Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Преображенский, Новая оценка в теореме о среднем И. М. Виноградова, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 285–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8937>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:31:59

Новая оценка в теореме о среднем И. М. Виноградова

С. Н. Преображенский

В работе уточняется верхняя граница для интеграла Виноградова.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Через $[x]$ будем обозначать наибольшее целое число $\leq x$, $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число $\geq x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Интегралом Виноградова или средним значением Виноградова* [1] называется величина

$$J_{s,k}(P) = \int_{[0,1]^k} \left| \sum_{1 \leq x \leq P} e(\alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k) \right|^{2s} d\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $e(z) = e^{2\pi iz}$. Величина $J_{s,k}(P)$ равна числу решений системы диофантовых уравнений

$$\sum_{i=1}^s ((x_i)^j - (y_i)^j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k, \quad x_i, y_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq x_i, y_i \leq P.$$

Здесь переменные x_i, y_i удовлетворяют выписанным условиям для каждого i .

Нетрудно показать, что справедлива следующая оценка снизу:

$$J_{s,k}(P) \geq \max((2s)^{-k} \lfloor P \rfloor^{2s-k(k+1)/2}, \lfloor P \rfloor^s).$$

Верхние оценки для $J_{s,k}(P)$ будем записывать в виде

$$J_{s,k}(P) \leq D(s, k) P^{2s-k(k+1)/2+\eta(s,k)}, \quad (1.1)$$

где $\eta(s, k) \geq 0$, $D(s, k)$ не зависит от P . В 1975 г. Стечкин [2] доказал оценку (1.1) при

$$\eta(\tau k, k) = \frac{1}{2} k^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^\tau, \quad D(\tau k, k) = \exp(C \min(\tau, k) k^2 \log k)$$

с некоторой абсолютной константой C . Улучшения в показателе степени числа P при малых значениях s ($s \leq k(k+1)/2$) были получены Архиповым и Карацубой [3], Тыриной [4] и Вули [5]. В диапазоне $1 \leq s \ll k^2 \log k$ улучшения принадлежат Вули [6] и Форду [7]. В работе Форда верхняя оценка для $J_{s,k}(P)$ применяется для

получения оценок модуля дзета-функции Римана в окрестности единичной прямой с явно выписанными константами. Эти оценки модуля дзета-функции, в свою очередь, имеют важные теоретико-числовые приложения. В настоящей работе мы доказываем следующие теоремы о среднем, которые улучшают результаты Форда.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k и s — целые числа, $k \geq 2000$, D — вещественное число, $1 \leq D \leq (k-1)/2$,

$$H = H(D, k) = \frac{(7/8)D - 7D(D+1)/(16k)}{1 + (2Dk - D(D+1))/(2k^2)}, \quad H \geq 1,$$

и

$$2k^2 \leq s \leq \frac{1}{2}k^2 \left(\frac{1}{2} + \log \left(\frac{3k}{8D} \right) - \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} + \frac{5}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) \right).$$

Тогда справедлива оценка

$$J_{s,k}(P) \leq k^{2.055k^3 - 5.91k^2 + 3s} 1.06^{sk + 2s^2/k - 9.7278k^3} P^{2s - k(k+1)/2 + \Delta_s}, \quad P \geq 1,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_s = & \frac{3}{8}k^2 \exp \left(\frac{1}{2} - \frac{2s}{k^2} - \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} + \frac{5}{6k} \right. \\ & \left. + 0.67 \frac{1 + 1/2^{H-2} + 3/(2k-1)}{Dk} + \frac{2(s \bmod k)}{k^3} \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть k и s — целые числа. Тогда оценка

$$J_{s,k}(P) \leq k^{\theta k^3} P^{2s - k(k+1)/2 + 0.001k^2}, \quad P \geq 1,$$

справедлива при

$$129 \leq k < 16000, \quad s \geq 3.20354k^2, \quad \theta = 2.4183; \quad (1.2)$$

$$k \geq 16000, \quad s \geq 3.213303k^2, \quad \theta = 2.3291. \quad (1.3)$$

2. Определения и вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. При $N > 20$ и $x \geq 2N \log N$ найдутся по меньшей мере N простых чисел в полуинтервале $(x, 2x]$. При $0 < \delta \leq 1/2$, $N/\log N \geq 6/\delta$, $x \geq e^{1.5+1.5/\delta}$ и $x \geq (6/\delta)N \log N$ найдутся по меньшей мере N простых чисел в полуинтервале $(x, x + \delta x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $0 \leq d \leq k-1$, и T — натуральное число. Будем говорить, что набор из k многочленов

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[x]^k$$

имеет тип (d, T) , если Φ_j тождественно равен нулю при $j \leq d$, а при $j > d$ многочлен Φ_j имеет степень $j-d$ и старший коэффициент $(j!/(j-d)!)2^m T$ при некотором целом $m \geq 0$.

ЛЕММА 2. Пусть набор Φ имеет тип (d, T) , $z_1, \dots, z_{k-d}$ – целые числа. Тогда

$$J_{k-d}(\mathbf{z}; \Phi) := \det(\Phi'_j(z_i))_{\substack{d+1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq k-d}} = (2^m T)^{k-d} \prod_{j=d+1}^k \frac{j!}{(j-d-1)!} \prod_{1 \leq i' < i'' \leq k-d} (z_{i''} - z_{i'}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получается с помощью элементарных преобразований строк матрицы $(\Phi'_j(z_i))$.

3. Основные леммы. Пусть k, r – натуральные числа, $1 \leq r \leq k$, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$, $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_k)$ – системы многочленов, p – простое число, q – натуральное число, $L_s(P, Q; \Phi, \Psi; p, q, r)$ обозначает число решений системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} (\Phi_j(z_i) - \Phi_j(w_i)) + (\Psi_j(z_k) - \Psi_j(w_k)) + (pq)^j \sum_{i=1}^s ((u_i)^j - (v_i)^j) &= 0, \quad 1 \leq j \leq k; \\ 1 \leq z_i, w_i \leq P, \quad z_i &\equiv w_i \pmod{p^r}, \quad 1 \leq u_i, v_i \leq Q. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3. Пусть k, r, s – целые числа такие, что

$$k \geq 4, \quad 2 \leq r \leq k, \quad s \geq 1;$$

M, P – вещественные числа,

$$P^{1/(k+1)} \leq M \leq P^{1/r}, \quad 32s^2 M < P.$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество, состоящее из k^3 наименьших простых чисел, превосходящих M , и пусть $\mathcal{P} \subset (M, 2M]$. Тогда существует простое число $p \in \mathcal{P}$ такое, что

$$J_{s+k,k}(P) \leq 4k^3 k! p^{2s+(r^2-r)/2} L_s\left(P, \frac{P}{p}; \Phi, \Psi; p, 1, r\right),$$

где Φ, Ψ – некоторые системы многочленов типа $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7].

ЛЕММА 4. Пусть k, r, d, s – целые числа такие, что

$$k \geq 4, \quad 2 \leq r \leq k, \quad 0 \leq d \leq r-2, \quad s \geq d+1;$$

$q \geq 1$, p – простое число, Φ, Ψ – системы многочленов типа $(d, T_1), (d, T_2)$, соответственно, причем $T_1, T_2 \leq P^d$; M, P, Q – вещественные числа,

$$P^{1/(k+1)} \leq M \leq P^{1/r}, \quad 32s^2 M < Q \leq P.$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество, состоящее из k^3 наименьших простых чисел, превосходящих M , и пусть $\mathcal{P} \subset (M, 2M]$. Тогда существуют системы многочленов $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$ типа $(d+1, T'_1), (d+1, T'_2)$, где $T'_1, T'_2 \leq P^{d+1}$, и простое число $p' \in \mathcal{P}$ такие, что

$$L_s(P, Q; \Phi, \Psi; p, q, r)$$

$$\begin{aligned} &\leq (2P)^k \max \left[k^k J_{s,k}(Q), \sqrt{J_{s,k}(Q) 4k^3 k! (p')^{2s+(r^2-r+(d+1)^2-(d+1)+2)/2} \left(\frac{1}{(p')^{d+1}} + \frac{p^r}{P} \right)} \right. \\ &\quad \left. \times 2p^{-rk} \left(L_s\left(P, \frac{Q}{p'}; \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}; p', pq, r\right) \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\Phi = \Phi_0$, $\Psi = \Psi_0$. Обозначим для краткости $L_s(P, Q; \Phi, \Psi; p, q, r)$ через L . Тогда

$$L \leq 2 \max(U_0, U_1),$$

где U_0 – число решений системы (3.1) таких, что $w_i = z_i$ при некотором i , и U_1 – число решений системы (3.1) таких, что $w_i \neq z_i$ при каждом i . Пусть

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{x \leq Q} e(\alpha_1 p q x + \cdots + \alpha_k p^k q^k x^k), \\ I_1(\alpha) &= \sum_{1 \leq c \leq p^r} \left| \sum_{\substack{1 \leq w \leq P \\ w \equiv c \pmod{p^r}}} e(\alpha_1 \Phi_1(w) + \cdots + \alpha_k \Phi_k(w)) \right|^2, \\ I_2(\alpha) &= \sum_{1 \leq c \leq p^r} \left| \sum_{\substack{1 \leq w \leq P \\ w \equiv c \pmod{p^r}}} e(\alpha_1 \Psi_1(w) + \cdots + \alpha_k \Psi_k(w)) \right|^2, \end{aligned}$$

так что

$$L = \int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-1} I_2(\alpha) |f(\alpha)|^{2s} d\alpha.$$

Сначала рассмотрим случай $U_0 \geq U_1$. Имеем

$$L \leq 2U_0 \leq 2(k-1)P \int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-2} I_2(\alpha) |f(\alpha)|^{2s} d\alpha + 2P \int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-1} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha. \quad (3.2)$$

Если максимальным из интегралов в этой оценке будет

$$\int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-1} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha,$$

то, используя неравенство Гёльдера, мы получим

$$\begin{aligned} L &\leq 2kP \int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-1} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \\ &\leq 2kP \left(\int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^k |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1-1/k} \left(\int_{[0,1]^k} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/k} \\ &= 2kP (L_s(P, Q; \Phi, \Phi; p, q, r))^{1-1/k} J_{s,k}(Q)^{1/k} \leq 2kPL^{1-1/k} J_{s,k}(Q)^{1/k}, \end{aligned}$$

откуда следует первое неравенство леммы. Если максимальным из интегралов в оценке (3.2) будет

$$\int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-2} I_2(\alpha) |f(\alpha)|^{2s} d\alpha,$$

то, используя неравенства Гёльдера и Коши, мы снова получим

$$L \leq 2kP \int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^{k-2} I_2(\alpha) |f(\alpha)|^{2s} d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2kP \left(\int_{[0,1]^k} I_1(\alpha)^k |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1-2/k} \\
 &\quad \times \left(\int_{[0,1]^k} I_2(\alpha)^k |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/k} \left(\int_{[0,1]^k} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/k} \\
 &= 2kP (L_s(P, Q; \Phi, \Phi; p, q, r))^{1-2/k} (L_s(P, Q; \Psi, \Psi; p, q, r))^{1/k} J_{s,k}(Q)^{1/k} \\
 &\leq 2kPL^{1-1/k} J_{s,k}(Q)^{1/k}.
 \end{aligned}$$

Если $U_1 \geq U_0$, то для каждого i мы можем записать $w_i = z_i + h_i p^r$, где $1 \leq |h_i| \leq P/p^r$. Заметим, что $P/p^r \geq 1$, так как в противном случае $U_1 = 0$. Положим

$$\begin{aligned}
 g_1(\alpha; h) &= \sum_{1 \leq z \leq P} e \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j (\Phi_j(z + hp^r) - \Phi_j(z)) \right), \\
 g_2(\alpha; h) &= \sum_{1 \leq z \leq P} e \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j (\Psi_j(z + hp^r) - \Psi_j(z)) \right).
 \end{aligned}$$

Существуют 2^k различных вариантов того, какие знаки имеют разности $w_i - z_i$, $1 \leq i \leq k$, так что

$$L \leq 2 \sum_{\substack{\eta_1, \dots, \eta_k \\ \eta_i \in \{-1, +1\}}} \int_{[0,1]^k} \sum_{\substack{\mathbf{h} \\ 1 \leq h_i \leq P/p^r}} g_1(\eta_1 \alpha; h_1) \cdots g_1(\eta_{k-1} \alpha; h_{k-1}) g_2(\eta_k \alpha; h_k) |f(\alpha)|^{2s} d\alpha.$$

Поскольку $g_i(-\alpha; h) = \overline{g_i(\alpha; h)}$, имеем

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{\substack{\mathbf{h} \\ 1 \leq h_i \leq P/p^r}} g_1(\eta_1 \alpha; h_1) \cdots g_1(\eta_{k-1} \alpha; h_{k-1}) g_2(\eta_k \alpha; h_k) \right| \\
 &\leq \sum_{\substack{h_1, \dots, h_{k-1} \\ 1 \leq h_i \leq P/p^r}} |g_1(\eta_1 \alpha; h_1)| \cdots |g_1(\eta_{k-1} \alpha; h_{k-1})| \left| \sum_{1 \leq h_k \leq P/p^r} g_2(\eta_k \alpha; h_k) \right| \\
 &= \sum_{\substack{h_1, \dots, h_{k-1} \\ 1 \leq h_i \leq P/p^r}} |g_1(\alpha; h_1)| \cdots |g_1(\alpha; h_{k-1})| \left| \sum_{1 \leq h_k \leq P/p^r} g_2(\alpha; h_k) \right|.
 \end{aligned}$$

Далее, используя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим и неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned}
 L &\leq 2^{k+1} \left(\frac{P}{p^r} \right)^{k-1} \int_{[0,1]^k} |g_1(\alpha; h)|^{k-1} \left| \sum_{1 \leq h_k \leq P/p^r} g_2(\alpha; h_k) \right| |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \\
 &\leq 2^{k+1} \left(\frac{P}{p^r} \right)^{k-1} \left(\int_{[0,1]^k} |g_1(\alpha; h)|^{2(k-1)} \left| \sum_{1 \leq h_k \leq P/p^r} g_2(\alpha; h_k) \right|^2 |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\int_{[0,1]^k} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$= 2^{k+1} \left(\frac{P}{p^r} \right)^{k-1} (K_s(P, Q; \Upsilon, \Psi; p, q, r))^{1/2} J_{s,k}(Q)^{1/2}, \quad (3.3)$$

где через $K_s(P, Q; \Upsilon, \Psi; p, q, r)$ обозначено число решений системы

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-1} (\Upsilon_j(z_i) - \Upsilon_j(w_i)) + (\Psi_j(z_k + h_k p^r) - \Psi_j(z_k)) - (\Psi_j(w_k + t_k p^r) - \Psi_j(w_k)) \\ & + (pq)^j \sum_{i=1}^s ((u_i)^j - (v_i)^j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k; \\ & 1 \leq z_i, w_i \leq P, \quad 1 \leq i \leq k; \quad 1 \leq h_k, t_k \leq \frac{P}{p^r}, \quad 1 \leq u_i, v_i \leq Q, \quad 1 \leq i \leq s, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\Upsilon_j(z) = \Phi_j(z + hp^r) - \Phi_j(z)$ при $j \geq d+2$, и $\Upsilon_j(z) \equiv 0$ при $j \leq d+1$. При $j \geq d+2$ многочлен Υ_j имеет степень $j-d-1$ и старший коэффициент $(j!/(j-d-1)!)hp^r 2^m T_1$ при некотором целом $m \geq 0$. Таким образом, система многочленов Υ имеет тип $(d+1, T_1 hp^r)$.

Обозначим через W множество систем многочленов типа $(d+1, T'_1)$, где $T'_1 \leq P^{d+1}$. Поскольку мы имеем тривиальную оценку

$$K_s(P, Q; \Upsilon, \Psi; p, q, r) \leq P^{2k} \left(\frac{P}{p^r} \right)^2 Q^{2s},$$

должна существовать система $\Upsilon_0 \in W$ такая, что

$$K_s(P, Q; \Upsilon_0, \Psi; p, q, r) = \max_{\Upsilon \in W} K_s(P, Q; \Upsilon, \Psi; p, q, r),$$

так как значения функции K_s – целые и ограничены сверху. Так что мы без ограничения общности будем считать, что $\Upsilon = \Upsilon_0$. Для краткости обозначим $K_s(P, Q; \Upsilon, \Psi; p, q, r)$ через K . Разобьем множество решений системы (3.4) на два класса: через S_2 обозначим число таких решений, что $z_i = z_j$ или $w_i = w_j$ при некотором $i \neq j$, а через S_1 – число остальных решений. Ясно, что $K \leq 2 \max(S_1, S_2)$. Предположим сначала, что $S_2 \geq S_1$. Пусть

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{x \leq Q} e(\alpha_1 p q x + \dots + \alpha_k p^k q^k x^k), \\ F(\alpha) &= \sum_{x \leq P} e(\alpha_1 \Upsilon_1(x) + \dots + \alpha_k \Upsilon_k(x)), \\ G(\alpha) &= \sum_{\substack{1 \leq h \leq P/p^r \\ x \leq P}} e \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j (\Psi_j(x + hp^r) - \Psi_j(x)) \right). \end{aligned}$$

Используя неравенства Гёльдера и Коши, получим

$$\begin{aligned} K &\leq 2S_2 \leq 2 \cdot 2 \cdot \binom{k-1}{2} \int_{[0,1]^k} |F(\alpha)|^{2(k-1)-2} |F(2\alpha)| |G(\alpha)|^2 |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \\ &< 2k^2 \left(\int_{[0,1]^k} |F(\alpha)|^{2(k-1)} |G(\alpha)|^2 |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1-1/(k-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_{[0,1]^k} |G(\alpha)|^2 |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/(2(k-1))} \\
 & \times \left(\int_{[0,1]^k} |F(2\alpha)|^{2(k-1)} |G(\alpha)|^2 |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/(2(k-1))} \\
 & = 2k^2 K^{1-1/(k-1)} (\tilde{J}_s(P, Q; \Psi; p, q, r))^{1/(2(k-1))} (K_s(P, Q; 2\Upsilon, \Psi; p, q, r))^{1/(2(k-1))} \\
 & \leq 2k^2 K^{1-1/(2(k-1))} \tilde{J}^{1/(2(k-1))}.
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что набор многочленов

$$2\Upsilon = (2\Upsilon_1(z), \dots, 2\Upsilon_k(z))$$

также имеет тип $(d+1, T'_1)$. По этой причине в определении системы многочленов типа (d, T) участвует параметр m . Таким образом, $K \leq (2k^2)^{2(k-1)} \tilde{J}$. С другой стороны, рассмотрев те решения системы (3.4), у которых $z_i = w_i$ для каждого i , получим оценку снизу $K \geq (P-1)^{k-1} \tilde{J}$ (число P не обязательно целое). По условию леммы $\mathcal{P} \subset (M, 2M]$, а значит, $M \geq k^3 - 1$ и $P-1 \geq (k^3 - 1)^2 - 1 > 4k^4$, так как $P \geq M^r$, и $r \geq 2$. Верхняя и нижняя оценки для K противоречат друг другу. Таким образом, $K \leq 2S_1$. Рассмотрим те решения системы (3.4), которые определяют число S_1 . По лемме 2 для некоторого целого $m \geq 0$ мы имеем

$$\begin{aligned}
 & J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \Upsilon) \\
 & = (2^m T'_1)^{2k-2(d+1)} \prod_{j=d+2}^k \left(\frac{j!}{(j-d-2)!} \right)^2 \prod_{1 \leq i' < i'' \leq k-d-1} (z_{i''} - z_{i'}) (w_{i''} - w_{i'}) \neq 0.
 \end{aligned}$$

По условию леммы, если $p' \in \mathcal{P}$, то $p' > M \geq k$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
 & \left| T'_1 T_2 p \prod_{1 \leq i' < i'' \leq k-d-1} (z_{i''} - z_{i'}) (w_{i''} - w_{i'}) \right| \\
 & < P^{d+1+d+1+(k-d-1)(k-d-2)} \leq P^{k^2-k} < P^{k^3/(k+1)} \leq M^{k^3} \leq \prod_{p' \in \mathcal{P}} p'.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого из тех наборов-решений, которые входят в число S_1 , найдется простое число $p' \in \mathcal{P}$, которое не является делителем числа

$$(d+1)! T_2 p^r J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \Upsilon)$$

для данного решения. Следовательно,

$$K \leq 2k^3 \max_{p' \in \mathcal{P}} S_3(p'), \quad (3.5)$$

где $S_3(p')$ есть число таких решений системы (3.4), для которых

$$\text{НОД}(p', (d+1)! T_2 p^r J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \Upsilon)) = 1. \quad (3.6)$$

Зафиксируем произвольное $p' \in \mathcal{P}$. Пусть

$$g(\alpha; b) = \sum_{\substack{x \leq Q \\ x \equiv b \pmod{p'}}} e(\alpha_1 p q x + \dots + \alpha_k p^k q^k x^k),$$

$$\tilde{F}(\alpha) = \sum_{\substack{z_1, \dots, z_{k-1} \\ \text{НОД}(J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon), p')=1}} e\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j (\Upsilon_j(z_1) + \dots + \Upsilon_j(z_{k-1}))\right),$$

$$G(\alpha) = \sum_{\substack{1 \leq h \leq P/p^r \\ x \leq P}} e\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j (\Psi_j(x + hp^r) - \Psi_j(x))\right).$$

Поскольку система многочленов Υ имеет тип $(d+1, T'_1)$, а система многочленов Ψ по условию имеет тип (d, T_2) , для любого решения системы (3.4) мы имеем

$$\sum_{i=1}^s ((u_i)^j - (v_i)^j) = 0, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Через $\mathcal{B}_s(\mathbf{w})$ обозначим множество решений (при условии $0 \leq c_i \leq p' - 1$ для каждого i) системы сравнений

$$\sum_{i=1}^s (c_i)^j \equiv w_j \pmod{p'}, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Тогда

$$S_3(p') \leq \int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 \sum_{\substack{\mathbf{w} \\ 1 \leq w_j \leq p'}} |U(\alpha; \mathbf{w})|^2 d\alpha,$$

где

$$U(\alpha; \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{B}_s(\mathbf{w})} g(\alpha; c_1) \cdots g(\alpha; c_s).$$

Выберем $c_{d+1}, \dots, c_s$ произвольным образом при условии $0 \leq c_i \leq p' - 1$, тогда $|\mathcal{B}_s(\mathbf{w})| \leq (p')^{s-d} \max_{\mathbf{v}} |\mathcal{B}_d(\mathbf{v})|$. Из теории симметрических многочленов получаем, что $|\mathcal{B}_d(\mathbf{v})| \leq d!$ и

$$|\mathcal{B}_s(\mathbf{w})| \leq d! (p')^{s-d}.$$

Используя неравенство Коши и неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получим

$$|U(\alpha; \mathbf{w})|^2 \leq |\mathcal{B}_s(\mathbf{w})| \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{B}_s(\mathbf{w})} |g(\alpha; c_1) \cdots g(\alpha; c_s)|^2 \leq \frac{d!}{s} (p')^{s-d} \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{B}_s(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^s |g(\alpha; c_i)|^{2s}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_3(p') &\leq d! (p')^{s-d} \sum_{\mathbf{c}} \max_{1 \leq i \leq s} \int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 |g(\alpha; c_i)|^{2s} d\alpha \\ &\leq d! (p')^{2s-d} \max_{0 \leq c \leq p'-1} S_4(c, p'), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где интеграл

$$S_4(c, p') = \int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 |g(\alpha; c)|^{2s} d\alpha$$

равен числу решений системы

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-1} (\Upsilon_j(z_i) - \Upsilon_j(w_i)) + (\Psi_j(z_k + h_k p^r) - \Psi_j(z_k)) - (\Psi_j(w_k + t_k p^r) - \Psi_j(w_k)) \\ & + (pq)^j \sum_{i=1}^s ((p' u_i - c)^j - (p' v_i - c)^j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k; \\ & 1 \leq z_i, w_i \leq P, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{НОД}(p', J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \Upsilon)) = 1, \\ & 1 \leq h_k, t_k \leq \frac{P}{p^r}, \quad 1 \leq u_i, v_i \leq \frac{Q+c}{p'}, \quad 1 \leq i \leq s. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть $S_5(c, p')$ обозначает число решений системы (3.8) таких, что $u_i > Q/p'$ или $v_i > Q/p'$ для некоторого i , а $S_6(c, p')$ обозначает число всех остальных решений. Предположим сначала, что $S_5(c, p') \geq S_6(c, p')$. Чтобы оценить $S_5(c, p')$ заметим, что полуинтервал $(Q/p', (Q+c)/p']$ содержит не более одного целого числа. Рассмотрев систему (3.8) с каждым из таких чисел в качестве u_i или v_i , представив число решений в виде интеграла, оценив его интегралом от модуля подынтегральной функции и используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} S_4(c, p') & \leq 2S_5(c, p') \leq 2 \cdot 2s \int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 |g(\alpha; c)|^{2s-1} d\alpha \\ & \leq 4s \left(\int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 |g(\alpha; c)|^{2s} d\alpha \right)^{1-1/2s} \\ & \quad \times \left(\int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2s} \\ & = 4s (S_4(c, p'))^{1-1/2s} \left(\int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2s}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_4(c, p') \leq (4s)^{2s} \int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Заметим, что в случае, который мы рассматриваем, $\lfloor (Q+c)/p' \rfloor > Q/p'$. И те решения системы (3.8), у которых $u_i = v_i$ для каждого i , дают оценку снизу

$$S_4(c, p') \geq \left(\frac{Q}{p'} \right)^s \int_{[0,1]^k} |\tilde{F}(\alpha)|^2 |G(\alpha)|^2 d\alpha.$$

А это невозможно в силу нижней границы для Q из условия леммы ($Q > 32s^2 M$, $p' \leq 2M$). Таким образом, $S_4(c, p') \leq 2S_6(c, p')$. По формуле бинома Ньютона

$$(p'pqy)^j = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (p'pqy - cpq)^l (cpq)^{j-l}.$$

Для каждого j умножим l -е уравнение, $1 \leq l \leq j$, системы (3.8) на $\binom{j}{l} (cpq)^{j-l}$ и просуммируем по l ; кроме того, можно добавить в систему “нулевое” уравнение

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} ((cpq)^j - (cpq)^j) \right) + ((cpq)^j - (cpq)^j) - ((cpq)^j - (cpq)^j) + \sum_{i=1}^s ((cpq)^j - (cpq)^j) = 0.$$

Таким образом, $S_6(c, p')$ есть число решений системы

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-1} (\tilde{\Phi}_j(z_i) - \tilde{\Phi}_j(w_i)) + (\Xi_j(z_k + h_k p^r) - \Xi_j(z_k)) - (\Xi_j(w_k + t_k p^r) - \Xi_j(w_k)) \\ & + (p' p q)^j \sum_{i=1}^s ((u_i)^j - (v_i)^j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k; \\ & 1 \leq z_i, w_i \leq P, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{НОД}(p', J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \tilde{\Phi}) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \tilde{\Phi})) = 1, \\ & 1 \leq h_k, t_k \leq \frac{P}{p^r}, \quad 1 \leq u_i, v_i \leq \frac{Q}{p'}, \quad 1 \leq i \leq s, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \Upsilon_l(z) (cpq)^{j-l}, \quad \Xi_j(z) = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \Psi_l(z) (cpq)^{j-l}.$$

Старший коэффициент многочлена $\tilde{\Phi}_j$ равен старшему коэффициенту многочлена Υ_j , старший коэффициент многочлена Ξ_j равен старшему коэффициенту многочлена Ψ_j . Следовательно, системы многочленов $\tilde{\Phi}$ и Ξ также имеют типы $(d+1, T'_1)$ и (d, T_2) соответственно (значения m не меняются). По лемме 2

$$J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon) = J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \tilde{\Phi}),$$

поэтому в системе (3.9) мы заменили условие

$$\text{НОД}(p', J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \Upsilon) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \Upsilon)) = 1$$

на условие

$$\text{НОД}(p', J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \tilde{\Phi}) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \tilde{\Phi})) = 1.$$

Далее, исключим из системы (3.9) переменные h_k и t_k . Через $S_6(c, p', h_0, t_0)$ обозначим число решений данной системы при фиксированной паре $(h_k, t_k) = (h_0, t_0)$; через $\mathcal{H}$ обозначим множество допустимых пар (h_0, t_0) . Имеем

$$S_6(c, p') \leq |\mathcal{H}| \max_{(h_0, t_0) \in \mathcal{H}} S_6(c, p', h_0, t_0). \quad (3.10)$$

Для оценки $|\mathcal{H}|$ рассмотрим $(d+1)$ -е уравнение системы (3.9). Поскольку системы многочленов $\tilde{\Phi}$ и Ξ имеют типы $(d+1, T'_1)$ и (d, T_2) соответственно, из $(d+1)$ -го уравнения следует сравнение

$$(d+1)! T_2 h_0 p^r - (d+1)! T_2 t_0 p^r \equiv 0 \pmod{(p')^{d+1}}, \quad 1 \leq h_0, t_0 \leq \frac{P}{p'},$$

из которого при условии $\text{НОД}(p', (d+1)! T_2 p^r) = 1$ (см. (3.6)) следует сравнение

$$h_0 \equiv t_0 \pmod{(p')^{d+1}}, \quad 1 \leq h_0, t_0 \leq \frac{P}{p'}.$$

Число решений такого сравнения не превосходит

$$\left(\frac{P}{p^r} \right) \left(\frac{P/p^r}{(p')^{d+1}} + 1 \right),$$

следовательно,

$$|\mathcal{H}| \leq \left(\frac{P}{p^r}\right) \left(\frac{P/p^r}{(p')^{d+1}} + 1\right) = \left(\frac{P}{p^r}\right)^2 \left(\frac{1}{(p')^{d+1}} + \frac{p^r}{P}\right).$$

Используя неравенство Коши для интеграла, равного $S_6(c, p', h_0, t_0)$, получим

$$\begin{aligned} S_6(c, p', h_0, t_0) &\leq (S_6(c, p', h_0, h_0))^{1/2} (S_6(c, p', t_0, t_0))^{1/2} \\ &\leq \max(S_6(c, p', h_0, h_0), S_6(c, p', t_0, t_0)) \leq S_6(c, p', h^*, h^*), \end{aligned}$$

где $S_6(c, p', h^*, h^*)$ есть число решений системы

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k-1} (\tilde{\Phi}_j(z_i) - \tilde{\Phi}_j(w_i)) + (\tilde{\Psi}_j(z_k) - \tilde{\Psi}_j(w_k)) \\ &+ (p'pq)^j \sum_{i=1}^s ((u_i)^j - (v_i)^j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} 1 \leq z_i, w_i \leq P, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{НОД}(p', J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \tilde{\Phi}) J_{k-(d+1)}(\mathbf{w}; \tilde{\Phi})) = 1, \\ 1 \leq u_i, v_i \leq \frac{Q}{p'}, \quad 1 \leq i \leq s, \end{aligned}$$

$\tilde{\Psi}_j(z) = \Xi_j(z + h^*p^r) - \Xi_j(z)$ при $j \geq d+2$, и $\tilde{\Psi}_j(z) \equiv 0$ при $j \leq d+1$. При $j \geq d+2$ многочлен $\tilde{\Psi}_j$ имеет степень $j-d-1$ и старший коэффициент $(j!/(j-d-1)!)h^*p^r T_2$. Это означает, что система многочленов $\tilde{\Psi}$ имеет тип $(d+1, T_2 h^* p^r)$. Таким образом, из (3.10) мы получили неравенство

$$S_6(c, p') \leq \left(\frac{P}{p^r}\right)^2 \left(\frac{1}{(p')^{d+1}} + \frac{p^r}{P}\right) S_6(c, p', h^*, h^*). \quad (3.12)$$

Наконец, мы вводим условие сравнимости для z_i и w_i . Ввиду (3.11)

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\tilde{\Phi}_j(z_i) - \tilde{\Phi}_j(w_i)) + (\tilde{\Psi}_j(z_k) - \tilde{\Psi}_j(w_k)) \equiv 0 \pmod{(p')^j}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Мы будем рассматривать только те сравнения, для которых $d+2 \leq j \leq k$, поскольку левая часть рассматриваемых сравнений тождественно равна нулю при $j \leq d+1$. Через $\mathcal{B}^*(\mathbf{m})$ обозначим множество наборов $\mathbf{z}$ таких, что $1 \leq z_i \leq (p')^r$ для каждого i , $\text{НОД}(p', J_{k-(d+1)}(\mathbf{z}; \tilde{\Phi})) = 1$ и

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Phi}_j(z_i)\right) + \tilde{\Psi}_j(z_k) \equiv m_j \pmod{(p')^{\min(j, r)}}, \quad d+2 \leq j \leq k.$$

По условию леммы $d+2 \leq r$. Для оценки $|\mathcal{B}^*(\mathbf{m})|$ сначала выберем $z_{k-d}, \dots, z_k$ произвольным образом $((p')^{r(d+1)})$ вариантов). Для каждого j имеется $(p')^{\max(0, r-j)}$ возможностей для m_j по модулю $(p')^r$, а при фиксированных $m_j \pmod{(p')^r}$ лемма Линника утверждает, что существует не более $(k-d-1)!$ решений $z_1, \dots, z_{k-d-1}$ по модулю $(p')^r$. Следовательно,

$$|\mathcal{B}^*(\mathbf{m})| \leq (k-d-1)! (p')^{(r-d-2)(r-d-1)/2 + r(d+1)}.$$

Определим суммы

$$H(\alpha; \mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{w} \\ 1 \leq w_i \leq P \\ w_i \equiv z_i \pmod{(p')^r}}} e \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j (\tilde{\Phi}_j(w_1) + \dots + \tilde{\Phi}_j(w_{k-1}) + \tilde{\Psi}_j(w_k)) \right),$$

$$f \left(\alpha; \frac{Q}{p'}; p'pq \right) = \sum_{x \leq Q/p'} e(\alpha_1 p' p q x + \dots + \alpha_k (p')^k p^k q^k x^k).$$

Далее, используя неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned} S_6(c, p', h^*, h^*) &\leq \int_{[0,1]^k} \sum_{\mathbf{m}} \left| \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}^*(\mathbf{m})} H(\alpha; \mathbf{z}) \right|^2 \left| f \left(\alpha; \frac{Q}{p'}; p'pq \right) \right|^{2s} d\alpha \\ &\leq \sum_{\mathbf{m}} |\mathcal{B}^*(\mathbf{m})| \int_{[0,1]^k} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}^*(\mathbf{m})} |H(\alpha; \mathbf{z})|^2 \left| f \left(\alpha; \frac{Q}{p'}; p'pq \right) \right|^{2s} d\alpha \\ &\leq (k-d-1)! (p')^{(r-d-2)(r-d-1)/2+r(d+1)} L_s \left(P, \frac{Q}{p'}; \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}; p', pq, r \right). \end{aligned}$$

Из (3.12), (3.7) и неравенства $d!(k-d-1)! \leq k!$ следует, что

$$\begin{aligned} S_3(p') &\leq 2k! (p')^{2s-d+(r-d-2)(r-d-1)/2+r(d+1)} \\ &\quad \times \left(\frac{P}{p^r} \right)^2 \left(\frac{1}{(p')^{d+1}} + \frac{p^r}{P} \right) L_s \left(P, \frac{Q}{p'}; \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}; p', pq, r \right). \end{aligned}$$

Используя (3.5) и (3.3), получим утверждение леммы.

Далее, мы применим леммы 3 и 4 для установления рекуррентного неравенства, связывающего верхнюю оценку для $J_{s+k,k}(P)$ с оценкой $J_{s,k}(Q)$.

ЛЕММА 5. Пусть $k \geq 26$, $4 \leq r \leq k$, $k \leq s \leq k^3$ и

$$J_{s,k}(Q) \leq CQ^{2s-k(k+1)/2+\Delta}, \quad Q \geq 1.$$

Пусть, далее, j – целое число, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} 2 &\leq j \leq \frac{9}{10}r, \\ r + (j-1)^2 - (j-1) + 2 &\leq 2rk - k^2 - k - r^2 + r + 2\Delta = 2\Delta - (k-r)(k-r+1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Определим рекуррентную последовательность φ_J :

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \frac{1}{r}, \\ \varphi_J &= \frac{1}{2r} + \max \left(\frac{k^2 + k + r^2 - r + J^2 - 3J + 2 - 2\Delta}{4kr} \varphi_{J+1}, \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4(k-1/2)r} + \frac{k^2 + k + r^2 - r + J^2 - J + 2 - 2\Delta}{4(k-1/2)r} \varphi_{J+1} \right), \\ 1 &\leq J \leq j-1, \end{aligned}$$

и пусть r и j выбраны так, что $\varphi_i \geq 1/(k+1)$ для каждого i . Положим

$$\frac{1}{3 \log k} \leq \omega \leq \frac{1}{2}, \quad \eta = 1 + \omega, \quad V = \max \left(e^{1.5+1.5/\omega}, \frac{18}{\omega} k^3 \log k \right).$$

Если $P \geq V^{k+1}$, то

$$J_{s+k,k}(P) \leq k^{3k} \eta^{4s+k^2} C P^{2(s+k)-k(k+1)/2+\Delta'},$$

где $\Delta' = \Delta(1 - \varphi_1) - k + \varphi_1(k^2 + k + r^2 - r)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7].

Для заданных k, r, Δ обозначим через $\delta_0(k, r, \Delta)$ значение Δ' , получающееся из леммы 5, в которой мы берем максимальное j , удовлетворяющее условиям (3.13).

ЛЕММА 6. Пусть $k \geq 26$, и ω, η, V те же, что в лемме 5. Пусть, далее, $\Delta_1 = k^2(1 - 1/k)/2$, и для $n \geq 1$

$$\varphi^*(k, r_n, \Delta_n) = \frac{2k}{2r_n k + 2\Delta_n - (k - r_n)(k - r_n + 1)},$$

где r_n – целое число на отрезке $[4, k]$ такое, что

$$\varphi^*(k, r_n, \Delta_n) \geq \frac{1}{k+1}.$$

Положим $\Delta_{n+1} = \delta_0(k, r_n, \Delta_n)$. Если $2 \leq n+1 \leq k^2$, то

$$J_{(n+1)k,k}(P) \leq C_{n+1} P^{2(n+1)k-k(k+1)/2+\Delta_{n+1}}, \quad P \geq 1,$$

где

$$C_{n+1} = C_n \max[k^{3k} \eta^{4nk+k^2}, V^{(k+1)(\Delta_n - \Delta_{n+1})}],$$

и $C_1 = k!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7].

При специальном выборе $r_1, r_2, \dots$ следующая лемма указывает эффективные верхние границы для величин Δ_n и C_n при больших значениях k (k – степень многочлена в теореме о среднем).

ЛЕММА 7. Пусть $k \geq 2000$, D – вещественное число, $1 \leq D \leq (k-1)/2$, и

$$H = H(D, k) = \frac{(7/8)D - 7D(D+1)/(16k)}{1 + (2Dk - D(D+1))/(2k^2)}, \quad H \geq 1.$$

При

$$2k \leq n \leq 1 + \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{2} + \log \left(\frac{3k}{8D} \right) - \left(\frac{1 - D/k}{2 - D/k} \right) \frac{D}{k} + \frac{5}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) \right)$$

мы имеем

$$J_{nk,k}(P) \leq C_n P^{2nk-k(k+1)/2+\Delta_n}, \quad P \geq 1,$$

где

$$\Delta_n \leq \max \left(\frac{3}{8} k^2 \exp \left(\frac{1}{2} - \frac{2n}{k} - \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} + \frac{5}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) \right), Dk \right),$$

$$C_n \leq k^{2.055k^3 - 5.91k^2 + 3nk} 1.06^{nk^2 + 2k(n^2 - n) - 9.7278k^3}.$$

Доказательство. См. [7].

4. Доказательства теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть $k \geq 2000$. Каждое допустимое s такое, что $s \not\equiv 0 \pmod{k}$, может быть записано в виде $s = nk + u$, где $0 < u < k$, $u = s \pmod{k}$, и

$$n \leq -1 + \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{2} + \log \left(\frac{3k}{8D} \right) - \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} + \frac{5}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) \right).$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$J_{s,k}(P) = \int_{[0,1]^k} |S|^{2nk+2u} d\alpha \leq \left(\int_{[0,1]^k} |S|^{2nk} d\alpha \right)^{1-u/k} \left(\int_{[0,1]^k} |S|^{2nk} |S|^{2k} d\alpha \right)^{u/k}.$$

По лемме 7

$$J_{s,k}(P) \leq k^{2.055k^3 - 5.91k^2 + 3s} 1.06^{sk + 2s^2/k - 9.7278k^3} P^{2s - k(k+1)/2 + \Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{3}{8} k^2 \exp \left(\frac{1}{2} - \frac{2(n-1)}{k} - \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} - \frac{7}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) \right) \times \left(1 - \frac{u}{k} + \frac{u}{k} e^{-2/k} \right).$$

Далее,

$$1 - \frac{u}{k} + \frac{u}{k} e^{-2/k} \leq 1 - \frac{2u}{k^2} + \frac{2u}{k^3} \leq e^{-2u/k^2 + 2u/k^3}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{3}{8} k^2 \exp \left(\frac{1}{2} - \frac{2(nk + u - k)}{k^2} \right) \\ &\quad \times \exp \left(- \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} - \frac{7}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) + \frac{2u}{k^3} \right) \\ &= \frac{3}{8} k^2 e^{1/2 - 2(s-k)/k^2} \\ &\quad \times \exp \left(- \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} - \frac{7}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) + \frac{2(s \bmod k)}{k^3} \right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $k \geq 16000$. Возьмем в лемме 7 $D = 0.001k$. Тогда $H = H(D, k) \geq 13.97859$ и, взяв

$$n = \left\lceil \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{2} + \log \left(\frac{3k}{8D} \right) - \left(\frac{1-D/k}{2-D/k} \right) \frac{D}{k} + \frac{5}{6k} + \frac{0.67}{Dk} \left(1 + \frac{1}{2^{H-2}} + \frac{3}{2k-1} \right) \right) \right\rceil,$$

мы получим $\Delta_n \leq 0.001k^2$ при $nk/k^2 \geq 3.213303$. Этим доказана справедливость оценки теоремы 2 в условиях (1.3). Схема доказательства справедливости этой оценки в условиях (1.2) приведена в работе Форда [7; с. 590]. Заметим, что изложенный в настоящей работе метод также может быть видоизменен в соответствии с этой схемой, однако метод Форда дает лучшие результаты для оценок с малыми значениями Δ_n (с $\Delta_n \leq k$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1980.
- [2] С. Б. Стечкин, “О средних значениях модуля тригонометрической суммы”, *Теория функций и ее приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **134**, 1975, 283–309.
- [3] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “Новая оценка интеграла И. М. Виноградова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:4 (1978), 751–762.
- [4] О. В. Тырина, “Новая оценка тригонометрического интеграла И. М. Виноградова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:2 (1987), 363–378.
- [5] T. D. Wooley, “Quasi-diagonal behaviour in certain mean value theorems of additive number theory”, *J. Amer. Math. Soc.*, **7**:1 (1994), 221–245.
- [6] T. D. Wooley, “On Vinogradov’s mean value theorem”, *Mathematika*, **39**:2 (1992), 379–399.
- [7] K. Ford, “Vinogradov’s integral and bounds for the Riemann zeta function”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **85**:3 (2002), 565–633.

С. Н. Преображенский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: preobraz@math.msu.su

Поступило

28.12.2009