Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Бибилов, Индексы разделения неприводимых систем корней, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 316–318

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:47:49

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Индексы разделения неприводимых систем корней

П. В. Бибииков

1. Введение. В работе [1] в связи с исследованием некоторых специальных действий полупростых алгебраических групп было введено понятие *индекса разделения* $\text{sep}(\Delta)$ неприводимой системы корней Δ и были получены оценки

$$\text{rk}(\Delta) + 1 \leq \text{sep}(\Delta) \leq |W(\Delta)|,$$

где $W(\Delta)$ – группа Вейля системы корней Δ . В работах [2]–[4] было показано, что верхняя оценка может быть существенно снижена по сравнению с порядком группы Вейля. Например, для систем корней типа B_ℓ , C_ℓ и D_ℓ была получена оценка порядка 2^ℓ . Целью данной заметки является уточнение нижней и верхней оценок для индекса разделения. В частности, мы докажем, что индекс разделения классической системы корней ранга ℓ не превосходит $2\ell^2$.

Всюду далее мы считаем Δ неприводимой системой корней ранга ℓ , порождающей евклидово пространство V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмножество S множества замкнутых фундаментальных камер Вейля системы корней Δ называется *разделяющей системой камер Вейля*, если выполняется следующее условие: для всякой ненулевой линейной функции $l \in V^*$ существует камера Вейля C из S такая, что $l|_{C \setminus \{0\}} > 0$.

В [1] доказано, что разделяющие системы камер Вейля существуют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Индексом разделения* $\text{sep}(\Delta)$ системы корней Δ называется минимальное количество элементов в разделяющих системах камер Вейля системы корней Δ .

Для нас будет удобна несколько другая интерпретация индекса разделения системы корней Δ . А именно, назовем открытые конусы, сопряженные к камерам Вейля¹ системы корней Δ , *открытыми сопряженными конусами этой системы* или просто *открытыми сопряженными конусами*, если понятно, о какой системе корней идет речь. Тогда индекс разделения равен минимальному количеству открытых сопряженных конусов, покрывающих множество $V^* \setminus \{0\}$.

Напомним известные оценки сверху и снизу для индекса разделения систем корней (см. [2]–[4]):

$$\begin{aligned} \text{sep}(A_\ell) &= \ell(\ell + 1), & \ell + 1 &\leq \text{sep}(B_\ell) = \text{sep}(C_\ell) \leq 2^{\ell+1} - 2, & \ell + 1 &\leq \text{sep}(D_\ell) \leq 2^{\ell+2}, \\ 7 &\leq \text{sep}(E_6) \leq 242, & 8 &\leq \text{sep}(E_7) \leq 4610, & 9 &\leq \text{sep}(E_8) \leq 9222, & 5 &\leq \text{sep}(F_4) \leq 30. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке “Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”.

¹Открытый конус, сопряженный к камере C , определяется как $C^* = \{l \in V^* : l|_{C \setminus \{0\}} > 0\}$.

Рис. 1

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие оценки:*

$$\text{sep}(\mathbf{B}_\ell) = \text{sep}(\mathbf{C}_\ell) \geq 2\ell, \quad \text{sep}(\mathbf{D}_\ell) \geq 2\ell.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell\}$ – ортонормированный базис пространства V . Рассмотрим множество $\Delta(\mathbf{B}_\ell) = \{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : i \neq j\}$ корней системы $\mathbf{B}_\ell$. Докажем, что в каждом открытом сопряженном конусе содержится ровно ℓ корней. Поскольку любые два открытых сопряженных конуса переводятся друг в друга преобразованием из группы $W(\mathbf{B}_\ell)$, достаточно проверить это утверждение для какого-то фиксированного открытого сопряженного конуса. Рассмотрим, к примеру, конус $C_0^* = \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \varepsilon_\ell \rangle_+$, т.е. открытый конус, натянутый на векторы $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \varepsilon_\ell$. Легко видеть, что

$$C_0^* \cap \Delta(\mathbf{B}_\ell) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_i : 2 \leq i \leq \ell\},$$

т.е. C_0^* содержит ровно ℓ корней. Поэтому количество открытых сопряженных конусов, покрывающих $V^* \setminus \{0\}$, не меньше $|\Delta(\mathbf{B}_\ell)|/\ell = 2\ell$.

Рассуждения для системы $\mathbf{D}_\ell$ совершенно аналогичны.

Теперь усилим верхнюю оценку для индекса разделения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть Δ – неприводимая система корней ранга ℓ , отличная от $\mathbf{E}_6$ и содержащая подсистему корней типа $\mathbf{A}_{\ell-1}$. Тогда $\text{sep}(\Delta) \leq 2\ell^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала построим гиперплоскости $H_1, \dots, H_\ell$, содержащие подсистемы корней типа $\mathbf{A}_{\ell-1}$ и имеющие нулевое пересечение. Для этого рассмотрим какую-то гиперплоскость H_1 , содержащую подсистему типа $\mathbf{A}_{\ell-1}$ (такая гиперплоскость существует по условию), и ненулевой вес π_1 , аннулирующий эту гиперплоскость. Так как группа Вейля $W(\Delta)$ неприводима, то $\langle W(\Delta)\pi_1 \rangle = V$. Поэтому можно выбрать ℓ линейно независимых весов $w_1\pi_1 = \pi_1, w_2\pi_1, \dots, w_\ell\pi_1$. Гиперплоскости H_i , аннулирующие соответствующие веса, будут искомыми.

Теперь для каждой гиперплоскости H_i построим набор открытых сопряженных конусов системы Δ , покрывающих множество $V^* \setminus H_i$. Для этого рассмотрим подсистему корней типа $\mathbf{A}_{\ell-1}$, лежащую в H_i , и выберем в этой подсистеме базис и минимальный корень относительно этого базиса. Рассмотрим открытые конусы, натянутые на любые $\ell - 1$ векторов из этого набора. Эти конусы являются открытыми сопряженными конусами системы $\mathbf{A}_{\ell-1}$ (см. [5; с. 255]), и их замыкания покрывают всю гиперплоскость H_i . Докажем, что каждый открытый сопряженный конус системы $\mathbf{A}_{\ell-1}$ можно достроить до сопряженного конуса системы Δ двумя способами, добавив корень, лежащий в верхнем полупространстве относительно H_i , или в нижнем полупространстве.

На рис. 1 изображены диаграммы Дынкина возможных систем корней Δ , удовлетворяющих условиям теоремы. На этом рисунке белыми кругами обозначены базисы подсистемы $\mathbf{A}_{\ell-1}$, а черными – корни из системы Δ , которые дополняют диаграмму Дынкина

подсистемы $A_{\ell-1}$ до диаграммы Дынкина системы Δ . Видно, что в каждом случае существует ровно два таких корня (например, в случае $\Delta = A_\ell$, подсистемы $A_{\ell-1} \subset H_i = \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell \rangle$ и открытого сопряженного конуса $C_0^* = \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell \rangle_+ \subset H_i$ искомые корни равны $\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1}$ и $\varepsilon_{\ell+1} - \varepsilon_1$). Непосредственной проверкой легко убедиться, что эти корни лежат в разных полупространствах относительно гиперплоскости H_i .

Таким образом, построив указанные выше открытые сопряженные конусы системы $A_{\ell-1}$, мы получим 2ℓ открытых сопряженных конусов системы Δ , покрывающих множество $V^* \setminus H_i$ (так как каждый из этих конусов содержит нормаль к гиперплоскости H_i).

Так как $\bigcap_i H_i = \{0\}$, то объединение всех наборов открытых сопряженных конусов, построенных описанным выше способом для гиперплоскостей $H_1, \dots, H_\ell$, покрывает все множество $V^* \setminus \{0\}$. Количество таких открытых сопряженных конусов равно $2\ell^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства следует, что количество открытых сопряженных конусов системы Δ , удовлетворяющей условиям теоремы 2, замыкания которых покрывают все пространство V^* , не превосходит 2ℓ .

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеют место следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \text{sep}(B_\ell) = \text{sep}(C_\ell) &\leq 2\ell^2, & \text{sep}(D_\ell) &\leq 2\ell^2, \\ \text{sep}(E_6) &\leq 120, & \text{sep}(E_7) &\leq 98, & \text{sep}(E_8) &\leq 128. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки для всех систем, кроме E_6 , непосредственно следуют из теоремы 2. Для системы E_6 применим ту же идею, но вместо подсистемы A_5 возьмем подсистему D_5 . Гиперплоскость, содержащую D_5 , можно покрыть 10 замкнутыми сопряженными конусами этой системы (см. замечание). Рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства теоремы 2, получаем необходимую оценку.

Теорема 1 и оценки из теоремы 2 наводят на мысль, что покрытие множества $V^* \setminus \{0\}$ открытыми сопряженными конусами равносильно покрытию системы корней Δ . Более точно, имеется следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА. Пусть Δ – неприводимая система корней и $\{C_i^*\}$ – набор открытых сопряженных конусов системы Δ такой, что $\Delta \subset \bigcup_i C_i^*$. Тогда

$$V^* \setminus \{0\} = \bigcup_i C_i^*.$$

С учетом теоремы 1 из этой гипотезы следуют точные значения индекса разделения:

$$\begin{aligned} \text{sep}(A_\ell) &= \ell(\ell + 1), & \text{sep}(B_\ell) &= \text{sep}(C_\ell) = \text{sep}(D_\ell) = 2\ell, \\ \text{sep}(E_6) &= 7, & \text{sep}(E_7) &= 8, & \text{sep}(E_8) &= 9, & \text{sep}(F_4) &= 5. \end{aligned}$$

Автор благодарит В. С. Жгуна за ценные замечания и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. L. Попов, *J. Algebra*, **313**:1 (2007), 392–416. [2] В. С. Жгун, Д. В. Миронов, *Матем. заметки*, **82**:2 (2007), 310–314. [3] В. С. Жгун, Д. В. Миронов, *УМН*, **62**:6(378) (2007), 171–172. [4] Ф. В. Петров, Решение задачи 12.10, Математическое просвещение. Сер. 3, **13**, МЦНМО, М., 2009, 189–190. [5] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Элементы математики, Мир, М., 1972.

П. В. Вибиков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Поступило
30.07.2010