Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, О нормах Гауэрса некоторых функций,
Матем. заметки, 2012, том 92, выпуск 4, 609–627

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8934>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:58:34

О нормах Гауэрса некоторых функций

И. Д. Шкредов

Рассматриваются функции $f(x, y)$, у которых условие малости прямоугольной нормы влечет малость прямоугольной нормы для $f(x, x + y)$. Также изучены семейства функций с аналогичным свойством для старших норм Гауэрса. Метод доказательства основан на некотором принципе переноса для сумм по специальным системам линейных уравнений.

Библиография: 29 названий.

1. Введение. Нормы Гауэрса были впервые рассмотрены в работах [1], [2]. С тех пор они стали применяться в целом ряде задач аддитивной комбинаторики (см., например, [1]–[15]), а также эргодической теории (см., например, [10], [16]–[24]). Напомним необходимые определения.

Пусть $\mathbf{G}$ – конечное множество и $N = |\mathbf{G}|$. Пусть также d – натуральное число и $\{0, 1\}^d = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) : \omega_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, d\}$ – обычный d -мерный куб. Для $\omega \in \{0, 1\}^d$ пусть $|\omega|$ равно $\omega_1 + \dots + \omega_d$. Пусть также $\mathcal{C}$ означает оператор комплексного сопряжения. Предположим, что $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\vec{x}' = (x'_1, \dots, x'_d)$ суть произвольные вектора из $\mathbf{G}^d$. Через $\vec{x}^\omega = (\vec{x}_1^\omega, \dots, \vec{x}_d^\omega)$ обозначим вектор

$$\vec{x}_i^\omega = \begin{cases} x_i, & \text{если } \omega_i = 0, \\ x'_i, & \text{если } \omega_i = 1. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $\vec{x}^\omega$ зависит и от $\vec{x}$, и от $\vec{x}'$.

Пусть X – непустое множество, μ – вероятностная мера на X и $Z: X \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольная функция. Обозначим через $EZ = \mathbb{E}_x Z$ сумму $\sum_{x \in X} Z(x) \mu(\{x\})$. Если не сказано противное, то считаем меру μ равномерной. В этом случае

$$EZ = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} Z(x).$$

Если $f: \mathbf{G}^d \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая функция, то мы пишем $f(\vec{x})$ для $f(x_1, \dots, x_d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см. [1], [2]). *Норма Гауэрса U^d функции f задается формулой*

$$\|f\|_{U^d} = \left(\mathbb{E}_{\vec{x} \in \mathbf{G}^d} \mathbb{E}_{\vec{x}' \in \mathbf{G}^d} \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} \mathcal{C}^{|\omega|} f(\vec{x}^\omega) \right)^{1/2^d}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00759) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8684.2010.1).

© И. Д. Шкредов, 2012

Набор 2^d точек $\vec{x}^\omega \in \mathbf{G}^d$, $\omega \in \{0, 1\}^d$, называется d -мерным кубом из $\mathbf{G}^d$ или просто d -мерным кубом. Таким образом, суммирование в выражении (1) проводится по всем d -мерным кубам из $\mathbf{G}^d$. Например, $\{(x, y), (x', y), (x, y'), (x', y')\}$, где $x, x', y, y' \in \mathbf{G}$ есть двумерный куб из $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$. В случае $d = 2$ норма Гауэрса называется *прямоугольной нормой*.

Для $d = 1$ выражение выше определяет полунорму, а для всех $d \geq 2$ норма Гауэрса действительно является нормой. В частности, справедливо неравенство треугольника

$$\|f + g\|_{U^d} \leq \|f\|_{U^d} + \|g\|_{U^d}. \quad (2)$$

Также можно доказать свойство монотонности норм Гауэрса (см. [2]). Пусть

$$f_{x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}) := f(x_1, \dots, x_d).$$

Тогда

$$\mathbb{E}_{x_d \in \mathbf{G}} \|f_{x_d}\|_{U^{d-1}}^{2^{d-1}} \leq \|f\|_{U^d}^{2^{d-1}} \quad (3)$$

для всех $d \geq 2$.

В случае, когда множество $\mathbf{G}$ является конечной абелевой группой с аддитивной групповой операцией $+$, можно “спроектировать” норму выше на группу $\mathbf{G}$ и получить обычную норму Гауэрса. Другими словами, в формуле (1) нужно положить функцию $f(x_1, \dots, x_d)$ равной “одномерной” функции $f(x_1, \dots, x_d) := f(x_1 + \dots + x_d)$. Обозначая полученную норму той же буквой U^d , мы автоматически имеем аналог свойства монотонности (3), а именно

$$\|f\|_{U^{d-1}} \leq \|f\|_{U^d} \quad (4)$$

для всех $d \geq 2$.

Нормы Гауэрса обладают следующим характеристическим свойством. Пусть $d \geq 2$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{G}^d$ – произвольный вектор и $i \in \{1, \dots, d\}$. Через $(\vec{x})_{(i)}$ обозначим вектор

$$(\vec{x})_{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \mathbf{G}^{d-1}.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского несколько раз (см. [2], [25], [26]), имеем следующий результат.

ЛЕММА 1.2. Пусть $d \geq 2$ – целое число и $f: \mathbf{G}^k \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольная функция. Пусть также $u_1, \dots, u_d: \mathbf{G}^d \rightarrow [-1, 1]$ – любые функции со свойством, что $u_i(\vec{x})$ зависит только от переменных $(\vec{x})_{(i)}$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Тогда

$$\left| \mathbb{E} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^d u_i(\vec{x}) \right| \leq \|f\|_{U^d}.$$

Таким образом, произвольная функция $f(x_1, \dots, x_d)$, имеющая малую норму Гауэрса, не коррелирует с любым произведением функций, зависящих от меньшего числа переменных.

В настоящей статье изучаются двумерные функции $f: \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$, причем множество $\mathbf{G}$ является конечной абелевой группой. Для каждого положительного целого t рассмотрим U^{t+1} -норму функции

$$F_t(x, y_1, \dots, y_t) := f(x, x + y_1 + \dots + y_t),$$

а также функции

$$H_t(x, y_1, \dots, y_t) := f(x, y_1 + \dots + y_t).$$

Даже в случае $t = 2$ легко привести примеры функций $f(x, y)$ с большой прямоугольной нормой и малой величиной $\|f(x, x + y)\|_{U^2}$ (“косой прямоугольной нормой”) и наоборот. Аналогичным образом можно показать, что между числами $\|F_t\|_{U^{t+1}}$ и $\|H_t\|_{U^{t+1}}$ нет никакой связи. Тем не менее, мы рассмотрим класс функций, для которых малость нормы $\|H_t\|_{U^{t+1}}$ влечет малость нормы $\|F_t\|_{U^{t+1}}$.

Пусть $\hat{\mathbf{G}}$ – двойственная группа для группы $\mathbf{G}$, т.е. локально-компактная абелева группа непрерывных гомоморфизмов ξ из $\mathbf{G}$ в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Хорошо известно, что в случае абелевой группы $\mathbf{G}$ двойственная группа $\hat{\mathbf{G}}$ изоморфна $\mathbf{G}$. Мы пишем $\xi \cdot g$ или просто ξg для $\xi(g)$, $g \in \mathbf{G}$.

Сформулируем один из основных результатов настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $a: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ – некоторая функция и $f(x, y) = e(x \cdot a(y))$, где $e(x) = e^{2\pi i x}$. Тогда условие

$$\|f(x, y_1 + \dots + y_t)\|_{U^{t+1}} = o(1), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5)$$

влечет

$$\|f(x, x + y_1 + \dots + y_t)\|_{U^{t+1}} = o(1), \quad N \rightarrow \infty, \quad (6)$$

для всех натуральных t .

Точнее говоря, мы получим количественный вариант утверждения выше (см. следствие 3.3). Заметим, что более сильное условие, чем (5), а именно,

$$\|f(x, y_1 + \dots + y_{t+1})\|_{U^{t+2}} = o(1)$$

влечет (6) тривиальным образом (см. доказательство следствия 3.3). Мы выведем теорему 1.3 из довольно общей теоремы 2.3. Последний результат касается одного класса сумм, которые берутся по специальным системам линейных уравнений с коэффициентами $\{0, \pm 1\}$ и которые имеют своей переменной произвольную функцию $a(x)$. Грубо говоря, про такие суммы утверждается, что они могут быть сведены к суммам, не имеющим данных линейных ограничений (см. теорему 2.3). Интересно, что в доказательстве мы не используем анализ Фурье. Нашим основным инструментом является некоторый вариант леммы 9.3 из статьи [2].

В п. 3 будет получено простое

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть $a: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ – некоторая функция и $f(x, y) = e(x \cdot a(y))$. Пусть также

$$|\{y \in \mathbf{G} : a(y) = j\}| = o(N) \quad \text{для всех } j \in \mathbf{G}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\|f(x, x + y)\|_{U^2} = o(1), \quad N \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Например, если $a(x)$ – инъекция, то формула (7) имеет место.

Сделаем несколько замечаний об обозначениях. Если $S \subseteq \mathbf{G}$ – некоторое множество, то будем писать $S(x)$ для его характеристической функции. Иными словами $S(x) = 1$, если $x \in S$, и нуль иначе. Символ $|S|$ используется для обозначения

мощности множества S . Запись $\log$ означает логарифм по основанию два. Пусть также $\mathbb{D}$ – единичный диск на комплексной плоскости. Знаки $\ll$ и $\gg$ суть обычные символы Виноградова. Наконец, если n – натуральное число, то будем писать $[n]$ для обозначения отрезка натурального ряда $\{1, 2, \dots, n\}$.

2. Доказательство основного результата. Нам потребуется ряд определений.

Пусть $l \geq 2$, m – произвольные целые числа, $m < l$. Пусть также $x_1, \dots, x_l$, $y_1, \dots, y_l$ – некоторые переменные. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^l q_j^{(i)} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

а также уравнение

$$\sum_{j=1}^l q_j^{(1)} y_j = 0. \quad (9)$$

Здесь $q_j^{(i)} \in \{0, -1, 1\}$. Таким образом, если мы имеем систему (8), то мы можем написать и уравнение (9). Предположим, что ранг системы (8) равен m .

Пусть $S = S(q_j^{(i)})$ – семейство всех линейных систем из m уравнений полного ранга, имеющих форму

$$\sum_{j=1}^l \eta_j x_j = 0, \quad \eta_j \in \{0, \pm 1\},$$

где η может быть записано в виде линейной комбинации векторов $(q_1^{(1)}, \dots, q_l^{(1)}), \dots, (q_1^{(m)}, \dots, q_l^{(m)})$ из системы (8). Например, мы можем умножить некоторые уравнения из (8) на -1 и получить новую систему из S . Таким образом, $|S| \geq 2^m$. С другой стороны, $|S| \leq 3^{lm}$. Очевидно, что если набор $(x_1, \dots, x_l)$ является решением некоторой системы из S , то он будет решением любой системы из S и, в частности, системы (8). Обозначим через Υ объединенную систему (8), (9).

Пусть E – семейство линейных уравнений с коэффициентами $\{0, \pm 1\}$, которые могут быть записаны как линейная комбинация некоторых уравнений из S . Ясно, что $|E| \leq 3^l$. Пусть $e \in E$, и пусть $\theta(e) := 2^t$, где t – число нулевых коэффициентов в e . Положим $\theta(v) = \prod_{e \in v} \theta(e)$, где v означает некоторую систему линейных уравнений. Пусть

$$\theta = \theta_{m-1}(E) = \sum_v \theta(v),$$

причем суммирование в последней формуле проходит по всем системам, состоящих из $m-1$ уравнений семейства E .

Пусть $B_1, \dots, B_l \subseteq \mathbf{G}$ – произвольные множества, и пусть

$$\varphi_1, \dots, \varphi_l, \quad \varphi_j: B_j \rightarrow \mathbf{G},$$

$j \in [l]$, – некоторые отображения.

Наконец, пусть C – подмножество $\mathbf{G}^l$. Будем называть набор $(x_1, \dots, x_l)$, удовлетворяющий некоторой системе из S , *аддитивным*. Аддитивный набор $(x_1, \dots, x_l)$

называется *вырожденным*, если найдется ненулевой вектор $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_l)$, $\eta_j \in \{0, \pm 1\}$, такой, что $\sum_{j=1}^l \eta_j x_j = 0$ и последнее уравнение не принадлежит E . В противном случае назовем набор *невырожденным*. Заметим, что невырожденный аддитивный набор может удовлетворять только уравнениям из E . Далее, невырожденный аддитивный набор $(x_1, \dots, x_l) \in C$ называется *хорошим*, если векторы $(x_1, \dots, x_l)$, $(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_l(x_l))$ удовлетворяют (8) и (9) соответственно для некоторой системы из S . В противном случае набор называется *плохим*. Таким образом, из определенных вытекает, что и плохие, и хорошие наборы являются невырожденными и лежат в множестве C .

Прежде всего докажем небольшое обобщение леммы 9.3 из [2].

ЛЕММА 2.1. Пусть $\alpha, \omega, \eta \in (0, 1]$ – произвольные числа, $B_j \subseteq \mathbf{G}$ – некоторые множества и C – подмножество $\mathbf{G}^l$. Пусть также T – действительный параметр,

$$T \geq 2^{2l} |S| \left(\frac{2(1 + \omega^{-1})}{\alpha \eta} \right)^{lm2^{3ml}} N^{l-m-1}, \quad (10)$$

число аддитивных наборов в $(B_1 \times \dots \times B_l) \cap C$ не превосходит $\omega^{-1}T$ и среди них найдется не менее чем αT хороших наборов. Тогда существуют множества $B'_j \subseteq B_j$ такие, что число хороших наборов $(x_1, \dots, x_l) \in (B'_1 \times \dots \times B'_l) \cap C$ не меньше, чем

$$\left(\frac{\alpha \eta}{2(1 + \omega^{-1})} \right)^{lm2^{3ml}} T$$

и отношение хороших наборов в $(B'_1 \times \dots \times B'_l) \cap C$ к числу плохих наборов в $(B'_1 \times \dots \times B'_l) \cap C$ не менее η^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – натуральный параметр. Рассмотрим вероятностное пространство

$$\Omega = \mathbf{G}^{k(m+1)} \times B_1 \times \dots \times B_l.$$

На $\mathbf{G}^{k(m+1)}$ возьмем равномерную меру, а вероятностную меру на $B_1 \times \dots \times B_l$ определим ниже. После этого вероятностная мера μ на Ω задается как произведение мер на $\mathbf{G}^{k(m+1)}$ и $B_1 \times \dots \times B_l$.

Выберем

$$(r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k, w_1^{(1)}, \dots, w_k^{(1)}, \dots, w_1^{(m-1)}, \dots, w_k^{(m-1)}) \in \mathbf{G}^{k(m+1)}$$

равномерно и независимо. После этого независимо выберем точки $x_j \in B_j$ так, что точка x_j принадлежит новому множеству B'_j с условной вероятностью

$$\begin{aligned} p(x_j) &= p_{r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k, w_1^{(1)}, \dots, w_k^{(1)}, \dots, w_1^{(m-1)}, \dots, w_k^{(m-1)}}(x_j) \\ &= \frac{1}{2^{mk}} \prod_{i=1}^k (1 + \text{cs}(r_i x_j + s_i \varphi_j(x_j))) \cdot \prod_{q=1}^{m-1} (1 + \text{cs}(w_i^{(q)} x_j)), \end{aligned}$$

где $\text{cs}(x) = \cos((2\pi/N)x)$. Набор $(x_1, \dots, x_l)$ принадлежит $B'_1 \times \dots \times B'_l$ с безусловной вероятностью

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2^{mlk} N^{(m+1)k}} \sum_{r_1, \dots, r_k} \sum_{s_1, \dots, s_k} \sum_{w_1^{(1)}, \dots, w_k^{(1)}, \dots, w_1^{(m-1)}, \dots, w_k^{(m-1)}} \\
 & \quad \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l (1 + \text{cs}(r_i x_j + s_i \varphi_j(x_j))) \prod_{q=1}^{m-1} (1 + \text{cs}(w_i^{(q)} x_j)) \\
 &= \frac{1}{2^{mlk} N^{(m+1)k}} \left(\sum_{r,s} \sum_{w_1, \dots, w_{m-1}} \prod_{j=1}^l (1 + \text{cs}(r x_j + s \varphi_j(x_j))) \prod_{q=1}^{m-1} (1 + \text{cs}(w_q x_j)) \right)^k \\
 &= \frac{1}{2^{mlk} N^{(m+1)k}} \left(2^{-lm} \sum_{r,s} \sum_{w_1, \dots, w_{m-1}} \prod_{j=1}^l (2 + e(r x_j + s \varphi_j(x_j)) \right. \\
 & \quad \left. + e(-r x_j - s \varphi_j(x_j))) \prod_{q=1}^{m-1} (2 + e(w_q x_j) + e(-w_q x_j)) \right)^k \\
 &= \frac{1}{2^{mlk} N^{(m+1)k}} \left(2^{-lm} \sum_{r,s} \sum_{w_1, \dots, w_{m-1}} \prod_{j=1}^l \sum_{\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_l^{(1)}, \dots, \varepsilon_1^{(m)}, \dots, \varepsilon_l^{(m)} \in \{0, \pm 1\}} 2^{|\{i,j: \varepsilon_j^{(i)}=0\}|} \right. \\
 & \quad \times e \left(r \sum_j \varepsilon_j^{(1)} x_j + s \sum_j \varepsilon_j^{(1)} \varphi_j(x_j) \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_1 \sum_j \varepsilon_j^{(2)} x_j + \dots + w_{m-1} \sum_j \varepsilon_j^{(m)} x_j \right) \right)^k. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Таким образом, вклад в вероятность (11) дают числа $(\varepsilon_j^{(i)})$, $\varepsilon_j^{(i)} \in \{0, \pm 1\}$, такие, что

$$\sum_j \varepsilon_j^{(1)} x_j = \sum_j \varepsilon_j^{(1)} \varphi_j(x_j) = \sum_j \varepsilon_j^{(2)} x_j = \dots = \sum_j \varepsilon_j^{(m)} x_j = 0. \tag{12}$$

Например, это будет так, если все $\varepsilon_j^{(i)}$ равны нулю.

Пусть $(x_1, \dots, x_l)$ – произвольный плохой набор. По определению $(x_1, \dots, x_l)$ удовлетворяет некоторой системе $v \in S$ и является невырожденной последовательностью. Легко видеть, что не существует вектора $(\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_l^{(1)}) \neq \vec{0}$ такого, что выполняется (12). В самом деле, в противном случае мы можем добавить некоторые уравнения из v и придти к противоречию с тем, что $(x_1, \dots, x_l)$ является плохим набором. Таким образом, каждый плохой набор выбирается с вероятностью $2^{-lmk} (2^{-lm} 2^l \theta)^k$. Ясно, что $\theta \geq 2^{l(m-1)}$, поскольку E содержит уравнение, все коэффициенты которого равны нулю. Положим $\theta = 2^{l(m-1)} + \theta_1$, $\theta_1 \geq 0$. Тогда последняя вероятность равна $2^{-lmk} (1 + \theta_1 2^{-l(m-1)})^k$.

С другой стороны, легко видеть, что хороший аддитивный набор попадает в $B'_1 \times \dots \times B'_l$ с вероятностью по крайней мере

$$2^{-lmk} (2^{-lm} (2^l \theta + 2\theta))^k \geq 2^{-lmk} (1 + \theta_1 2^{-l(m-1)} + 2^{-(l-1)})^k,$$

а это строго больше $2^{-lmk}(1 + \theta_1 2^{-l(m-1)})^k$. Действительно, в этом случае найдется $(\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_l^{(1)}) \neq \vec{0}$ такой, что выполняется (12) и, кроме того, вектор $(\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_l^{(1)})$, умноженный на -1 , также обладает этим свойством. Заметим также, что существует не более $3^l N^{l-m-1}$ вырожденных наборов, ибо мы всегда можем выразить одну переменную через оставшиеся $l - m - 1$. Пусть X и Y – число хороших и плохих аддитивных наборов в $B'_1 \times \dots \times B'_l$. Используя условие леммы, находим

$$\begin{aligned} EX &\geq 2^{-lmk}(1 + \theta_1 2^{-l(m-1)} + 2^{-(l-1)})^k \alpha T, \\ EY &\leq 2^{-lmk}(1 + \theta_1 2^{-l(m-1)})^k \omega^{-1} T. \end{aligned}$$

Математические ожидания в формулах выше берутся по определенной ранее мере μ . Легко видеть, что $\theta_1 < \theta \leq 3^{lm} 2^{lm}$. Для любых чисел l, m и k выполнено

$$(1 + 2^{-3lm})^k \geq 2^{k2^{-3lm}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1 + \theta_1 2^{-l(m-1)} + 2^{-(l-1)}}{1 + \theta_1 2^{-l(m-1)}} \right)^k > (1 + 2^{-3lm})^k \geq 2^{k2^{-3lm}},$$

и последнее выражение не меньше, чем $(1 + \omega^{-1})/(\alpha\eta)$, если целое число k удовлетворяет неравенствам

$$2 \left(\frac{\alpha\eta}{2(1 + \omega^{-1})} \right)^{2^{3lm}} \leq 2^{-k} \leq \left(\frac{\alpha\eta}{1 + \omega^{-1}} \right)^{2^{3lm}}. \quad (13)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \eta EX - EY &\geq \alpha\eta 2^{-lmk}(1 + \theta_1 2^{-l(m-1)} + 2^{-(l-1)})^k T - 2^{-lmk}(1 + \theta_1 2^{-l(m-1)})^k \omega^{-1} T \\ &\geq 2^{-lmk} T. \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя (10), (13), получаем

$$2^{-lmk} T \geq 2 \left(\frac{\alpha\eta}{2(1 + \omega^{-1})} \right)^{lm2^{3ml}} T \geq 2 \cdot 4^l N^{l-m-1}. \quad (15)$$

Из неравенств (14), (15) следует, что найдутся множества $B'_1 \subseteq B_1, \dots, B'_l \subseteq B_l$ такие, что

$$\eta X \geq Y \quad \text{и} \quad X \geq \left(\frac{\alpha\eta}{2(1 + \omega^{-1})} \right)^{lm2^{3ml}} T.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть L, l – натуральные числа. Множество $\Omega \subseteq \mathbf{G}^l$ называется *множеством уровня L* , если

$$\Omega = \bigcap_{j=1}^L (\Omega'_j \setminus \Omega''_j),$$

где каждое $\Omega'_j, \Omega''_j, \Omega''_j \subseteq \Omega'_j$ является декартовым произведением некоторых l множеств из $\mathbf{G}$. Будем считать декартовы произведения множествами уровня нуль.

Удобно ввести еще несколько обозначений. Пусть $\|f\|_{\mathcal{U}^d} = N^{2d} \|f\|_{\mathcal{U}^d}^{2d}$, и для $\rho_1, \rho_2 \in [d]$, $\rho_1 < \rho_2$, положим

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{U}^2(\rho_1, \rho_2)} &= \sum_{x_1, \dots, x_d} \sum_{x'_{\rho_1}, x'_{\rho_2}} f(x_1, \dots, x_{\rho_1}, \dots, x_{\rho_2}, \dots, x_d) \overline{f(x_1, \dots, x'_{\rho_1}, \dots, x_{\rho_2}, \dots, x_d)} \\ &\quad \times \overline{f(x_1, \dots, x_{\rho_1}, \dots, x'_{\rho_2}, \dots, x_d)} f(x_1, \dots, x'_{\rho_1}, \dots, x'_{\rho_2}, \dots, x_d). \end{aligned}$$

Пусть C – некоторое множество, и пусть f – комплексная функция, которая зависит от переменных $(x_1, \dots, x_l) \in (B_1 \times \dots \times B_l) \cap C$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_l)$, а также от $\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_l(x_l)$, $\varphi(\vec{x}) = (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_l(x_l))$. Пусть v – произвольная система из семейства S и

$$\begin{aligned} \sigma_{f,v}(B_1, \dots, B_l; C) &:= \sum_{(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) \text{ удовлетворяет (8), (9)}} f(x_1, \dots, x_l, \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_l(x_l)). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее,

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; C) = \sum_{v \in S} |\sigma_{f,v}(B_1, \dots, B_l; C)|.$$

Возьмем произвольное число $\rho \in [l]$ такое, что $q_\rho^{(1)} \neq 0$, выразим x_ρ из (8), $\varphi_\rho(x_\rho)$ из (9) и подставим $x_\rho, \varphi_\rho(x_\rho)$ в f . После этого рассмотрим другие $m-1$ переменные $x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-1}}$, выразим их из системы (8) и подставим в качестве аргументов в функцию f . Пусть $J = \{j_1, \dots, j_{m-1}\}$. Мы получили новую функцию

$$f_{\rho,J}^v(\vec{x}) := f_{\rho,J}^v(x_j, \varphi_j(x_j)), \quad \rho \notin \{j_1, \dots, j_{m-1}\}.$$

Сформулируем основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$ – действительное число, $\varepsilon \leq 2^{-2 \cdot 20 l^2 m^2 2^{6ml}}$ и f – комплексная функция, $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{D}$. Пусть также $B_1, \dots, B_l \subseteq \mathbf{G}$ – произвольные множества. Предположим, что для любой системы $v \in S$ найдутся $J, \rho \in [l]$ и $\rho_1 \neq \rho, \rho_2 \neq \rho, \rho_1 \neq \rho_2, \rho_1, \rho_2 \notin J$, такие, что

$$\|f_{\rho,J}^v(\vec{x})\|_{\mathcal{U}^2(\rho_1, \rho_2)} \leq \varepsilon N^{l-m+2}. \quad (17)$$

Тогда

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \leq \varepsilon_1 N^{l-m}, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_1 := \max \left\{ 2^{30} \left(\frac{512}{\log(1/\varepsilon)} \right)^{(128lm2^{3ml})^{-1}}, 4 \left(\frac{2^{2l}}{N} \right)^{(16lm2^{3ml})^{-1}} \right\} 3^{lm}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in S$. Обозначим через $\tau_v(B_1, \dots, B_l; C)$ число решений объединенной системы (8), (9). Пусть

$$\tau(B_1, \dots, B_l; C) = \sum_{v \in S} \tau_v(B_1, \dots, B_l; C).$$

Предположим, что неравенство (18) не выполнено. Так как $\tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \leq |S|N^{l-m}$ и

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \leq \tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l), \quad (20)$$

то $\sigma_f(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \geq \varepsilon_1 |S|^{-1} \tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l)$ и $\tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \geq \varepsilon_1 N^{l-m}$.

Нам потребуется лемма об “увеличении плотности”.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\alpha, \omega \in (0, 1]$ – произвольные числа, B_j – любые множества и C – множество уровня L . Предположим, что

$$\tau(B_1, \dots, B_l; C) \geq |S| \max \left\{ 2^{2l} \left(\frac{32(1 + \omega^{-1})|S|}{\alpha \varepsilon_1} \right)^{lm2^{3ml}} N^{l-m-1}, \omega N^{l-m} \right\}, \quad (21)$$

$$\varepsilon \leq 2^{-4L-16} |S|^{-8} \varepsilon_1^4 \left(\frac{\alpha \varepsilon_1}{32(1 + \omega^{-1})|S|} \right)^{4lm2^{3ml}} \left(\frac{\tau(B_1, \dots, B_l; C)}{N^{l-m}} \right)^4 \quad (22)$$

и $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{D}$ – функция, удовлетворяющая (17). Пусть также

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; C) \geq \alpha \tau(B_1, \dots, B_l; C). \quad (23)$$

Тогда найдется множество $\tilde{C} \subseteq C$ уровня не более чем $L + 1$ и множества $B'_j = B'_j(C)$, $j \in [l]$, $(B'_1 \times \dots \times B'_l) \cap \tilde{C} = \emptyset$, такие, что

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; C) \leq \sigma_f(B_1, \dots, B_l; \tilde{C}) + 2^{-2} \varepsilon_1 |S|^{-1} \tau(B'_1, \dots, B'_l; C), \quad (24)$$

$$\tau(B_1, \dots, B_l; \tilde{C}) \leq (1 - \zeta) \tau(B_1, \dots, B_l; C), \quad (25)$$

где $\zeta = (\alpha \varepsilon_1 / (32(1 + \omega^{-1})|S|))^{lm2^{3ml}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2.1 с параметрами $\alpha, \omega, \eta = |S|^{-1} \varepsilon_1 / 16$ и $T = \tau(B_1, \dots, B_l; C)$, мы находим множества $B'_j \subseteq B_j$, $j \in [l]$, такие, что число g хороших наборов $(x_1, \dots, x_l) \in (B'_1 \times \dots \times B'_l) \cap C$ не меньше, чем

$$g \geq \left(\frac{\alpha \eta}{2(1 + \omega^{-1})} \right)^{lm2^{3ml}} \tau(B_1, \dots, B_l; C) = \zeta \tau(B_1, \dots, B_l; C). \quad (26)$$

Таким образом,

$$\tau(B'_1, \dots, B'_l; C) \geq g \geq \zeta \tau(B_1, \dots, B_l; C). \quad (27)$$

Пусть $(B'_j)^1 = B'_j$ и $(B'_j)^0 = B_j \setminus B'_j$. Тогда для всех $v \in S$ выполнено

$$\sigma_{f,v}(B_1, \dots, B_l; C) = \sum_{\varpi \in \{0,1\}^l} \sigma_{f,v}((B'_1)^{\varpi_1}, \dots, (B'_l)^{\varpi_l}; C) = \sum_{\varpi \in \{0,1\}^l} \sigma_{f,v}(\varpi; C),$$

где $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_l)$. Без ограничения общности можно считать $|B'_1| \leq \dots \leq |B'_l|$, $\rho = l$ и $J = (x_{l-m+1}, \dots, x_{l-1})$. Рассмотрим слагаемое $\sigma_1(v) := \sigma_{f,v}(B'_1, \dots, B'_l; C)$, соответствующее набору $\varpi_1 = \dots = \varpi_l = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} |\sigma_1(v)| &\leq \sum_{v \in S} \left| \sum_{\vec{x} \in (B'_1 \times \dots \times B'_l) \cap C, (\vec{x}, \varphi(\vec{x})) \text{ удовлетворяет (8), (9)}} f_{\rho, J}^v(\vec{x}) \right| + \eta \tau(B'_1, \dots, B'_l; C) \\ &= \sigma'_1 + \sigma''_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя (17) и лемму 1.2, легко видеть, что

$$\sigma'_1 \leq 2^L |S| \varepsilon^{1/4} N^{l-m} \leq 2^L 3^{lm} \varepsilon^{1/4} N^{l-m}. \quad (29)$$

Положим

$$\tilde{C} = ((B_1 \times \cdots \times B_l) \setminus (B'_1 \times \cdots \times B'_l)) \cap C.$$

Ясно, что $\tilde{C}$ есть множество уровня $L+1$. Применяя неравенства (28), (29), находим

$$\begin{aligned} \sigma_f(B_1, \dots, B_l; C) &= \sum_{v \in S} |\sigma_{f,v}(B_1, \dots, B_l; C)| \leq \sigma'_1 + \sigma''_1 + \sigma_f(B_1, \dots, B_l; \tilde{C}) \\ &\leq 2^L 3^{lm} \varepsilon^{1/4} N^{l-m} + \eta \tau(B'_1, \dots, B'_l; C) + \sigma_f(B_1, \dots, B_l; \tilde{C}). \end{aligned} \quad (30)$$

Вспоминая, что $\eta = |S|^{-1} \varepsilon_1 / 16$, используя условие (22) и формулы (27), (30), получаем

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; C) \leq \sigma_f(B_1, \dots, B_l; \tilde{C}) + 2^{-2} \varepsilon_1 |S|^{-1} \tau(B'_1, \dots, B'_l; C). \quad (31)$$

Наконец,

$$\tau(B_1, \dots, B_l; \tilde{C}) + \tau(B'_1, \dots, B'_l; C) = \tau(B_1, \dots, B_l; C)$$

и по (27) мы имеем (25). Лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Мы будем использовать лемму 2.4 индуктивным образом. На нулевом шаге имеем $\alpha \geq |S|^{-1} \varepsilon_1$, и пусть ω – любое положительное число такое, что $\omega \leq \varepsilon_1 |S|^{-1}$. Предположим, что мы применили лемму 2.4 h раз. Это означает, что мы построили множества C_j , $j \in [h]$, каждое C_j есть множество уровня j , а также две последовательности $\zeta_1, \dots, \zeta_h$ и $\omega_1, \dots, \omega_h$, причем каждое ζ_j зависит от ω_j . Последовательно применяя неравенство (24), а также условие непересечения множеств $(B'_1(C_j) \times \cdots \times B'_l(C_j)) \cap C_{j+1} = \emptyset$ ровно j раз, получаем, что для каждого j , выполнено

$$\begin{aligned} \sigma_f(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) &\leq \sigma_f(B_1, \dots, B_l; C_1) + 2^{-2} \varepsilon_1 |S|^{-1} \tau(B'_1, \dots, B'_l; \mathbf{G}^l) \\ &\leq \sigma_f(B_1, \dots, B_l; C_2) + 2^{-2} \varepsilon_1 |S|^{-1} (\tau(B'_1, \dots, B'_l; \mathbf{G}^l) \\ &\quad + \tau(B'_1(C_1), \dots, B'_l(C_1); C_1)) \leq \cdots \\ &\leq \sigma_f(B_1, \dots, B_l; C_j) + 2^{-2} \varepsilon_1 |S|^{-1} \tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \\ &\leq \sigma_f(B_1, \dots, B_l; C_j) + 2^{-2} \varepsilon_1 N^{l-m}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что для всех $j \in [h]$ имеем

$$\sigma_f(B_1, \dots, B_l; C_j) \geq \varepsilon_1 (2|S|)^{-1} \tau(B_1, \dots, B_l; C_j).$$

Далее, поскольку справедливо неравенство (20), то будем предполагать, что для всех $j \in [h]$ выполнено

$$\tau(B_1, \dots, B_l; C_j) \geq 2^{-1} \varepsilon_1 N^{l-m}.$$

Значит, для любого $j \in [h]$ можно взять $\omega_j := 2^{-1} \varepsilon_1 |S|^{-1}$. Тогда для всех $j \in [h]$ справедливы неравенства

$$\zeta_j \geq \left(\frac{\varepsilon_1^2}{64(1 + 2\varepsilon_1^{-1}|S|)|S|^2} \right)^{lm2^{3ml}} = \zeta_*.$$

Из (25) вытекает, что

$$\tau(B_1, \dots, B_l; C_j) \leq (1 - \zeta_*)^j \tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l) \leq (1 - \zeta_*)^j |S| N^{l-m}$$

и, следовательно, наш алгоритм обязан остановиться после не более чем

$$2^4 \log(2|S|\varepsilon_1^{-1}) \left(\frac{\varepsilon_1^2}{64(1 + 2\varepsilon_1^{-1}|S|)|S|^2} \right)^{-lm2^{3ml}} := h$$

шагов. Очевидно, что максимальный уровень всех появляющихся при работе нашей индуктивной процедуры множеств не превосходит h . Используя неравенство $\tau(B_1, \dots, B_l; C_h) \geq 2^{-1}\varepsilon_1 N^{l-m}$, мы получаем из (22) зависимость между параметрами ε и ε_1

$$\varepsilon \leq 2^{-4h-20} |S|^{-8} \varepsilon_1^8 \left(\frac{\varepsilon_1^2}{64(1 + 2\varepsilon_1^{-1}|S|)|S|^2} \right)^{4lm2^{3ml}}. \quad (32)$$

Кроме того, из (21) находим

$$N \geq 2^{2l+1} \left(\frac{64(1 + 2\varepsilon_1^{-1}|S|)|S|^2}{\varepsilon_1^2} \right)^{lm2^{3ml}} |S| \varepsilon_1^{-1}. \quad (33)$$

Если (32) и (33) выполнены одновременно, то мы получаем противоречие. После небольших вычислений убеждаемся в справедливости (18) с ε_1 , заданным формулой (19). Теорема 2.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Вероятно, полученный результат может рассматриваться в духе хорошо известного феномена сумм-произведений (см., например, [27] или [28]) или феномена дихотомии (см., например, [9]). В самом деле, теорема 2.3 тривиальна в двух совершенно противоположных случаях: если $a(x)$ – линейная функция, то $\sigma_f(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l)$ мало по неравенству (17), а если $a(x)$ “далека” от произвольной линейной функции (например, $a(x) = x^2$), тогда (18) мало по верхней оценке для $\tau(B_1, \dots, B_l; \mathbf{G}^l)$ и (20). Таким образом, в некотором смысле наш результат говорит, что не существует функции, которая близка к линейной и нелинейной одновременно.

3. Приложения. Прежде всего, отметим одно простое свойство норм Гауэрса (см., например, [2]).

ЛЕММА 3.1. Пусть $d \geq 2$ – целое число и $f: \mathbf{G}^k \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольная функция. Пусть также $u_1, \dots, u_d: \mathbf{G}^d \rightarrow [-1, 1]$ – некоторые функции такие, что $u_i(\vec{x})$ зависит только от переменных $(\vec{x})_{(i)}$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Тогда

$$\left\| f(\vec{x}) e \left(\sum_{i=1}^d u_i(\vec{x}) \right) \right\|_{U^d} = \|f(\vec{x})\|_{U^d}.$$

Кроме того, нам понадобится лемма о выпуклости.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\kappa > 0$ и $h(x) = 1/(\log x)^\kappa$. Тогда для всех действительных чисел $x_1, \dots, x_N > 1$ выполнено

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x_i) \leq h \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right).$$

где $y = (y_1, \dots, y_t)$. Сделаем замену переменных

$$x \rightarrow x - y_1, \quad x' \rightarrow x' - y_1, \quad y'_1 - y_1 = \Delta.$$

Пусть

$$z = (x, \Delta, y_2, \dots, y_t), \quad \omega \in \{0, 1\}^{t+1}, \quad \omega = (\bar{\omega}_1, \eta, \bar{\omega}_2),$$

где $\bar{\omega}_1, \eta \in \{0, 1\}$, $\bar{\omega}_2 \in \{0, 1\}^{t-1}$. Положим

$$z_\omega = x_{\bar{\omega}_1} + \eta\Delta + y_{\bar{\omega}_2}.$$

Таким образом, z_ω зависит от x, Δ, y . Будем писать $\eta = \eta(z_\omega)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \sigma_t = \sum_{x, x', \Delta} \sum_{y_2, \dots, y_t, y'_2, \dots, y'_t} e \left(\sum_{\omega \in \{0, 1\}^{t+1}} x_{\bar{\omega}_1} \cdot a(x_{\bar{\omega}_1} + \eta\Delta + y_{(\omega_2, \dots, \omega_t)}) \right. \\ \left. \times N\delta_0 \left(\sum_{\omega \in \{0, 1\}^{t+1}} (-1)^{|\omega|} a(z_\omega) \right) \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\delta_0(x) = 1$, если $x = 0$ и нуль иначе. Легко видеть, что последовательность $(z_\omega)_{\omega \in \{0, 1\}^{t+1}}$ образует куб. Таким образом, наша сумма σ_t имеет форму (16). Для того чтобы доказать следствие 3.3, нам нужно проверить условие (17), но сначала докажем следствие в простейшей ситуации, когда $t = 1$. В этом случае формула (38) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{x, x', \Delta} e(xa(x) - x'a(x') - xa(x + \Delta) + x'a(x' + \Delta)) \\ &\quad \times N\delta_0(a(x) - a(x') - a(x + \Delta) + a(x' + \Delta)) \\ &= \sum_{x, x', \Delta} e((x - x')(a(x) - a(x + \Delta))) \cdot N\delta_0(a(x) - a(x') - a(x + \Delta) + a(x' + \Delta)) \\ &= \sum_{x, x', \Delta} e(x'a(x))e(-x'a(\Delta)) \cdot N\delta_0(a(x) - a(x - x') - a(\Delta) + a(\Delta - x')). \end{aligned}$$

При выводе последней формулы мы сделали замены $\Delta \rightarrow \Delta - x$, $x' \rightarrow x - x'$. Следовательно, условие (17) выполнено ввиду леммы 3.1, неравенства (34) и того факта, что S содержит всего лишь два уравнения. Таким образом, в случае $t = 1$ оценка (35) доказана.

Пусть теперь $t \geq 2$. Пусть $\sum_\omega a(z_\omega)\bar{\rho}_\omega = 0$ — произвольное уравнение из S , $\bar{\rho}_\omega \in \{0, \pm 1\}$. Предположим, что для некоторого ω выполнено $\bar{\rho}_\omega \neq 0$ и $\eta(z_\omega) = 1$ (см. определение z_ω выше). Без ограничения общности можно считать, что $\bar{\rho}_{\vec{1}} = -1$, где $\vec{1} = (1, \dots, 1)$. Тогда $a(z_{\vec{1}}) = \sum_{\omega, \omega \neq \vec{1}} a(z_\omega)\bar{\rho}_\omega$ и мы можем подставить это выражение в формулу (38). Затем сделаем замену переменных

$$x \rightarrow x - y_2, \quad x' \rightarrow x' - y_2, \quad y'_2 - y_2 = q.$$

Таким образом, от переменной y'_2 мы перешли к переменной q . Опишем все выражения, присутствующие в σ_t , которые содержат величины $x', q, y'_3, \dots, y'_t$. Это будут $e(x'a(x + q + y'_3 + \dots + y'_t))$, $e(x'a(x + \Delta + q + y'_3 + \dots + y'_t))$ и, может быть, выражение

$e((x' - y_2)a(x' + q + y'_3 + \dots + y'_t))$, но никак не выражение $e((x' - y_2)a(x' + \Delta + q + y'_3 + \dots + y'_t))$. Положим

$$\Theta_{y_2, x, \Delta}^{(1)}(x', q, y'_3, \dots, y'_t) = e(x'a(x + q + y'_3 + \dots + y'_t) + x'a(x + \Delta + q + y'_3 + \dots + y'_t)), \quad (39)$$

$$\Theta_{y_2, x, \Delta}^{(2)}(x', q, y'_3, \dots, y'_t) = \Theta_{y_2, x, \Delta}^{(1)}(x', q, y'_3, \dots, y'_t) \cdot e((x' - y_2)a(x' + q + y'_3 + \dots + y'_t)), \quad (40)$$

если член $e((x' - y_2)a(x' + q + y'_3 + \dots + y'_t))$ в σ_t действительно существует. Как было сказано выше, остальные члены не содержат рассматриваемые переменные.

Применяя лемму 3.1, находим

$$\begin{aligned} & N^{2t} \sum_{y_2, x, \Delta} \|\Theta_{y_2, x, \Delta}^{(1)}(x', q, y'_3, \dots, y'_t)\|_{U^t}^{2^t} \\ &= \sum_{y_2, x, \Delta} \sum_{x', q, y'_3, \dots, y'_t} \sum_{(x')', (q)', (y'_3)', \dots, (y'_t)'} \\ & \quad e\left(\sum_{\omega \in \{0,1\}^t} (-1)^\omega ((x')^{\omega_1} a(x + q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t}) \right. \\ & \quad \left. + (x')^{\omega_1} a(x + \Delta + q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t}))\right) \\ &= \sum_{y_2, x, \Delta} \sum_{x', q, y'_3, \dots, y'_t} \sum_{(x')', (q)', (y'_3)', \dots, (y'_t)'} \\ & \quad e\left(\sum_{\omega \in \{0,1\}^t} (-1)^\omega ((x')^{\omega_1} a(q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t}) \right. \\ & \quad \left. + (x')^{\omega_1} a(\Delta + q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t}))\right) \\ &\leq N^{2t+3} \|f(x, y_1 + \dots + y_t)\|_{U^{t+1}}^{2^{t+1}}, \end{aligned}$$

поскольку мы можем просуммировать последнее выражение по переменным $\Delta, x', y'_3, \dots, y'_t$. Делая аналогичную замену, а затем снова суммируя по переменным $\Delta, x', y'_3, \dots, y'_t$, имеем

$$\begin{aligned} & N^{2t} \sum_{y_2, x, \Delta} \|\Theta_{y_2, x, \Delta}^{(2)}(x', q, y'_3, \dots, y'_t)\|_{U^t}^{2^t} \\ &= \sum_{y_2, x, \Delta} \sum_{x', q, y'_3, \dots, y'_t} \sum_{(x')', (q)', (y'_3)', \dots, (y'_t)'} \\ & \quad e\left(\sum_{\omega \in \{0,1\}^t} (-1)^\omega ((x')^{\omega_1} a(q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t}) \right. \\ & \quad \left. + (x')^{\omega_1} a(\Delta + q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t}))\right) \\ & \quad \times e\left(\sum_{\omega \in \{0,1\}^t} (-1)^\omega ((x')^{\omega_1} - y_2)a((x')^{\omega_1} - x + q^{\omega_2} + (y'_3)^{\omega_3} + \dots + (y'_t)^{\omega_t})\right) \\ &\leq N^{2t+3} \|f(x, y_1 + \dots + y_t)\|_{U^{t+1}}^{2^{t+1}}. \end{aligned}$$

Используя лемму 3.2, получаем (37).

Вернемся опять к уравнению $\sum_{\omega} a(z_{\omega}) \bar{\rho}_{\omega} = 0$ и предположим, что для всех $\bar{\rho}_{\omega} \neq 0$ выполнено $\eta(z_{\omega}) = 0$. Но тогда, делая замену переменных $y_2 \rightarrow y_2 - \Delta$, $y'_2 \rightarrow y'_2 - \Delta$, мы сводим выражение (38) к уже рассмотренной ситуации. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Очевидно оценка (35) не имеет места, если функция $a(x)$ – постоянная. С другой стороны, легко видеть, что тогда не выполнено и условие (34). Если взять $a(x) = x$, тогда (37) и (36) не имеют места при $t = 2$. Для $t \geq 2$ надо положить $a(x) = x^{t-1}$, и тогда норма соответствующих функций из (36) и (37) равняется единице. Все это показывает, что в некотором смысле условия (34), (36) являются необходимыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Проанализируем несколько более общие функции вида

$$f(z_1 + \dots + z_r + x_1 + \dots + x_s, x_1 + \dots + x_s + y_1 + \dots + y_t),$$

где r – натуральное число, $s, t \geq 0$. Если $r \geq 2$, то $\|f\|_{U^{s+t+r}} = 1$ для любой функции $a(x)$. Далее, если $r = 0$, $t = 0$ и $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_p$, p – простое, то положим $a(x) = x^{-1}$. Легко видеть, что тогда неравенство (34) выполнено (см., например, следствие 3.7 ниже), но $\|f\|_{U^s} = 1$. Случай $r = s = 0$ не интересен. Рассмотрим ситуацию, когда $r = 0$, $s \geq 2$, $t \geq 1$. Легко видеть, что условие

$$\|e(xa(y_1 + \dots + y_{s+t}))\|_{U^{s+t+1}} = o(1)$$

влечет

$$\|f(x_1 + \dots + x_s, x_1 + \dots + x_s + y_1 + \dots + y_t)\|_{U^{s+t}} = o(1)$$

тривиальным образом (см. первый шаг доказательства следствия 3.3) и, кроме того, для $a(x) = x^{s+t-2}$ мы имеем

$$\|f(x_1 + \dots + x_s, x_1 + \dots + x_s + y_1 + \dots + y_t)\|_{U^{s+t}} = 1.$$

Наконец, в случае $r = 1$, $s, t \geq 1$ мы можем применить те же аргументы. Таким образом, для верхних оценок норм Гауэрса функций

$$f(z_1 + \dots + z_r + x_1 + \dots + x_s, x_1 + \dots + x_s + y_1 + \dots + y_t)$$

(и предположениях, аналогичных (36)) результаты нашего типа можно получить при единственном выборе параметров $r = 0$, $s = 1$, $t \geq 1$.

Докажем количественный вариант следствия 1.4.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть K – натуральное число, $a: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ – некоторая функция и $f(x, y) = e(x \cdot a(y))$. Предположим, что

$$|\{y \in \mathbf{G} : a(y) = j\}| \leq K, \quad j \in \mathbf{G}. \quad (41)$$

Тогда

$$\|f(x, x + y)\|_{U^2} \leq 3 \max \left\{ 2^{30} \left(\frac{2^8}{\log(1/\varepsilon_*)} \right)^{2^{-19}}, 4 \left(\frac{2^8}{N} \right)^{2^{-16}} \right\},$$

где $\varepsilon_* = (K/N)^{1/4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\|f(x, y)\|_{U^2}^4 = \frac{1}{N^4} \sum_{x, x', y, y'} e((x - x')(a(y) - a(y'))) = \frac{1}{N^2} \sum_{j \in \mathbf{G}} |M_j|^2,$$

где $M_j = \{y \in \mathbf{G} : a(y) = j\}$. По условию $|M_j| \leq K$ для всех $j \in \mathbf{G}$. Кроме того, $\sum_j |M_j| = N$. Значит, $\|f(x, y)\|_{U^2} \leq (K/N)^{1/4}$ и наше утверждение вытекает из следствия 3.3.

Например, если $K = N^{1-\kappa}$, $N \rightarrow \infty$, $\kappa > 0$, то

$$\|f(x, x + y)\|_{U^2} \ll 1/(\log N)^c,$$

где $c = c(\kappa)$. Более того, даже в случае, когда прообраз всякой (или, что более слабо, почти всякой) точки $j \in \mathbf{G}$ имеет мощность $o(N)$, мы получаем нетривиальную оценку для $\|f(x, x + y)\|_{U^2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Легко видеть, что

$$\|e(xa(y_1 + \dots + y_t))\|_{U^{t+1}}^{2^t} = N^{-2t} \cdot \#\left\{y_1, \dots, y_t, y'_1, \dots, y'_t : \sum_{\omega \in \{0,1\}^t} a(y^\omega)(-1)^{|\omega|} = 0\right\}.$$

Таким образом, условие (36) может рассматриваться как требование на функцию $a(x)$ “быть далекой от многочлена степени $t - 1$ ” (или, более точно, от нильпоследовательности степени $t - 1$, см., например, [4], [19], [22]).

Наконец, мы получим приложение следствия 3.7 к одному семейству подмножеств $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_N$. Напомним некоторые формулы из гармонического анализа. Преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ произвольной комплексной функции $f \in L_1(\mathbf{G})$ задается формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{G}} f(x)e(-\xi \cdot x). \quad (42)$$

Имеем

$$\sum_{x \in \mathbf{G}} |f(x)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \quad (\text{равенство Парсеваля}), \quad (43)$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} \widehat{f}(\xi)e(\xi \cdot x) \quad (\text{формула обращения}). \quad (44)$$

Если

$$(f * g)(x) := \sum_{y \in \mathbf{G}} f(y)g(x - y),$$

то

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}. \quad (45)$$

Сформулируем наш результат для специального семейства подмножеств из $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_N$.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Пусть $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_N$, N – простое число. Пусть также $a: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ – произвольная функция такая, что $a(y) \neq 0$ для всех $y \in \mathbf{G}$, $f(x, y) = P(x \cdot a(y)) - |P|/N$, где P – арифметическая прогрессия. Предположим, наконец, что неравенство (41) выполнено с $K \leq 2^{-18}|P|^4/N^3$. Тогда

$$\|f(x, x+y)\|_{U^2} \leq 3 \max \left\{ 2^{30} \left(\frac{2^8}{\log(1/\varepsilon_*)} \right)^{2^{-21}}, 4 \left(\frac{2^8}{N} \right)^{2^{-18}} \right\}, \quad (46)$$

где $\varepsilon_* = (4K/N)^{1/48}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы избавиться от логарифмов в оценках, мы применим простейшее сглаживание. Без ограничения общности предположим, что $P = \{0, 1, \dots, |P| - 1\}$. Пусть $P_1 = \{0, 1, \dots, t - 1\}$, $t = [2|P|^{2/3}K^{1/12}N^{1/4}]$ и $W(x) = |P_1|^{-1} \times (P * P_1)(x)$. Ясно, что $0 \leq W(x) \leq 1$, $\sum_x W(x) = |P|$ и $W(x) = P(x)$ для всех кроме, быть может, $2t$ точек $x \in \mathbf{G}$. По равенству Парсеваля, формуле (45) и неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\sum_r |\widehat{W}(r)| \leq \frac{1}{|P_1|} \sqrt{N|P_1|} \sqrt{N|P|} = N|P|^{1/2}t^{-1/2}. \quad (47)$$

Применяя неравенство треугольника для U^2 -нормы и формулу (44), получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{U^2}^4 &\leq \|W - |P|/N\|_{U^2}^4 + 32 \cdot tN^{-1} \\ &= \frac{1}{N^8} \sum_{(r_1, \dots, r_4) \neq \vec{0}} \widehat{W}(r_1) \cdots \widehat{W}(r_4) \\ &\quad \times \sum_{x, x', y, y'} e(r_1 x a(y)) e(-r_2 x' a(y)) e(-r_3 x a(y')) e(r_4 x' a(y')) + 32 \cdot tN^{-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Ясно, что для всех $r \neq 0$ выполнено $\|e(r \cdot x a(y))\|_{U^2} = \|e(x a(y))\|_{U^2}$. Имеем

$$\|e(x a(y))\|_{U^2} \leq (K/N)^{1/4}$$

(см. доказательство следствия 3.7). Используя последнее неравенство, лемму 1.2, формулы (47), (48), находим

$$\|f\|_{U^2}^4 \leq \left(\frac{|P|}{t} \right)^2 \left(\frac{K}{N} \right)^{1/4} N^{-1} + 32 \cdot tN^{-1} \leq 2^8 \left(\frac{K}{N} \right)^{1/12}.$$

Наконец, применяя следствие 3.3, получаем (46). Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Существует другой способ убедиться в малости $\|\cdot\|_{U^2}$ -нормы функции

$$f(x, y) = P(x \cdot a(y)) - \frac{|P|}{N} = P(x \cdot y) - \frac{|P|}{N}$$

в случае, когда $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_N$ и $a(y) = y$. Для этого нужно записать выражение $\|f\|_{U^2}$ в терминах мультипликативных характеров и применить неравенство Поля–Виноградова (см., например, [29]).

Автор выражает благодарность Н. Г. Мощевитину за ряд полезных обсуждений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. T. Gowers, “A new proof of Szemerédi’s theorem for arithmetic progressions of length four”, *Geom. Funct. Anal.*, **8**:3 (1998), 529–551.
- [2] W. T. Gowers, “A new proof of Szemerédi’s theorem”, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.
- [3] B. Green, T. Tao, “The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions”, *Ann. of Math. (2)*, **167**:2 (2008), 481–547.
- [4] B. Green, T. Tao, “An inverse theorem for the Gowers $U^3(G)$ norm”, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, **51**:1 (2008), 73–153.
- [5] B. Green, T. Tao, “The distribution of polynomials over finite fields, with applications to the Gowers norms”, *Contrib. Discrete Math.*, **4**:2 (2009), 1–36.
- [6] B. Green, T. Tao, “An equivalence between inverse sumset theorems and inverse conjectures for the U^3 norm”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **149**:1 (2010), 1–19.
- [7] B. Green, T. Tao, “The quantitative behaviour of polynomial orbits on nilmanifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **175**:2 (2012), 465–540.
- [8] B. Green, T. Tao, “Quadratic uniformity for the Möbius function”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **58**:6 (2008), 1863–1935.
- [9] B. Green, “Finite field models in additive combinatorics”, *Surveys in Combinatorics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **327**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 1–27.
- [10] T. Tao, T. Ziegler, “The inverse conjecture for the Gowers norm over finite fields via the correspondence principle”, *Anal. PDE*, **3**:1 (2010), 1–20.
- [11] A. Samorodnitsky, L. Trevisan, “Gowers uniformity, influence of variables, and PCPs”, *SIAM J. Comput.*, **39**:1 (2009), 323–360.
- [12] S. Lovett, R. Meshulam, A. Samorodnitsky, “Inverse conjecture for the Gowers norm is false”, *Theory Comput.*, **7** (2011), 131–145.
- [13] И. Д. Шкредов, “Об одной задаче Гауэрса”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 179–221.
- [14] I. D. Shkredov, “On a generalization of Szemerédi’s theorem”, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **93**:3 (2006), 723–760.
- [15] И. Д. Шкредов, “О двумерном аналоге теоремы Семереди в абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 181–224.
- [16] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [17] T. Tao, “A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi’s theorem”, *Electron. J. Combin.*, **13**:1 (2006), Research Paper 99.
- [18] T. Tao, “Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:2 (2008), 657–688.
- [19] B. Host, B. Kra, “Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **161**:1 (2005), 397–488.
- [20] B. Host, B. Kra, “Convergence of Conze–Lesigne averages”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **21**:2 (2001), 493–509.
- [21] B. Host, B. Kra, “Convergence of polynomial ergodic averages”, *Israel J. Math.*, **149**:1–19 (2005).
- [22] T. Ziegler, “A non-conventional ergodic theorem for a nilsystem”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **25**:4 (2005), 1357–1370.
- [23] T. Ziegler, “Universal characteristic factors and Furstenberg averages”, *J. Amer. Math. Soc.*, **20**:1 (2007), 53–97.
- [24] T. Austin, *On the Norm Convergence of Nonconventional Ergodic Averages*, Preprint.
- [25] W. T. Gowers, “Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs”, *Combin. Probab. Comput.*, **15**:1–2 (2006), 143–184.
- [26] W. T. Gowers, “Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem”, *Ann. of Math. (2)*, **166**:3 (2007), 897–946.

- [27] P. Erdős, E. Szemerédi, “On sums and products of integers”, *Studies in Pure Mathematics*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1983, 213–218.
- [28] J. Bourgain, N. Katz, T. Tao, “A sum-product estimate in finite fields и their applications”, *Geom. Funct. Anal.*, **14**:1 (2004), 27–57.
- [29] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Лань, СПб., 2004.

И. Д. Шкредов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ilya.shkredov@gmail.com

Поступило

26.09.2010

Исправленный вариант

19.05.2011