Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Лубышев, Кратная разрешимость нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 260–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:05:53

Кратная разрешимость нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка

В. Ф. Лубышев

Исследуется кратная разрешимость одного класса нелинейных эллиптических уравнений четного порядка с граничными условиями Дирихле. Также изучается соответствующая нелинейная гамильтонова система эллиптических уравнений высокого порядка.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. В настоящей работе исследуется существование кратных решений нелинейной задачи

$$\begin{cases} \Delta_p^{2m} u - \sum_{i=1}^k \operatorname{div}(\mu_i |\nabla u|^{q_i-2} \nabla u) = \lambda a |u|^{\alpha-2} u + b |u|^{\beta-2} u & \text{в } \Omega, \\ D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| \leq 2m-1, & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

где Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, λ – вещественный параметр, а

$$\Delta_p^{2m} u := \Delta^m (|\Delta^m u|^{p-2} \Delta^m u), \quad m \geq 1.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

- (H0) $a, b, \mu_i \in L^\infty(\Omega)$;
- (H1) $a, b, \mu_i \geq 0$ и $a, b \neq 0$;
- (H2) $\max(q_1, \dots, q_k) < p^*(2m-1)$;
- (H3) $1 < \alpha < p, q_1, \dots, q_k < \beta < p^*(2m)$,

где

$$p^*(s) := \begin{cases} \frac{pN}{N-ps} & \text{при } ps < N, \\ \infty & \text{при } ps \geq N. \end{cases}$$

Мы называем измеримую функцию $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *решением задачи* (P_λ) , если она принадлежит к соболевскому пространству $W_0^{2m,p}(\Omega)$ и для всех $\varphi \in W_0^{2m,p}(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} |\Delta^m u|^{p-2} \Delta^m u \Delta^m \varphi = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \mu_i |\nabla u|^{q_i-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} f_\lambda(\cdot, u) \varphi,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00441-а, 09.01.12157-офи_м).

где

$$f_\lambda(x, u) := \lambda a(x)|u|^{\alpha-2}u + b(x)|u|^{\beta-2}u.$$

Вторая часть данной работы посвящена изучению кратных решений следующей гамильтоновой системы высокого порядка:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = |v|^{r-2}v & \text{в } \Omega, \\ (-\Delta)^m v = \lambda a|u|^{\alpha-2}u + b|u|^{\beta-2}u & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{B}_m u = \mathbf{B}_m v = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathbf{S}_\lambda)$$

где

$$\mathbf{B}_m \varphi := (\varphi, \Delta \varphi, \dots, \Delta^{m-1} \varphi).$$

Более точно, нас интересуют сильные решения этой системы, которые принадлежат пространству $W_\Delta^{2m, r'}(\Omega) \times W_\Delta^{2m, \beta'}(\Omega)$, где

$$W_\Delta^{2m, s}(\Omega) := \{u \in W^{2m, s}(\Omega) \mid \mathbf{B}_m u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$$

и $r' = r/(r-1)$, $\beta' = \beta/(\beta-1)$.

В изучении существования кратных решений системы $(\mathbf{S}_\lambda)$ мы будем использовать аналоги предположений (H0), (H1) и (H3):

(S0) $a, b \in L^\infty(\Omega)$;

(S1) $a, b \geq 0$ и $a, b \not\equiv 0$;

(S2) $1 < \alpha < r' < \beta$ и $1/r + 1/\beta > 1 - 2m/N$.

Задачи с выпукло-вогнутыми нелинейностями изучались многими математиками. Основной работой в этом направлении является статья [1], в которой Амбросетти, Брезис и Серами рассмотрели задачу Дирихле для оператора Лапласа и нелинейности $f(u) = \lambda|u|^{r-2}u + |u|^{s-2}u$, где $0 < r < 2 < s \leq 2^*$. Ими было установлено существование такого $\lambda^* > 0$, что при $\lambda \in (0, \lambda^*)$ соответствующая задача имеет бесконечно много различных решений с отрицательной энергией и по меньшей мере два положительных решения. Для субкритического случая ($s < 2^*$) ими также было доказано существование бесконечного числа решений с положительной энергией. Результаты их работы были впоследствии обобщены на случай оператора p -лапласиана и некоторых более общих нелинейностей, существенно сохраняющих “выпукло-вогнутую” структуру (см. [2]–[7] и др.).

Недавно в работе [8] Гонгбаоа и Гуо было доказано существование бесконечного числа решений задачи Дирихле для оператора (p, q) -лапласиана, $-\Delta_p - \Delta_q$, и нелинейности $f(u) = \lambda|u|^{r-2}u + |u|^{p^*-2}u$, где $1 < r < q < p < N$. Более точно, в работе [8] доказано, что соответствующая задача имеет бесконечно много различных решений при условии, что $\lambda \in (0, \lambda^*)$, где λ^* – какое-то положительное число.

Теорема о горном перевале, вариационный принцип Экланда и метод верхних и нижних решений – основные инструменты, используемые в большинстве этих работ. Что касается других мощных методов изучения нелинейных задач, мы особо подчеркиваем глобальный метод расслоения Похожаева (см. [9], [10]). Метод расслоения – это один из наиболее действенных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений. В отношении его приложений мы бы хотели отметить интересные работы Божкова и Митидиери: работу [11], довольно близкую к нашей

“выпукло-вогнутой” тематике, где изучались положительные решения $u: [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ задачи:

$$(r^\alpha |u'(r)|^\beta u'(r))' = \lambda a(r) r^\gamma |u|^\beta u + b(r) r^\gamma |u|^{q-2} u$$

с граничными условиями $u'(0) = u(R) = 0$, и работу [12], в которой были получены некоторые результаты о существовании и несуществовании положительных решений нелинейной системы

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x) |u|^{p-2} u + (\alpha + 1) c(x) |u|^{\alpha-1} u |v|^{\beta+1} & \text{в } \Omega, \\ -\Delta_q v = \mu b(x) |v|^{q-2} v + (\beta + 1) c(x) |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v & \text{в } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Довольно большая работа проделана также и в отношении нелинейных эллиптических систем вида

$$\begin{cases} -\Delta u = f(v) & \text{в } \Omega, \\ -\Delta v = g(u) & \text{в } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область (см. [13]–[15] и др.). В [13] Клемент, де Фигейредо и Митидиери рассматривали задачу (1), когда $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ есть выпуклая область. При некоторых предположениях на функции f и g , включая условие $f'(0)g'(0) < \lambda_1^2$, они доказали, что система (1) имеет положительное решение в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. В работе [14] система (1) изучалась для случая, когда $f(s) = s^{r-1}$, где $1 < r \leq 2$, а g удовлетворяет $g(s) = o(s^{1/(r-1)})$ при $s \rightarrow 0$. При некоторых дополнительных предположениях были доказаны существование по меньшей мере одного нетривиального решения и, если функция g нечетна, бесконечного множества решений. Авторы работы [15] рассматривали задачу (1) для $f(v)$ и $g(u)$, замененных соответственно на $\lambda f(v)$ и $\lambda g(u)$, где $f(0), g(0) < 0$, а $\lambda > 0$ есть параметр. Предполагая, что область Ω выпукла, и налагая некоторые ограничения на f и g , они доказали существование по меньшей мере одного положительного решения для всех $\lambda \in (0, \lambda^*)$, где λ^* – некоторое положительное число. Отметим, что, так как в нашем случае α может быть очень близко к 1, эти результаты неприменимы к системе (S_λ) с $m = 1$.

В настоящей работе мы изучаем задачу Дирихле для дифференциальных операторов высокого порядка и выпукло-вогнутых нелинейностей. С одной стороны мы имеем дело с кратными решениями скалярной задачи (P_λ) , а с другой – с кратными решениями соответствующей нелинейной гамильтоновой системы (S_λ) . В отношении дифференциального оператора в (P_λ) отметим такие важные частные случаи, как Δ_p^2 , $\Delta_p^2 - \Delta_q$ и $\Delta_p^2 - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2}$.

Системы вида (S_λ) естественно изучать в контексте интерполяционных пар соболевских пространств (см. [16]–[18]). Однако мы, по существу, выводим существование кратных решений системы (S_λ) из существования кратных решений задачи (P_λ) , ввиду чего использование своего рода “приема плотности” является более предпочтительным для наших целей. Рассматриваемые нами задачи изучаются главным образом с помощью глобального метода расслоения Похожаева, который, как нам кажется, наиболее приспособлен для поставленных задач.

Сформулируем теперь наши основные результаты, для чего введем сперва функционал энергии $J \in C^1(W_0^{2m,p}(\Omega))$ задачи (P_λ) :

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\Delta^m u|^p + Q(u) - \frac{\lambda}{\alpha} A(u) - \frac{1}{\beta} B(u),$$

где

$$Q(u) := \sum_{i=1}^k \frac{1}{q_i} \int_{\Omega} \mu_i |\nabla u|^{q_i}, \quad A(u) := \int_{\Omega} a |u|^\alpha, \quad B(u) := \int_{\Omega} b |u|^\beta. \quad (2)$$

Критические точки J суть в точности решения (P_λ) . Итак, наши результаты таковы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (H0)–(H3). Тогда найдется такое $\lambda^* > 0$, что для любого $\lambda \in (0, \lambda^*)$ существуют две последовательности (u_n) и (w_n) различных решений задачи (P_λ) такие, что

$$J(u_m) < 0 < J(w_n) \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (S0)–(S2). Тогда найдется такое $\lambda^* > 0$, что для любого $\lambda \in (0, \lambda^*)$ система (S_λ) имеет бесконечно много различных сильных решений в $W_{\Delta}^{2m,r'}(\Omega) \times W_{\Delta}^{2m,\beta'}(\Omega)$.

Данная статья организована следующим образом. В п. 2 мы приводим необходимые сведения о глобальном методе расслоения – основном аналитическом аппарате, используемом в настоящей работе. Пункт 3 посвящен некоторым промежуточным результатам, которые будут нами использоваться при дальнейшем изложении. В п. 4 мы изучаем существование и кратность решений задачи (P_λ) с отрицательной энергией, в то время как в п. 5 мы исследуем существование кратных решений задачи (P_λ) с положительной энергией. Наконец, мы доказываем наши основные результаты – теоремы 1 и 2 – в п. 6.

2. Необходимые сведения. В данном пункте мы формулируем одну версию глобального метода расслоения Похожаева (см. [9], [10]), которая в дальнейшем будет интенсивно использоваться.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, дифференцируемой вне нуля. Через $\mathring{B}^\infty$ мы обозначаем замкнутый единичный шар в X , а через S^∞ – единичную сферу в X . Через B^∞ будем обозначать открытый единичный шар в X .

Пусть $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемый функционал, представимый в виде

$$J = \frac{1}{p} \|\cdot\|^p + R \quad (3)$$

для некоторых $p > 1$ и дифференцируемого функционала $R: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Нас интересуют критические точки функционала J , т.е. решения задачи

$$DJ(u) = 0.$$

Предположим, что для любого $v \in B^\infty$ уравнение

$$t^{p-1} + DR(tv)v = 0, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

имеет решение $t = t(v)$. Тогда введем функционал $I: B^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, определенный как

$$I(v) := \frac{t(v)^p}{p} + R(t(v)v), \quad (5)$$

где мы считаем, что отображение t дифференцируемо в $U \setminus \{0\}$ для какой-то окрестности U шара B^∞ (так что I также дифференцируемо в $U \setminus \{0\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Точка $v \in B^\infty$ есть критическая точка функционала I на B^∞ , если либо $v \in \mathring{B}^\infty$ и $DI(u) = 0$, либо $v \in S^\infty$ и v – условная критическая точка функционала I на S^∞ .

Для нашего удобства введем следующие два множества:

$$\mathcal{M} := \{v \in \mathring{B}^\infty \mid t(v) \neq 0\}, \quad \mathcal{M}_c := \{v \in B^\infty \mid t(v) \neq 0\}.$$

Теперь мы можем сформулировать вариант глобального метода расслоения, а именно сферический метод расслоения (см. [9], [10]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $H(v) := \|v\|$, тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) I не имеет критических точек в $\mathcal{M}$;
- (б) если $v \in \mathcal{M}_c$ – критическая точка I на B^∞ и $DH(v)v \neq 0$, то $u = t(v)v$ – критическая точка J .

В контексте нашей задачи (P_λ)

$$X = W_0^{2m,p}(\Omega), \quad \|u\| = \left(\int_\Omega |\Delta^m u|^p \right)^{1/p}$$

и

$$R(u) = Q(u) - \frac{\lambda}{\alpha} A(u) - \frac{1}{\beta} B(u), \quad (6)$$

где Q , A , B определены в (2). В качестве аналога уравнения (4) мы будем использовать уравнение

$$t^{p-\alpha} + \sum_{i=1}^k t^{q_i-\alpha} Q_i(v) - t^{\beta-\alpha} B(v) = \lambda A(v), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где

$$Q_i(v) := \int_\Omega \mu_i |\nabla v|^{q_i}.$$

3. Вспомогательные утверждения. Данный пункт посвящен некоторым промежуточным результатам, которые будут использоваться в дальнейшем изложении. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ такое же, как в п. 2.

ЛЕММА 3.1. Пусть функционалы J и I определены формулами (3) и (5) соответственно. Тогда

- (а) $DI(v) = t(v)DR(t(v)v)$;
- (б) если $v \in S^\infty$, то $DI(v)v = 0$ и

$$DI(v) = t(v)DJ(t(v)v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Зафиксировав произвольное $h \in X$, мы получим

$$\begin{aligned} DI(v)h &= t(v)^{p-1}Dt(v)h + (DR(t(v)v)v)(Dt(v)h) + t(v)DR(t(v)v)h \\ &= (t(v)^{p-1} + DR(t(v)v)v)Dt(v)h + t(v)DR(t(v)v)h = t(v)DR(t(v)v)h. \end{aligned}$$

(b) Так как $v \in S^\infty$, то

$$I(v) = J(t(v)v) \quad \text{и} \quad DJ(t(v)v)v = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t(v)} J(tv) = 0,$$

где последнее равенство следует из (4). Поэтому для любого $h \in X$ мы имеем

$$DI(v)h = t(v)DJ(t(v)v)h + (Dt(v)h)(DJ(t(v)v)v) = t(v)DJ(t(v)v)h.$$

Доказательство завершено.

Легко видеть, что уравнение (7) имеет не более двух решений. Положим

$$\lambda^* := \sup\{\lambda > 0 \mid \text{уравнение (7) имеет два решения для всех } v \in B^\infty \setminus \{0\}\}.$$

Мы покажем, что $0 < \lambda^* < \infty$ и для любого $\lambda \in (0, \lambda^*)$ определим два функционала на B^∞ следующим образом:

$$t_1(v) := \begin{cases} \text{наименьшее решение уравнения (7),} & \text{если } v \in B^\infty \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } v = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$t_2(v) := \begin{cases} \text{наибольшее решение уравнения (7),} & \text{если } v \in B^\infty \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{если } v = 0. \end{cases} \quad (9)$$

ЛЕММА 3.2. Для λ^* , t_1 , t_2 , определенных выше, справедливы следующие утверждения:

(а) $0 < \lambda^* < \infty$;

(b) $t_1, t_2 \in C^1(B^\infty \setminus \{0\})$, и t_1, t_2 слабо непрерывны на B^∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Возьмем любое $\lambda^* > 0$ такое, что

$$\max_{t>0} [t^{p-\alpha} - t^{\beta-\alpha} \max_{v \in B^\infty} B(v)] > \lambda^* \max_{v \in B^\infty} A(v).$$

Тогда уравнение (7) имеет в точности два решения для любых $\lambda \in (0, \lambda^*)$ и $v \in B^\infty \setminus \{0\}$. В частности, $0 < \lambda^*$. Неравенство $\lambda^* < \infty$ очевидно.

(b) Понятно, что $t_1(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$. Докажем, что $t_2(v) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow 0$. Функция

$$t \mapsto t^{p-\alpha} - t^{\beta-\alpha} B(v), \quad t > 0,$$

достигает своего максимума в точке

$$\left[\frac{p-\alpha}{\beta-\alpha} \frac{1}{B(v)} \right]^{1/(\beta-p)}.$$

Поэтому если $t_* = t_*(v)$ – точка максимума для функции

$$t \mapsto t^{p-\alpha} + \sum_{i=1}^k t^{q_i-\alpha} Q_i(v) - t^{\beta-\alpha} B(v), \quad t > 0,$$

то

$$t_2(v) \geq t_*(v) \geq \left[\frac{p-\alpha}{\beta-\alpha} \frac{1}{B(v)} \right]^{1/(\beta-p)} \rightarrow \infty \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

Пусть теперь

$$G(t, v) := t^{p-\alpha} + \sum_{i=1}^k t^{q_i-\alpha} Q_i(v) - t^{\beta-\alpha} \max_{v \in S^\infty} B(v),$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_1(v)} G(t, v) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_2(v)} G(t, v) < 0, \quad v \in B^\infty \setminus \{0\}.$$

Из теоремы о неявной функции следует, что $t_1, t_2 \in C^1(B^\infty \setminus \{0\})$. Доказательство завершено.

4. Случай отрицательной энергии. Определим функционал $I_1: B^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$I_1(v) := \frac{t_1(v)^p}{p} + R(t_1(v)v),$$

где R и t_1 определены в (6) и (8) соответственно. Функционал I_1 будет играть роль функционала I , введенного в п. 2.

ЛЕММА 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (а) $I_1: B^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывно дифференцируемый, слабо непрерывный, четный функционал, не имеющий критических точек в $\mathring{B}^\infty$ кроме нуля;
- (б) $I_1 < 0$ на S^∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Слабая непрерывность I_1 следует из слабой непрерывности R и t_1 . То, что I_1 не имеет критических точек в $\mathring{B}^\infty \setminus \{0\}$, следует из теоремы 3, ибо $\mathcal{M} = \mathring{B}^\infty \setminus \{0\}$.

Остается показать, что I_1 непрерывно дифференцируем в нуле и $DI_1(0) = 0$. Согласно пункту (а) леммы 3.1 и пункту (б) леммы 3.2 мы имеем

$$\|DI_1(v)\| = t_1(v)\|DR(t_1(v)v)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

В частности, $DI_1(0)$ существует и равен 0.

(б) Это следует из того, что при $v \in S^\infty$ точка $t_1(v)$ является точкой локального минимума функционала $t \mapsto J(tv)$, который отрицателен.

ТЕОРЕМА 4. *Функционал I_1 обладает последовательностью $(v_n)_{n \geq 0} \subset S^\infty$ различных критических точек на S^∞ с $I_1(v_0) = \min I_1(S^\infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как I_1 слабо непрерывен на B^∞ , существует такая точка $v_0 \in B^\infty$, что

$$I_1(v_0) = \min I_1(B^\infty).$$

Так как $I_1(0) = 0$, мы заключаем из леммы 4.1, что $v_0 \in S^\infty$. Понятно, что v_0 – критическая точка функционала I_1 на S^∞ .

Лемма 4.1 позволяет нам применить теорему Люстерника–Шнирельмана (см. [19], [20]) и заключить, что I_1 имеет бесконечное множество критических точек на S^∞ .

5. Случай положительной энергии. Определим функционал $I_2: B^\infty \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ следующим образом:

$$I_2(v) := \begin{cases} \frac{t_2(v)^p}{p} + R(t_2(v), v), & \text{если } v \in B^\infty \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{если } v = 0, \end{cases}$$

где R и t_2 определены в (6) и (9) соответственно. Функционал I_2 будет играть роль функционала I , введенного в п. 2.

ЛЕММА 5.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (a) $I_2: B^\infty \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ есть слабо непрерывный, четный функционал с $I_2 \in C^1(B^\infty \setminus \{0\})$;
- (b) если $s < p$, то

$$\frac{I_2(v)}{t_2(v)^s} \rightarrow \infty \quad \text{при } v \rightarrow 0;$$

- (c) I_2 не имеет критических точек в $\mathring{B}^\infty \setminus \{0\}$;
- (d) $I_2 > 0$ на S^∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) То, что I_2 слабо непрерывен в нуле, будет следовать из пункта (b) настоящей леммы. То, что $I_2: B^\infty \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывно дифференцируемый, слабо непрерывный, четный функционал, следует из пункта (b) леммы 3.2 и слабой непрерывности функционалов R и t_2 .

(b) Так как $t_2 = t_2(v)$ – решение уравнения (7), мы имеем

$$I_2(v) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}\right)t_2(v)^p + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{\beta}\right)t_2(v)^{q_i}Q_i(v) - \lambda \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)t_2(v)^\alpha A(v).$$

Поэтому

$$\frac{I_2(v)}{t_2(v)^s} \geq t_2(v)^{p-s} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}\right) - \lambda \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)t_2(v)^{\alpha-p} A(v) \right].$$

Ввиду пункта (b) леммы 3.2 $t_2(v) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\frac{I_2(v)}{t_2(v)^s} \geq t_2(v)^{p-s} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta} + o(1) \right] \rightarrow \infty \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

- (c) Это следует из теоремы (3), ибо $\mathcal{M} = \mathring{B}^\infty \setminus \{0\}$.
- (d) Это следует из того, что для любого $v \in S^\infty$

$$I_2(v) = \max_{t>0} J(tv) > 0.$$

ЛЕММА 5.2. *Существует такая функция $w_0 \in S^\infty$, что*

$$I_2(w_0) = \min I_2(B^\infty) > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как I_2 слабо непрерывен на B^∞ (см. пункт (а) леммы 5.1), найдется такая функция $w_0 \in B^\infty$, что

$$I_2(w_0) = \min I_2(B^\infty).$$

2) Так как $I_2(0) = \infty$, $w_0 \neq 0$. Поэтому $w_0 \in S^\infty$ и $I_2(w_0) > 0$, ввиду пунктов (с), (d) леммы 5.1.

ТЕОРЕМА 5. *Функционал I_2 имеет последовательность $(w_n)_{n \geq 0} \subset S^\infty$ различных критических точек на S^∞ с $I_2(w_0) = \min I_2(S^\infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Существование w_0 следует из доказанной выше леммы.

2) Так как $I_2 > 0$ на $B^\infty \setminus \{0\}$, функционал $T: B^\infty \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T(v) := \begin{cases} \frac{1}{I_2(v)^r} & \text{при } v \in B^\infty \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{при } v = 0, \end{cases}$$

корректно определен для всех $r > 0$. Легко видеть, что функционал T четный и слабо непрерывный на B^∞ . Также очевидно, что критические точки функционала T на S^∞ совпадают с критическими точками функционала I_2 на S^∞ .

3) Возьмем любое $r > 0$, для которого $T \in C^1(B^\infty)$. Нам только надо убедиться в том, что T непрерывно дифференцируем в нуле. Пусть $v \neq 0$. Ввиду пункта (а) леммы 3.1 мы имеем

$$DT(v) = -r \frac{DI_2(v)}{I_2(v)^{r+1}} = r \frac{t_2(v)DR(t_2(v)v)}{I_2(v)^{r+1}},$$

а следовательно,

$$\|DT(v)\| \leq r \frac{t_2(v)\|DR(t_2(v)v)\|}{I_2(v)^{r+1}}.$$

Так как

$$\|DR(u)\| \leq \|DA(u)\| + \|DB(u)\| + \|DQ(u)\| \leq C \left(\|u\|_\alpha^{\alpha-1} + \|u\|_\beta^{\beta-1} + \sum_{i=1}^k \|\nabla u\|_{q_i}^{q_i-1} \right),$$

мы заключаем, что

$$\|DT(v)\| \leq rC \frac{t_2(v)^\alpha \|v\|_\beta^{\alpha-1} + t_2(v)^\beta \|v\|_\beta^{\beta-1} + \sum_{i=1}^k t_2(v)^{q_i} \|\nabla u\|_{q_i}^{q_i-1}}{I_2(v)^{r+1}}.$$

Ввиду пункта (b) лемм 5.1 и 3.2, очевидно, что если, скажем, $r+1 \geq \beta$, то мы будем иметь

$$\|DT(v)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

В частности, $DT(0)$ существует и равен нулю. Так что $T \in C^1(B^\infty)$.

4) Согласно пункту (с) леммы 5.1 нуль – единственная критическая точка функционала T в $\mathring{B}^\infty$. Нам также известно, что T – непрерывно дифференцируемый, слабо непрерывный, четный функционал на B^∞ . Поэтому, по теореме Люстерника–Шнирельмана (см. [19], [20]), T (а следовательно, и I_2) должен иметь бесконечно много различных критических точек на S^∞ . Доказательство завершено.

6. Доказательство основных результатов. Теперь у нас есть все для доказательства наших основных результатов – теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Возьмем последовательности (v_n) и (v'_n) как в теоремах 4 и 5 соответственно. Тогда согласно пункту (b) теоремы 3 функции $u_n = t_1(v_n)v_n$ и $w_n = t_2(v'_n)v'_n$ суть решения задачи (P_λ) и удовлетворяют всем утверждениям доказываемой теоремы. Доказательство завершено.

Выделим в $W_\Delta^{2m,p}(\Omega)$ следующее линейное подпространство:

$$C_\Delta^\infty(\bar{\Omega}) := \{\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mid \mathbf{B}_m \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

ЛЕММА 6.1. Для любого $q > 1$ справедливы следующие утверждения:

- (a) $\Delta_q^{2m} : W_\Delta^{2m,q}(\Omega) \rightarrow (W_\Delta^{2m,q}(\Omega))^*$ есть биекция;
- (b) $C_\Delta^\infty(\bar{\Omega})$ плотно в $W_\Delta^{2m,q}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Зафиксируем $l \in (W_\Delta^{2m,q}(\Omega))^*$ и докажем, что существует единственная функция $u_l \in W_\Delta^{2m,q}(\Omega)$ такая, что $\Delta_q^{2m} u_l = l$.

Так как

$$T := (-\Delta)^m : W_\Delta^{2m,q}(\Omega) \rightarrow L^q$$

есть изоморфизм, изоморфизмом также является и его сопряженное отображение $T^* : L^{q'} \rightarrow (W_\Delta^{2m,q}(\Omega))^*$, заданное формулой

$$\langle T^* f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \cdot (-\Delta)^m \varphi.$$

Положим $f_l := (T^*)^{-1}l$, и пусть u_l – единственное решение уравнения

$$(-\Delta)^m u_l = |f_l|^{1/(q-1)-1} f_l, \quad u_l \in W_\Delta^{2m,q}.$$

Очевидно, что $|\Delta^m u_l|^{q-2} (-\Delta)^m u_l = f_l$ и

$$\Delta_q^{2m} u_l = T^* f_l = l.$$

- (b) Достаточно показать, что для любого $l \in (W_\Delta^{2m,q}(\Omega))^*$

$$C_\Delta^\infty(\bar{\Omega}) \subset \ker l \quad \text{влечет} \quad l = 0.$$

Зафиксируем любое $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и возьмем (единственную) функцию $v \in C_\Delta^\infty(\bar{\Omega})$ такую, что $(-\Delta)^m v = \varphi$. Тогда

$$\int_\Omega f_l \varphi = \int_\Omega f_l \cdot (-\Delta)^m v \equiv \langle l, v \rangle = 0.$$

Так как гладкая функция φ выбиралась произвольным образом, мы заключаем, что $f_l = 0$ или, что то же самое, $l = 0$. Доказательство завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $p := r/(r-1)$. По теореме 1 задача (P_λ) имеет бесконечно много различных решений. Поэтому для доказательства данной теоремы достаточно показать, что если $u \in W_0^{2m,p}(\Omega)$ – решение задачи (P_λ) с $p := r'$ и $\mu_i \equiv 0$, а

$$v := |\Delta^m u|^{p-2} (-\Delta)^m u,$$

то $v \in W_{\Delta}^{2m, \beta'}(\Omega)$ и (u, v) – решение системы (S_{λ}) .

Обозначим через $\bar{v} \in W_{\Delta}^{2m, \beta'}(\Omega)$ единственное строгое решение задачи

$$\begin{cases} (-\Delta)^m \bar{v} = f_{\lambda}(\cdot, u) & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{B}_m \bar{v} = 0 & \text{на } \Omega, \end{cases}$$

а через $\bar{u} \in W_{\Delta}^{2m, s}(\Omega)$, $s > 1$, – единственное строгое решение задачи

$$\begin{cases} (-\Delta)^m \bar{u} = |\bar{v}|^{r-2} \bar{v} & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{B}_m \bar{u} = 0 & \text{на } \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Для любого $\varphi \in C_{\Delta}^{\infty}(\bar{\Omega})$ мы имеем

$$\langle \Delta_p^{2m} \bar{u}, \varphi \rangle \equiv \int_{\Omega} |\Delta^m \bar{u}|^{p-2} \Delta^m \bar{u} \Delta^m \varphi = \int_{\Omega} \bar{v} (-\Delta)^m \varphi = \int_{\Omega} f_{\lambda}(\cdot, u) \varphi = \langle \Delta_p^{2m} u, \varphi \rangle.$$

Применяя лемму 6.1, мы заключаем, что $\bar{u} \equiv u$. В частности, $\bar{u} \in W_{\Delta}^{2m, p}(\Omega)$. Согласно (10) $\bar{v} = |\Delta^m \bar{u}|^{p-2} (-\Delta)^m \bar{u}$. Поэтому мы также имеем $\bar{v} \equiv v$. Доказательство завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, “Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems”, *J. Funct. Anal.*, **122**:2 (1994), 519–543.
- [2] A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero, I. Peral, “Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations”, *J. Funct. Anal.*, **137**:1 (1996), 219–242.
- [3] J. García Azorero, I. Peral Alonso, “Some results about existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem”, *Indiana Univ. Math. J.*, **43**:3 (1994), 941–957.
- [4] J. P. García Azorero, J. Manfredi, I. Peral Alonso, “Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations”, *Commun. Contemp. Math.*, **2**:3 (2000), 385–404.
- [5] Ya. Ilyasov, “On nonlocal existence results for elliptic equations with convex-concave nonlinearities”, *Nonlinear Anal.*, **6**:1-2 (2005), 211–236.
- [6] S. T. Kyritsi, N. S. Papageorgiou, “Pairs of positive solutions of p -Laplacian equations with combined nonlinearities”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **8**:3 (2009), 1031–1051.
- [7] S. Li, S. Wu, H.-S. Zhou, “Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities”, *J. Differential Equations*, **185**:1 (2002), 200–224.
- [8] G. Li, G. Zhang, “Multiple solutions for the p & q -Laplacian problem with critical exponent”, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **29**:4 (2009), 903–918.
- [9] С. И. Похожаев, “О методе расслоения решения нелинейных краевых задач”, *Дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Сборник статей. Посвящается памяти академика Сергея Львовича Соболева, Тр. МИАН СССР, **192**, Наука, М., 1990, 146–163.
- [10] S. I. Pohozaev, “Nonlinear variational problems via the fibering method”, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*. v. V, Handb. Differ. Equ., North-Holland, Amsterdam, 2008, 49–209.
- [11] Yu. Bozhkov, E. Mitidieri, “Existence of multiple solutions for quasilinear equations via fibering method”, *Contributions to Nonlinear Analysis*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **66**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006, 115–134.

- [12] Yu. Bozhkov, E. Mitidieri, “Existence of multiple solutions for quasilinear systems via fibering method”, *J. Differential Equations*, **190**:1 (2003), 239–267.
- [13] Ph. Clément, D. G. de Figueiredo, E. Mitidieri, “Positive splutions of semilinear elliptic systems”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:5-6 (1992), 923–940.
- [14] A. Salvatore, “Multiple solutions for elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth”, *J. Differential Equations*, **244**:10 (2008), 2529–2544.
- [15] M. Chhetri, P. Girg, “Existence and nonexistence of positive solutions for a class of superlinear semipositone systems”, *Nonlinear Anal.*, **71**:10 (2009), 4984–4996.
- [16] J. Hulshof, R. van der Vorst, “Differential systems with strongly indefinite variational structure”, *J. Funct. Anal.*, **114**:1 (1993), 32–58.
- [17] J. Hulshof, E. Mitidieri, R. C. A. M. van der Vorst, “Strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:6 (1998), 2349–2365.
- [18] D. G. de Figueiredo, B. Ruf, “Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth”, *Mediterr. J. Math.*, **1**:4 (2004), 417–431.
- [19] Э. С. Цитланидзе, “Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения”, Тр. ММО, **2**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1953, 235–274.
- [20] М. М. Вайнберг, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*, Гос-техиздат, М., 1956.

В. Ф. Лубышев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: v.lubyshev@gmail.com

Поступило

29.09.2010