Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Войчак, Описание свойств HL-дифференцируемости
с помощью касательного конуса, *Матем. заметки*, 2011,
том 89, выпуск 2, 214–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:28:21

Описание свойств НЛ-дифференцируемости с помощью касательного конуса

П. Войчак

Вводится понятие конуса, Хейрс–Ланг-касательного к подмножеству топологического векторного пространства, и для случая локально выпуклых топологических векторных пространств дается описание свойств дифференцируемости Хейрса–Ланга с помощью конуса, Хейрс–Ланг-касательного к графу.

Библиография: 11 названий.

Введение. Существует большое количество неэквивалентных понятий дифференцируемости в топологических векторных пространствах (ТВП) (см. [1], [2]), а также большое количество неэквивалентных понятий касательных конусов в таких пространствах (см. [3]–[8]).

В нормированных пространствах изучается задача характеристики Фреше-дифференцируемости некоторого отображения с помощью конусов, касательных к его графу (см. [9]–[11]). Дардил [10] получил следующий результат: отображение f банахова пространства X в банахово пространство Y имеет производную Фреше $f'(x_0)$ в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда f непрерывно в x_0 и конус Фреше, касательный к графу отображения f в точке $(x_0, f(x_0))$, является графом непрерывного линейного отображения l из X в Y . В этом случае $f'(x_0) = l$.

Наша цель – обобщить этот результат на случай (НЛ-дифференцируемости) дифференцируемости Хейрса–Ланга отображений между локально выпуклыми ТВП. В случае нормированных пространств НЛ-дифференцируемость сводится к дифференцируемости по Фреше. (Хейрс дал свое определение дифференцируемости для локально выпуклых ТВП в 1941 г., а Ланг предложил свое определение для ТВП в 1962 году. В работе [2] было показано, что для локально выпуклых ТВП оба определения эквивалентны определению 1.1 данной работы.)

Чтобы показать это, вводится понятие НЛ-касательного конуса. Основной результат данной статьи – теорема 4.1, из которой можно получить описание свойств НЛ-дифференцируемости для случая локально выпуклых ТВП с помощью конуса, НЛ-касательного к графу рассматриваемого отображения.

1. Предварительные сведения. Основные определения и обозначения.

В данной статье буквы X и Y всегда обозначают хаусдорфово локально выпуклое ТВП. Далее, через $Nb_X(a)$ будем обозначать множество всех окрестностей точки a

в X и всегда будем предполагать, что наши окрестности сбалансированы, замкнуты и выпуклы.

Функцию Минковского множества $W \subset X$ будем обозначать через p_W , т.е. для любого $x \in X$,

$$p_W(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha W\}.$$

Если $f: X \rightarrow Y$ – отображение, $t > 0$ – некоторое действительное число и $h \in X$, то введем определение

$$f_t(h) := \frac{f(th)}{t}.$$

Если $l: X \rightarrow Y$ – линейное отображение и $x \in X$, то будем писать lx вместо $l(x)$. Нулевое отображение между X и Y обозначим как 0 , и таким образом, имеем $\text{gr } 0 = X \times \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем говорить, что отображение $r: X \rightarrow Y$ является *малым* в смысле Хейерса–Ланга (и обозначать как $r \in \text{HL-малое}$), если для любого $V \in \text{Nb}_Y(0)$ существует $U \in \text{Nb}_X(0)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условию: если $0 < t \leq \delta$ и $h \in U$, то $r_t(h) \in \varepsilon V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *дифференцируемым* в смысле Хейерса–Ланга в точке x (обозначается как $f \in \text{Dif}_{\text{HL}}(x)$), если существует непрерывное линейное отображение $f'(x): X \rightarrow Y$ такое, что для любого $h \in X$ отображение f допускает представление

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h),$$

где $r: X \rightarrow Y$ – HL-малое отображение. Это отображение $f'(x)$ называется производной отображения f в точке x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Множество $K \subset X$ называется *конусом* с вершиной $a \in X$, если $\lambda(K - a) \subset K - a$ для любого $\lambda \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Конус $K \subset X$ с вершиной a называется *порожденным множеством* $M \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$K = \text{cone}(M, a) := \bigcup_{\lambda \geq 0} (a + \lambda(M - a)).$$

Если $a = 0$, то будем писать $\text{cone } M$ вместо $\text{cone}(M, 0)$. Если $M = \{x\}$ – одноэлементное множество, то множество $\text{cone } M$ называется *лучом*, порожденным точкой x . Заметим, что множество $\text{cone}\{0\} = \{0\}$ – это так называемый *нулевой луч*. Если не указано иначе, мы в дальнейшем всегда будем рассматривать ненулевые лучи.

ЛЕММА 1.5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение, и пусть $U \in \text{Nb}_X(0)$, $V \in \text{Nb}_Y(0)$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условию: если $h \in U$, то $f_\delta(h) \in \varepsilon V$. Тогда выполнено следующее: если $\text{cone}\{h_0\} \subset U$, то $\text{cone}\{f(h_0)\} \subset V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{cone}\{h_0\} \subset U$. Нам надо доказать, что $tf(h_0) \in V$ для любого $t > 0$. Положим $\varepsilon := t^{-1}$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $f_\delta(h) \in t^{-1}V$

для любого $h \in U$. Предположим, что $\delta \leq 1$. Пусть $\tilde{h} := \delta^{-1}h_0$. Тогда $\tilde{h} \in U$, и, таким образом, получим

$$\frac{f(h_0)}{\delta} = \frac{f(\delta\tilde{h})}{\delta} = f_\delta(\tilde{h}) \in \frac{1}{t}V.$$

Отсюда следует, что $tf(h_0) \in \delta V \subset V$. Лемма доказана.

2. НЛ-касательный конус и некоторые его свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть K – конус с вершиной a и $W \in \text{Nb}_X(0)$. Множество

$$\text{cone}_{W,\varepsilon} K := \bigcup_{z \in K} (z + \varepsilon p_W(z - a)W)$$

называется *конической (W, ε) -окрестностью* конуса K .

Если $K = \text{cone}(M, a)$ – конус, порожденный множеством M , то в дальнейшем будем обозначать его коническую (W, ε) -окрестность просто как $\text{cone}_{W,\varepsilon}(M, a)$ вместо $\text{cone}_{W,\varepsilon} \text{cone}(M, a)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $W = W_1 \times W_2$ – окрестность нуля в прямом произведении $X \times Y$ и $\varepsilon \leq 1/2$. Тогда $p_{W_2}(h_2) \leq p_{W_1}(h_1)$ (или, что эквивалентно, $p_W(h_1, h_2) = p_{W_1}(h_1)$) для всех $(h_1, h_2) \in \text{cone}_{W,\varepsilon} \text{gr } 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это утверждение для $\varepsilon = 1/2$. Пусть $(h_1, h_2) \in \text{cone}_{W,1/2} \text{gr } 0$. Если $h_2 = 0$, то вышеупомянутое неравенство очевидно, поскольку $0 = p_{W_2}(h_2) \leq p_{W_1}(h_1)$. Пусть $h_2 \neq 0$. Тогда существует $(x, 0) \in \text{gr } 0$ такая, что $p_W(x, 0) = p_{W_1}(x) > 0$ и

$$(h_1, h_2) \in (x, 0) + \frac{1}{2}p_W(x, 0)W.$$

Положим

$$(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) := \frac{1}{p_W(x, 0)}(h_1, h_2), \quad (\tilde{x}, 0) := \frac{1}{p_W(x, 0)}(x, 0).$$

Тогда $p_W(\tilde{x}, 0) = 1$ и $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in (\tilde{x}, 0) + (1/2)W$. Это означает, что $\tilde{h}_2 \in (1/2)W_2$ и, следовательно, $p_{W_2}(\tilde{h}_2) \leq 1/2$. Далее, $\tilde{h}_1 - \tilde{x} \in (1/2)W_1$, поэтому

$$|p_{W_1}(\tilde{h}_1) - 1| = |p_{W_1}(\tilde{h}_1) - p_{W_1}(\tilde{x})| \leq p_{W_1}(\tilde{h}_1 - \tilde{x}) \leq \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $1/2 \leq p_{W_1}(\tilde{h}_1) \leq 3/2$. Легко видеть, что $p_{W_2}(\tilde{h}_2) \leq p_{W_1}(\tilde{h}_1)$, откуда следует, что $p_{W_2}(h_2) \leq p_{W_1}(h_1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть k, l – лучи в X , $W \in \text{Nb}_X(0)$ и $\varepsilon < 1$. Если $k \subset \text{cone}_{W,\varepsilon} l$, то $l \subset \text{cone}_{W,\varepsilon/(1-\varepsilon)} k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны следующие два случая.

1) Случай $l \subset W$. По предположению для любых $x \in k$ существуют $y \in l$ и $z \in W$ такие, что $x = y + \varepsilon p_W(y)z = y$. Это означает, что $k = l$, и, таким образом, включение $l \subset \text{cone}_{W,\varepsilon/(1-\varepsilon)} k$ очевидно.

2) Случай $l \not\subset W$. Пусть $k = \text{cone}\{x\} \subset \text{cone}_{W,\varepsilon} l$. Тогда существуют $y \in l$ и $z \in W$ такие, что $x = y + \varepsilon p_W(y)z$. Предположим, что $k \subset W$. Тогда

$$p_W(y) = |0 - p_W(y)| = |p_W(x) - p_W(y)| \leq p_W(x - y) = \varepsilon p_W(y)p_W(z) \leq \varepsilon p_W(y),$$

и приходим к противоречию, поскольку $\varepsilon < 1$ и $p_W(y) > 0$. Таким образом, $k \not\subset W$ и можно предположить, что $p_W(x) = 1$. Тогда имеем

$$|1 - p_W(y)| = |p_W(x) - p_W(y)| \leq p_W(x - y) = \varepsilon p_W(y)p_W(z) \leq \varepsilon p_W(y).$$

Снова возможны два случая:

а) если $y \in W$, то $1 - p_W(y) \leq \varepsilon p_W(y)$ и, следовательно, $(1 + \varepsilon)^{-1} \leq p_W(y) \leq 1$;

б) если $y \notin W$, то $p_W(y) - 1 \leq \varepsilon p_W(y)$ и, следовательно, $1 \leq p_W(y) \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$.

Легко видеть, что

$$x \in y + \varepsilon p_W(y)W \subset y + \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1}W$$

и, следовательно

$$y \in x + \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1}p_W(x)W,$$

так как W сбалансировано. Это означает, что $y \in \text{cone}_{W,\varepsilon/(1-\varepsilon)} k$ и, следовательно, $l \subset \text{cone}_{W,\varepsilon/(1-\varepsilon)} k$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть k, l – лучи в X , $W \in \text{Nb}_X(0)$ и $\varepsilon < 1$. Если $x \in k$, $y \in l$ и $x \in y + \varepsilon p_W(y)W$, то

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} p_W(x) \leq p_W(y) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} p_W(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы непосредственно следует из доказательства леммы 2.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Конусы K, L с общей вершиной $a \in X$ называются (W, ε) -близкими, если $L \subset \text{cone}_{W,\varepsilon} K$ и $K \subset \text{cone}_{W,\varepsilon} L$. В этом случае будем писать $K \stackrel{W,\varepsilon}{\sim} L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Конус K называется **НЛ-касательным** к множеству $M \subset X$ в точке $a \in M$ (и обозначается как $K = T_a^{\text{HL}} M$), если для любой окрестности нуля W' в X существует окрестность нуля $W \subset W'$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условию: если $0 < t \leq \delta$, то

$$\text{cone}(M \cap (a + tW), a) \stackrel{W,\varepsilon}{\sim} K.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение, непрерывное в 0 и такое, что $f(0) = 0$. Предположим также, что $T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } f = \text{gr } 0$. Тогда, для любого $W' \in \text{Nb}_{X \times Y}(0)$ существуют $W = W_1 \times W_2 \in \text{Nb}_{X \times Y}(0)$ и $\delta > 0$ такие, что $W \subset W'$ и, если $0 < t \leq \delta$, $h \in W_1$, то

$$(th, f(th)) \in tW.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W' \in \text{Nb}_{X \times Y}(0)$. Можно выбрать $\widetilde{W} = \widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2 \subset W'$ такую, что

$$\text{cone}(\text{gr } f \cap \delta \widetilde{W}) \subset \text{cone}_{\widetilde{W}, 1/2} \text{gr } 0$$

для некоторого δ . Поскольку f непрерывно в 0, существует $W_1 \subset \widetilde{W}_1$ такая, что $f(\delta W_1) \subset \delta \widetilde{W}_2$. Положим $W := W_1 \times \widetilde{W}_2$, и пусть $h \in W_1$, $0 < t \leq \delta$. Тогда

$$(th, f(th)) \in \text{gr } f \cap \delta W \subset \text{gr } f \cap \delta \widetilde{W} \subset \text{cone}_{\widetilde{W}, 1/2} \text{gr } 0$$

и, следовательно,

$$(h, f_t(h)) \in \text{cone}_{\widetilde{W}, 1/2} \text{gr } 0.$$

В силу леммы 2.2 это означает, что

$$p_{\widetilde{W}_2}(f_t(h)) \leq p_{\widetilde{W}_1}(h) \leq 1,$$

поскольку $h \in W_1 \subset \widetilde{W}_1$. Таким образом, $f_t(h) \in \widetilde{W}_2$, и поэтому $(h, f_t(h)) \in W$. Следовательно, $t(h, f_t(h)) = (th, f(th)) \in tW$, и доказательство закончено.

ЛЕММА 2.8. Пусть $W = W_1 \times W_2$ – окрестность нуля в $X \times Y$ и $\varepsilon < 1/2$. Рассмотрим ненулевую точку $(h_1, h_2) \in X \times Y$ такую, что $p_W(h_1, h_2) = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $(h_1, h_2) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$;
- б) $p_{W_2}(h_2) \leq \varepsilon/(1 - \varepsilon)$;
- с) $(h_1, (1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}h_2) \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, покажем, что из а) следует б). Допустим, что $(h_1, h_2) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$. В силу леммы 2.2 имеем

$$p_{W_1}(h_1) = p_W(h_1, h_2) = 1.$$

Далее, существует $(z, 0) \in \text{gr } 0$ и $(w_1, w_2) \in W$ такая, что

$$(h_1, h_2) = (z, 0) + \varepsilon p_{W_1}(z)(w_1, w_2).$$

В силу леммы 2.4 имеем $p_{W_1}(z) \leq 1/(1 - \varepsilon)$ и, поскольку $h_2 = \varepsilon p_{W_1}(z)w_2$, получим

$$p_{W_2}(h_2) = \varepsilon p_{W_1}(z)p_{W_2}(w_2) \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} p_{W_2}(w_2) \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Теперь докажем, что из б) следует с). Пусть $p_{W_2}(h_2) \leq \varepsilon/(1 - \varepsilon) < 1$. Тогда имеем $p_{W_1}(h_1) = 1$, поскольку в силу суперпозиции

$$p_W(h_1, h_2) = \max\{p_{W_1}(h_1), p_{W_2}(h_2)\} = 1.$$

Далее,

$$p_{W_2}\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} h_2\right) = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} p_{W_2}(h_2) \leq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1,$$

откуда получим

$$p_W\left(h_1, \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} h_2\right) = \max\left\{p_{W_1}(h_1), p_{W_2}\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} h_2\right)\right\} = p_{W_1}(h_1) = 1$$

и, следовательно, $(h_1, (1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}h_2) \in W$.

Наконец покажем, что из с) следует а). Предположим, что точка $(h_1, (1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}h_2)$ принадлежит множеству W . Тогда $(-h_1, (1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}h_2)$ также принадлежит W , поскольку W_1 сбалансировано. Положим $z := (1 - \varepsilon)^{-1}h_1$. Тогда имеем

$$p_W(z, 0) = p_{W_1}(z) = \frac{1}{1 - \varepsilon} p_{W_1}(h_1) = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

поскольку $p_{W_1}(h_1) = 1$; действительно,

$$p_{W_2}(h_2) \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1 = p_W(h_1, h_2).$$

Более того, имеем

$$\begin{aligned} (h_1, h_2) &= \frac{1}{1 - \varepsilon}(h_1, 0) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(-h_1, \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} h_2 \right) \\ &= (z, 0) + \varepsilon p_W(z, 0) \left(-h_1, \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} h_2 \right) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть $\widetilde{W} = \widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2$ и $W = W_1 \times \widetilde{W}_2$ – окрестности нуля в $X \times Y$ такие, что $W \subset \widetilde{W}$. Пусть $\varepsilon < 1/2$. Тогда

$$\text{cone}_{\widetilde{W}, \varepsilon} \text{gr } 0 \subset \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную ненулевую точку

$$(h_1, h_2) \in \text{cone}_{\widetilde{W}, \varepsilon} \text{gr } 0.$$

Тогда возможны два случая.

1) Случай $\text{cone}\{(h_1, h_2)\} \subset \widetilde{W}$. Тогда существует луч $l \subset \text{gr } 0$ такой, что

$$\text{cone}\{(h_1, h_2)\} \subset \text{cone}_{\widetilde{W}, \varepsilon} l,$$

и в силу леммы 2.3 имеем

$$l \subset \text{cone}_{\widetilde{W}, \varepsilon/(1 - \varepsilon)} \{(h_1, h_2)\} = \text{cone}\{(h_1, h_2)\}.$$

Следовательно, $(h_1, h_2) \in \text{gr } 0$ и, таким образом, $(h_1, h_2) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$.

2) Случай $\text{cone}\{(h_1, h_2)\} \not\subset \widetilde{W}$. Тогда существует точка $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in \text{cone}\{(h_1, h_2)\}$ такая, что $p_{\widetilde{W}}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = 1$. Можно записать

$$(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \tilde{h}_1, 0 \right) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} p_{\widetilde{W}}(\tilde{h}_1, 0) \left(-\tilde{h}_1, \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \tilde{h}_2 \right).$$

В силу леммы 2.8 имеем $(-\tilde{h}_1, (1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}\tilde{h}_2) \in \widetilde{W}$. Кроме того, соотношения

$$1 = p_{\widetilde{W}_1}(\tilde{h}_1) \leq p_{W_1}(\tilde{h}_1)$$

следуют из включения $W_1 \subset \widetilde{W}_1$ и, таким образом, видно, что

$$\begin{aligned}\widetilde{h}_1 &\in \frac{1}{1-\varepsilon} \widetilde{h}_1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \widetilde{W}_1 \subset \frac{1}{1-\varepsilon} \widetilde{h}_1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} p_{W_1}(\widetilde{h}_1) \widetilde{W}_1, \\ \widetilde{h}_2 &\in \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \widetilde{W}_2 \subset \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} p_{W_1}(\widetilde{h}_1) \widetilde{W}_2.\end{aligned}$$

Это значит, что существует точка $(w_1, w_2) \in \widetilde{W}$ такая, что

$$\widetilde{h}_1 = \frac{1}{1-\varepsilon} \widetilde{h}_1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} p_{W_1}(\widetilde{h}_1) w_1, \quad \widetilde{h}_2 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} p_{W_1}(\widetilde{h}_1) w_2. \quad (1)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \widetilde{h}_1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} p_{W_1}(\widetilde{h}_1) w_1 = \frac{1}{1-\varepsilon} \widetilde{h}_1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} (-\widetilde{h}_1), \quad w_1 = -\frac{1}{p_{W_1}(\widetilde{h}_1)} \widetilde{h}_1 \in W_1.$$

Таким образом, $(w_1, w_2) \in W_1 \times \widetilde{W}_2 = W$, а это в силу (1) означает, что $(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$. Следовательно, также получим $(h_1, h_2) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$. Предложение доказано.

3. HL-касательный конус и изоморфизмы. В этом пункте мы покажем, что линейные изоморфизмы топологических векторных пространств (ТВП) “признают” HL-касательные конусы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\tilde{l}: X \rightarrow Y$ – некоторый изоморфизм ТВП. Тогда

- а) $\tilde{l}(\text{cone } M) = \text{cone}(\tilde{l}M)$ для любого множества $M \subset X$; в частности, если K – конус в X с вершиной a , то $\tilde{l}K$ – конус в Y с вершиной $\tilde{l}a$;
- б) $p_U(x) = p_{\tilde{l}U}(\tilde{l}x)$ для любого множества $U \subset X$ и любых $x \in X$;
- с) если K – конус с вершиной a , $U \in \text{Nb}_X(0)$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\tilde{l}(\text{cone}_{U, \varepsilon} K) = \text{cone}_{\tilde{l}U, \varepsilon} \tilde{l}K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только пункт с), поскольку а) и б) очевидны. Пусть $z \in \tilde{l}(\text{cone}_{U, \varepsilon} K)$. Тогда существуют $x \in K$ и $y \in U$ такие, что

$$z = \tilde{l}(x + \varepsilon p_U(x)y) = \tilde{l}x + \varepsilon p_{\tilde{l}U}(\tilde{l}x)\tilde{l}y.$$

Однако, $\tilde{l}x \in \tilde{l}K$ и $\tilde{l}y \in \tilde{l}U$, и поэтому $z \in \text{cone}_{\tilde{l}U, \varepsilon} \tilde{l}K$. Следовательно,

$$\tilde{l}(\text{cone}_{U, \varepsilon} K) \subset \text{cone}_{\tilde{l}U, \varepsilon} \tilde{l}K.$$

Обратно, если $z \in \text{cone}_{\tilde{l}U, \varepsilon} \tilde{l}K$, то существуют $x \in K$ и $y \in U$ такие, что

$$z = \tilde{l}x + \varepsilon p_{\tilde{l}U}(\tilde{l}x)\tilde{l}y$$

и, следовательно,

$$\tilde{l}^{-1}z = x + \varepsilon p_U(x)y \in \text{cone}_{U, \varepsilon} K.$$

Это значит, что $z \in \tilde{l}(\text{cone}_{U, \varepsilon} K)$. Таким образом,

$$\text{cone}_{\tilde{l}U, \varepsilon} \tilde{l}K \subset \tilde{l}(\text{cone}_{U, \varepsilon} K),$$

и фактически выполняется равенство. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $A \subset X$, $a \in A$ и $\tilde{l}: X \rightarrow Y$ – изоморфизм. Тогда

$$\tilde{l}T_a^{\text{HL}}A = T_{\tilde{l}a}^{\text{HL}}\tilde{l}A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K := T_a^{\text{HL}}A$. Пусть $W' \in \text{Nb}_X(\tilde{l}a)$. Тогда $\tilde{l}^{-1}W' \in \text{Nb}_X(a)$ и в силу суперпозиции существует $W \in \text{Nb}_X(a)$ такое, что $W \subset \tilde{l}^{-1}W'$, а для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < t \leq \delta$, то $K \stackrel{W, \varepsilon}{\sim} \text{cone}(A \cap tW)$. Применяя лемму 3.1, получим

$$\tilde{l}K \subset \tilde{l}(\text{cone}_{W, \varepsilon}(A \cap tW)) = \text{cone}_{\tilde{l}W, \varepsilon}(\tilde{l}A \cap t\tilde{l}W)$$

и, следовательно,

$$\tilde{l}(\text{cone}(A \cap tW)) = \text{cone}(\tilde{l}A \cap t\tilde{l}W) \subset \tilde{l}(\text{cone}_{W, \varepsilon}K) = \text{cone}_{\tilde{l}W, \varepsilon}\tilde{l}K.$$

Это значит, что $\tilde{l}K \stackrel{\tilde{l}W, \varepsilon}{\sim} \text{cone}(\tilde{l}A \cap t\tilde{l}W)$, а поскольку $\tilde{l}W \subset W'$, получим $\tilde{l}K = T_{\tilde{l}a}^{\text{HL}}\tilde{l}A$. Предложение доказано.

4. Описание свойств НЛ-дифференцируемости с помощью НЛ-касательного конуса. Основной результат данной работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение.

а) Предположим, что существует базис окрестностей нуля в X или в Y таких, что ни одна из них не содержит луча. Если отображение f НЛ-дифференцируемо в точке $x_0 \in X$ с производной $f'(x_0)$, то

$$T_{(x_0, f(x_0))}^{\text{HL}} \text{gr } f = (x_0, f(x_0)) + \text{gr } f'(x_0).$$

б) Если f непрерывно в $x_0 \in X$ и если

$$T_{(x_0, f(x_0))}^{\text{HL}} \text{gr } f = (x_0, f(x_0)) + \text{gr } l,$$

где $l: X \rightarrow Y$ – некоторое непрерывное линейное отображение, то f НЛ-дифференцируемо в x_0 с производной $f'(x_0) = l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала без ограничения общности предположим, что

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } f = \text{gr } 0.$$

Действительно, пусть $\tilde{f}, \hat{f}$ – некоторое отображение между X и Y такое, что

$$\tilde{f}(x) = \hat{f}(x + x_0) - \hat{f}(x_0).$$

Тогда очевидно, что $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}$ непрерывно в нуле тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ непрерывно в x_0 , $\tilde{f}'(0) = \hat{f}'(x_0)$, и

$$T_{(x_0, f(x_0))}^{\text{HL}} \text{gr } \hat{f} = (x_0, f(x_0)) + T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } \tilde{f}.$$

Пусть $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение такое, что $\tilde{f}(0) = 0$, и пусть $l: X \rightarrow Y$ – некоторое линейное отображение. Положим $f := \tilde{f} - l$. Тогда очевидно, что $f(0) = 0$,

и f непрерывно в нуле тогда и только тогда, когда $\tilde{f}$ непрерывно в нуле. Кроме того, $\tilde{f}'(0) = l$ тогда и только тогда, когда $f'(0) = 0$. Наконец, равенство $T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } \tilde{f} = \text{gr } l$ выполняется тогда и только тогда, когда $T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } f = \text{gr } 0$. Действительно, отображение $\tilde{l}: X \times Y \rightarrow X \times Y$, $\tilde{l}(x, y) = (x, y - lx)$, очевидно, является изоморфизмом и, следовательно,

$$\text{gr } 0 = \tilde{l}(\text{gr } l) = \tilde{l}(T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } \tilde{f}) = T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } f. \quad (2)$$

Последнее равенство в (2) выполняется в силу предложения 3.2.

Доказательство пункта а). Если существует базис окрестностей нуля в X или в Y таких, что ни одна из них не содержит луча, тогда всегда можно предположить, что наши окрестности именно такие. Пусть отображение f HL-дифференцируемо в 0 с производной $f'(0) = 0$. Нам надо показать, что

$$T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } f = \text{gr } 0.$$

Предположим, что W' – произвольная окрестность нуля в $X \times Y$. Выберем $\tilde{U} \in \text{Nb}_X(0)$ и $V \in \text{Nb}_Y(0)$ так, чтобы $\tilde{U} \times V \subset W'$. Существует $U' \in \text{Nb}_X(0)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условию: если $h \in U'$ и $0 < t \leq \delta$, то $f_t(h) \in \varepsilon V$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon < 1$. Выберем некоторое $U \in \text{Nb}_X(0)$ такое, что $U \subset U' \cap \tilde{U}$, и положим $W := U \times V$. Тогда очевидно, что $W \subset W'$, и можно утверждать, что если $0 < t \leq \delta$, то

$$\text{cone}(\text{gr } f \cap tW) \stackrel{W, \varepsilon}{\sim} \text{gr } 0.$$

Сначала покажем, что

$$\text{cone}(\text{gr } f \cap tW) \subset \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0.$$

Достаточно показать, что $\text{gr } f \cap \delta W \subset \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$. Пусть $(h, f(h)) \in \text{gr } f \cap \delta W$ – ненулевая точка. Возможны следующие два случая.

1) Случай $\text{cone}\{h\} \subset U$. Это возможно, только если не существует базиса окрестностей нуля в X таких, что ни одна из них не содержит луча. Тогда в силу суперпозиции V не содержит ненулевого луча, однако в силу леммы 1.5 имеем $\text{cone}\{f(h)\} \subset V$, откуда следует, что

$$(h, f(h)) \in \text{gr } 0 \subset \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0.$$

2) Случай $\text{cone}\{h\} \not\subset U$. Если существует базис окрестностей нуля в X таких, что ни одна из них не содержит луча, то этот случай выполняется автоматически. Тогда $0 < p_W(h, f(h)) \leq \delta$ и

$$\frac{(h, f(h))}{p_W(h, f(h))} = \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))}, f_{p_W(h, f(h))} \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))} \right) \right) \in U \times \varepsilon V. \quad (3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} 1 &= p_W \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))}, \frac{f(h)}{p_W(h, f(h))} \right) \\ &= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{h}{p_W(h, f(h))} \in \alpha U \wedge \frac{f(h)}{p_W(h, f(h))} \in \alpha V \right\}. \end{aligned}$$

Из (3) следует, что последний инфимум равен

$$\inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{h}{p_W(h, f(h))} \in \alpha U \right\} = p_W \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))}, 0 \right),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{(h, f(h))}{p_W(h, f(h))} &= \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))}, 0 \right) + \left(0, \frac{f(h)}{p_W(h, f(h))} \right) \\ &\in \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))}, 0 \right) + \varepsilon p_W \left(\frac{h}{p_W(h, f(h))}, 0 \right) W. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$p_W(h, f(h))^{-1}(h, f(h)) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$$

и, следовательно, $(h, f(h)) \in \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$. Таким образом, получаем включение

$$\text{gr } f \cap \delta W \subset \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0,$$

которое и требовалось доказать.

Теперь покажем, что

$$\text{gr } 0 \subset \text{cone}_{W, \varepsilon}(\text{gr } f \cap tW).$$

Пусть $(x, 0) \in \text{gr } 0$ – ненулевая точка. Возможны следующие два случая.

1) *Случай* $\text{cone}\{x\} \subset U$. Опять это возможно, только если не существует базиса окрестностей нуля в X таких, что ни одна из них не содержит луча. Тогда в силу суперпозиции V не содержит ненулевого луча. Однако в силу леммы 1.5 имеем $\text{cone}\{f(x)\} \subset V$. Следовательно, $f(x) = 0$, и, таким образом, $(x, 0) \in \text{gr } f$. Это означает, что при любых $t > 0$ имеем

$$(x, 0) \in \text{gr } f \cap tW \subset \text{cone}_{W, \varepsilon}(\text{gr } f \cap tW).$$

2) *Случай* $\text{cone}\{x\} \not\subset U$. Опять, если существует базис окрестностей нуля в X таких, что ни одна из них не содержит луча, то этот случай выполняется автоматически. Тогда $p_W(x, 0) = p_U(x) > 0$. Положим $\tilde{x} := p_U(x)^{-1}x$, и пусть $0 < t \leq \delta$. Тогда имеем

$$(t\tilde{x}, f(t\tilde{x})) = t(\tilde{x}, f_t(\tilde{x})) \in \text{gr } f \cap t(U \times \varepsilon V) \subset \text{gr } f \cap tW$$

и, следовательно, $(\tilde{x}, f_t(\tilde{x})) \in \text{cone}(\text{gr } f \cap tW)$. Кроме того, имеем

$$p_W(\tilde{x}, f_t(\tilde{x})) = \max\{p_U(\tilde{x}), p_V(f_t(\tilde{x}))\} = p_U(\tilde{x}) = 1,$$

и это значит, что точки $\pm(0, f_t(\tilde{x}))$ принадлежат $\varepsilon p_W(\tilde{x}, f_t(\tilde{x}))W$, поскольку выполнено $(0, f_t(\tilde{x})) \in \varepsilon W$ и W сбалансировано. Наконец,

$$(\tilde{x}, 0) = (\tilde{x}, f_t(\tilde{x})) + (0, -f_t(\tilde{x})) \in (\tilde{x}, f_t(\tilde{x})) + \varepsilon p_W(\tilde{x}, f_t(\tilde{x}))W.$$

Это означает, что

$$(\tilde{x}, 0) \in \text{cone}_{W, \varepsilon}(\text{gr } f \cap tW)$$

и, следовательно, $(x, 0) \in \text{cone}_{W, \varepsilon}(\text{gr } f \cap tW)$. Таким образом,

$$\text{gr } 0 \subset \text{cone}_{W, \varepsilon}(\text{gr } f \cap tW),$$

и утверждение пункта а) доказано.

Доказательство пункта б). Предположим, что

$$T_{(0,0)}^{\text{HL}} \text{gr } f = \text{gr } 0.$$

Надо показать, что тогда отображение f HL-дифференцируемо в 0 с производной $f'(0) = 0$. Пусть V – произвольная окрестность нуля в Y . Положим $W' := X \times V$. Тогда по предположению существует

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_2 \in \text{Nb}_{X \times Y}(0)$$

такое, что $\widetilde{W} \subset W'$ и для любого $\widetilde{\varepsilon} > 0$ существует $\widetilde{\delta} > 0$ такое, что если $0 < t \leq \widetilde{\delta}$, то

$$\text{cone}(\text{gr } f \cap t\widetilde{W}) \stackrel{\widetilde{W}, \widetilde{\varepsilon}}{\sim} \text{gr } 0.$$

В силу предложения 2.7 существуют

$$W = W_1 \times \widetilde{W}_2 \in \text{Nb}_{X \times Y}(0)$$

и $\widehat{\delta} > 0$ такие, что $W \subset \widetilde{W}$ и если $0 < t \leq \widehat{\delta}$, $h \in W_1$, то $(th, f(th)) \in tW$. Снова без ограничения общности можно предположить, что $\varepsilon < 1$, и положить $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon/(1 + \varepsilon)$. Тогда $\widetilde{\varepsilon} < 1/2$ и по предположению существует $\widetilde{\delta} > 0$ такое, что если $0 < t \leq \widetilde{\delta}$, то

$$\text{cone}(\text{gr } f \cap tW) \subset \text{cone}(\text{gr } f \cap t\widetilde{W}) \subset \text{cone}_{\widetilde{W}, \widetilde{\varepsilon}} \text{gr } 0 \subset \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0.$$

Последнее включение выполняется в силу предложения 2.9. Положим $\delta := \min\{\widetilde{\delta}, \widehat{\delta}\}$. Пусть $0 < t \leq \delta$ и $h \in W_1$. Тогда

$$(th, f(th)) \in tW \cap \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0$$

и, следовательно,

$$(h, f_t(h)) \in W \cap \text{cone}_{W, \varepsilon} \text{gr } 0.$$

Но это означает, что существуют $(x, 0) \in \text{gr } 0$ и $(z_1, z_2) \in W$ такие, что

$$(h, f_t(h)) = (x, 0) + \widetilde{\varepsilon} p_W(x, 0)(z_1, z_2).$$

В силу леммы 2.4 имеем $p_W(x, 0) \leq 1/(1 - \widetilde{\varepsilon})$ и, следовательно,

$$(h, f_t(h)) \in (x, 0) + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{1 - \widetilde{\varepsilon}} W = (x, 0) + \varepsilon W.$$

Таким образом,

$$f_t(h) \in \varepsilon \widetilde{W}_2 \subset \varepsilon W'_2 = \varepsilon V,$$

откуда следует, что отображение f HL-дифференцируемо в точке 0 с производной $f'(0) = 0$. Доказательство теоремы закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Остается открытым вопрос о том, является ли суперпозиция в утверждении пункта а) относительно окрестностей нуля существенной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **22**:6 (1967), 201–260.
- [2] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Различные определения производной в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **23**:4 (1968), 67–116.
- [3] M. S. Bazaraa, J. J. Goode, M. Z. Nashed, “On the cones of tangents with applications to mathematical programming”, *J. Optim. Theory Appl.*, **13**:4 (1974), 389–426.
- [4] F. H. Clarke, “Generalized gradients and applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205** (1975), 247–262.
- [5] M. Fabián, “Theory of Fréchet cones”, *Časopis Pěst. Mat.*, **107**:1 (1982), 37–58.
- [6] J. B. Hiriart-Urruty, “Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces”, *Math. Oper. res.*, **4**:1 (1979), 79–97.
- [7] A. Jofré, J.-P. Penot, “Comparing new notions of tangent cones”, *J. London Math. Soc.* (2), **40**:2 (1989), 280–290.
- [8] J.-P. Penot, “A characterization of tangential regularity”, *Nonlinear Anal.*, **5**:6 (1981), 625–643.
- [9] J. Daneš, J. Durdil, “A note on geometric characterization of Fréchet differentiability”, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **17**:1 (1976), 195–204.
- [10] J. Durdil, “On the geometric characterization of differentiability. II”, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **15** (1974), 727–744.
- [11] M. Fabián, “On a relation between Fréchet cones and derivatives”, *Acta Polytech. Práce ČVUT* (4), 1978, № 1, 69–75.

П. Войчак

Mathematical Institute, Silesian University in Opava,
Чешская Республика
E-mail: Petr.Vojcak@math.slu.cz

Поступило

11.01.2009