvmanifolds. Part I. Algebraic theory”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**:2 (1973), 227–261.
- [12] К. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987.
- [13] Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, “Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны”, *Геометрия – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **29**, ВИНТИ, М., 1988, 147–259.
- [14] В. В. Морозов, “Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1958, № 4, 161–171.
- [15] Г. М. Мубаракзянов, “Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли”, *Изв. вузов. Матем.*, 1966, № 6, 95–98.
- [16] Ch. Bock, *On Low-Dimensional Solvmanifolds*, [math.DG/0903.2926](https://arxiv.org/abs/math.DG/0903.2926), 2009.
- [17] G. D. Mostow, “On the topology of homogeneous spaces of finite measure”, *Symposia Mathematica*, **16**, Academic Press, London, 1975, 375–398.
- [18] В. В. Горбачевич, “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. IV”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1991, 88–98.

В. В. Горбачевич

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ), г. Москва
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступило

12.10.2011