Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Терехин, Сферический аналог комплексной формы тригонометрического ряда Фурье; приближение, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 764–777

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:50:03

УДК 517.518.8

СФЕРИЧЕСКИЙ АНАЛОГ КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ; ПРИБЛИЖЕНИЕ

А. П. Терехин

Для функции, определенной на единичной сфере размерности два и выше, предложен близкий по алгебраической структуре сферический аналог элементов ряда Фурье функции, определенной на единичной окружности. В различных нормах оценено отклонение от функции аналогов частичных сумм Фурье.

Библиография: 2 названия.

В статье решаются такие две задачи.

1. Для функций, определенных на единичной сфере размерности два и выше, построить близкий по алгебраической структуре сферический аналог элемента тригонометрического ряда Фурье функций, определенных на единичной окружности; от аналога требуется лишь, чтобы он был, по крайней мере, сферическим полиномом (алгебраическим многочленом на сфере), но не обязательно сферической гармоникой.

2. Выяснить условия сходимости и оценить в различных нормах отклонение от функции сумм ее сферических элементов Фурье.

1. Сферический аналог элементов ряда Фурье

Целевые формулы. Несомненно влияние поля комплексных чисел на теорию тригонометрических рядов Фурье. То, что оно дает для теории и что мы намерены перенести на случай сферы, можно увидеть из следующего представления тригонометрической составляющей функции f , определенной на единичной окружности S :

$$\frac{1}{2\pi} \int_C f(\zeta)(z\zeta^{-1})^m d\zeta, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Как мы видим, здесь используются существование обратного для каждого вектора единичной окружности, умножение ее векторов и умножение вектора на скаляр или, если функция векторнозначная, на вектор того линейного пространства над полем комплексных чисел, где функция принимает свои значения. Лишь структуры линейного пространства на плоскости достаточно для представления

$$\zeta = z \cos \theta + z^\perp \sin \theta \quad (2)$$

произвольного вектора $\zeta \in C$ через вектор $z \in C$ и ему ортогональный $z^\perp$; для всякого $\zeta \in C$ единственным образом на отрезке $[0, \pi]$ определяется $\theta = \arccos(\zeta, z)$, где $(\zeta, z) -$

скалярное произведение; тогда для $\zeta \neq \pm z$ единственным образом определится $z^\perp$ как тот вектор из двух, для которого $(\zeta, z^\perp) > 0$.

Существование обратного z^{-1} позволяет от представления (2) перейти к представлению

$$\zeta z^{-1} = \cos \theta + z^\perp z^{-1} \sin \theta \quad (3)$$

с использованием лишь структуры алгебры (гиперкомплексной системы) поля комплексных чисел, без использования коммутативности и даже ассоциативности умножения.

Решающими для “комплексности” представления (3) являются равенства

$$|z^\perp z^{-1}| = 1, \quad (z^\perp z^{-1})^2 = -1; \quad (4)$$

в случае комплексных чисел они тривиальны, так как $z^\perp z^{-1} = z \exp(\pm i\pi/2) z^{-1} = \pm i$.

Коммутативность и ассоциативность умножения комплексных чисел позволяют отделить в представлении (1) коэффициент Фурье функции от степени z^m . Последняя является однородным многочленом от координат вектора z . Сугубо аналитичность делает степень гармонической.

В пространствах большей размерности (трех и выше), как известно, уже нет возможностей поля комплексных чисел. Здесь ставим задачу воспользоваться такой алгебраической структурой в пространстве, которая позволила бы иметь аналоги формул (3) и (4). Требуем еще, чтобы аналог элемента (1) давал, по крайней мере, алгебраический многочлен от координат вектора, который будет стоять на месте z .

Обозначения. $d \in \{3, 4, \dots\}$, σ – единичная сфера пространства $\mathbb{R}^d$, (ν, μ) – скалярное произведение, $\sigma(\mu) := \{\nu \in \sigma \mid (\nu, \mu) = 0\}$ – экватор сферы с полюсом μ , $|\sigma|$ – мера (объем) сферы.

Переменная единица. В общем случае пространства возможен такой подход к решению поставленной задачи, в алгебраической части в общем-то известный.

Взяв на роль z из (1) вектор $\mu \in \sigma$ и взяв затем вектор $\nu \in \sigma(\mu)$, наделим плоскость Π_ν векторов μ и ν структурой поля комплексных чисел, объявив μ единицей (общей для всех плоскостей Π_ν), а ν – мнимой единицей поля (таким образом, Π_ν и $\Pi_{-\nu}$ – два комплексных поля одной плоскости).

Поскольку каждый вектор $x \in \mathbb{R}^d$ принадлежит или “действительной” прямой вектора μ или, в ином случае, единственной своей “комплексной” плоскости Π_ν с $(x, \nu) > 0$, то для $x \neq 0$ будут существовать обратный вектор x^{-1} и его степени $(x^{-1})^m$, $m \in \mathbb{Z}$; последние можно обозначить как $(\mu x^{-1})^m$, отмечая в обозначении зависимость от единицы μ ; зависимость от мнимой единицы ν показывает вектор x , ее определяющий.

Будем иметь следующие аналоги формул (1)–(4):

$$\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma f(\xi) (\mu \xi^{-1})^m d\xi, \quad (1')$$

$$\xi = \mu \cos \theta + \nu \sin \theta, \quad \nu \in \sigma(\mu), \quad (2')\text{--}(3')$$

$$\nu^2 = -\mu. \quad (4')$$

Интеграл (1') является алгебраическим многочленом от координат вектора μ . Действительно, в (2') имеем $\cos \theta = (\mu, \xi)$, $\nu \sin \theta = \xi - \mu(\mu, \xi)$, и следовательно,

$$\xi^m = \mu \cos m\theta + \nu \sin m\theta = \mu \cos m\theta + (\xi - \mu(\mu, \xi)) \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} = \frac{-\mu \sin(m-1)\theta + \xi \sin m\theta}{\sin \theta}.$$

Осталось учесть, что отношения $\sin n\theta / \sin \theta$ суть многочлены от $\cos \theta = (\mu, \xi)$. Они не являются в общем случае однородными; так, например, $\sin 3\theta / \sin \theta = 4(\mu, \xi)^2 - 1$.

Можно проверить, что $\Delta \xi^m = -\mu v_{m-1}(\theta) + \xi(v_m(\theta) + 2u_{m-1}(\theta))$, где $u_n(\theta) = (\sin n\theta / \sin \theta)' / \sin \theta$, $v_n(\theta) = u'_n(\theta) / \sin \theta$. Таким образом, гармоничности степеней ξ^m также нет.

Общая единица. Более близкий аналог по сравнению с тем, что дает переменная единица, давала бы алгебра с единицей, общей для пространства (и сохранившая аналоги целевых формул (3), (4)).

Аналог представления (3) следует из общего для всех пространств представления (2') при наличии в алгебре обратного элемента, что предполагают аналоги целевых формул (3) и (4):

$$\xi \mu^{-1} = \cos \theta + \nu \mu^{-1} \sin \theta, \quad (3'')$$

$\xi, \mu \in \sigma$, $\nu \in \sigma(\mu)$ (обозначения в начале предыдущего пункта).

Аналоги равенств (4) будут выглядеть следующим образом:

$$|\nu \mu^{-1}| = 1, \quad (\nu \mu^{-1})^2 = -1 \quad (\mu \in \sigma, \quad \nu \in \sigma(\mu)). \quad (4'')$$

При $\mu = 1$ второе из равенств (4'') дает $\iota^2 = -1$ для всех $\iota \in \sigma(1)$.

Положив, пользуясь представлением (2'), $\nu \mu^{-1} = \cos \varphi + \iota \sin \varphi$, $\iota \in \sigma(1)$ (учли, что $\nu \mu^{-1} \in \sigma$ в силу первого из равенств (4'')), будем иметь $-1 = (\nu \mu^{-1})^2 = \cos 2\varphi + \iota \sin 2\varphi$, откуда $2\varphi = \pi$ и, следовательно, $\nu \mu^{-1} = \iota \in \sigma(1)$. Но тогда ввиду (3'') $|\xi \mu^{-1}| = 1$ для всех $\xi, \mu \in \sigma$. Последнее означает, что алгебра необходимо должна быть нормированной ($|xy| = |x| |y|$), что по известной теореме Гурвица возможно лишь в пространствах размерностей 1, 2, 4, 8.

В интересующих нас случаях (4 и 8) такие алгебры, как известно, образуют соответственно тела кватернионов и октав Кэли. В этих алгебрах очевидным образом имеют место представление (3'') и первое из равенств (4'') (ввиду нормированности); второе равенство в (4'') следует из того факта, что минус единицу дает квадрат единичного (по норме) “мнимого” вектора, каковым является произведение $\nu \mu^{-1}$ с $\nu \in \sigma(\mu)$: $\nu \mu^{-1} = (y_0 + y)(x_0 - x) = -y_0 x + x_0 y + y_0 x_0 - yx$, $yx = -(y, x) + [y, x]$, x_0 – “действительные” части векторов μ (и ν соответственно), x – их “мнимые” части, скобки в последнем равенстве означают соответственно скалярное и векторное произведения; “мнимость” $\nu \mu^{-1}$ следует из равенства $y_0 x_0 + (y, x) = (\nu, \mu) = 0$.

Что касается других пространств $\mathbb{R}^d$, то при $d = 3, 5, 6, 7$ их можно погрузить в $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^8$, считая векторы из $\mathbb{R}^d$ “мнимыми” (произведению векторов из $\mathbb{R}^d$ придется разрешить выход из $\mathbb{R}^d$). Ясно, что равенства (3'') и (4'') сохраняются (теперь уже для $\mu \in \sigma \subset \mathbb{R}^d$, $\nu \in \sigma(\mu) \subset \mathbb{R}^d$).

Наконец, для названных пространств будет выполнено и последнее требование – чтобы аналог (1') давал алгебраический (векторный) многочлен от координат вектора μ .

Действительно, в любой алгебре (гиперкомплексной системе) произведение является линейной функцией координат каждого сомножителя, поэтому и в алгебре кватернионов и октав степень $(\mu\xi^{-1})^m$ будет алгебраическим многочленом порядка $|m|$ от координат вектора μ , причем многочленом однородным. Заметим еще, что поскольку для кватернионов и октав $\xi\mu^{-1} = (\mu\xi^{-1})^{-1}$, то в аналоге (1') равноправны $\mu\xi^{-1}$ и $\xi\mu^{-1}$.

Как и в случае с переменной единицей, можно проверить, что

$$\Delta(\xi\mu^{-1})^m = -mu_m(\theta) + \nu\mu^{-1}u'_m(\theta),$$

т. е. степень не гармонична.

2. Сферические аналоги сумм Фурье

Обозначения. $r := d - 2$, где d – размерность пространства; $|\sigma'|$ – мера (объем) экватора сферы σ (см. также обозначения п. 2).

Равенства (3'), (4') и (3''), (4'') позволяют воспользоваться формулой Моавра, в силу которой соответственно

$$\xi^m = \mu \cos m\theta + \nu \sin m\theta, \quad (\xi\mu^{-1})^m = \cos m\theta + \nu\mu^{-1} \sin m\theta.$$

Тогда

$$\sum_{m=-n}^n \xi^m = 2\mu D_n(\widetilde{\mu\xi}), \quad \sum_{m=-n}^n (\xi\mu^{-1})^m = 2D_n(\widetilde{\mu\xi}),$$

где $\widetilde{\mu\xi} = \theta$,

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m\theta = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)} \quad (5)$$

– ядро Дирихле.

Таким образом, соответствующая сумма сферических элементов Фурье (см. (1')) будет иметь вид

$$\frac{2}{|\sigma|} \int_{\sigma} f(\xi) D_n(\widetilde{\mu\xi}) d\xi \quad (6)$$

(в случае переменной единицы последняя как множитель опущена). Заметим, что сумма элементов не зависит от выбора единицы.

В связи с вопросом о сходимости сумм к функции подсчитаем представляющий сумму интеграл для $f = 1$. Используем с этой целью формулу сведения сферического интеграла к повторным

$$\int_{\sigma} f(\xi) d\xi = \int_0^{\pi} \int_{\sigma(\mu)} f(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta) d\nu \sin^r \theta d\theta. \quad (7)$$

Получаем

$$\int_{\sigma} D_n(\widetilde{\mu\xi}) d\xi = |\sigma'| \int_0^{\pi} D_n(\theta) \sin^r \theta d\theta. \quad (8)$$

При четном r и $n \geq r$ интеграл (8) равен нулю, поскольку $\sin^r \theta$ является четным тригонометрическим полиномом порядка не выше n , а (двойной) интеграл равен значению такого полинома в нуле.

2.1. При нечетном r будем иметь

$$D_n(\theta) \sin^r \theta = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \cos \frac{\theta}{2} \sin^{r-1} \theta = \frac{1}{2} (\sin(n+1)\theta + \sin n\theta) \sin^{r-1} \theta.$$

Обозначая через $2m+1$ нечетное из чисел $n+1$ или n , находим

$$\int_0^\pi D_n(\theta) \sin^r \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{r-1} \theta \sin(2m+1)\theta d\theta,$$

так как интеграл с другим синусом равен нулю (см., например, [1, с. 386]). Там же можно найти значение последнего интеграла – с учетом $1/2$ он равен

$$\frac{1}{\varkappa_n} = (-2)^{(r-1)/2} \frac{((r-1)/2)!(r-2)!!(2m-r)!!}{(2m+r)!!} \quad (9)$$

(при этом $(-1)!! = 1$). Так как $(2m+r)!!/(2m-r)!! = \prod_{k=1}^r (2m-r+2k)$, ясно, что интеграл (8) при нечетном r имеет порядок n^{-r} .

Таким образом, полагая

$$S(t)f(\mu) := \frac{1}{|\sigma'|} \int_{\sigma(\mu)} f(\mu \cos t + \nu \sin t) d\nu, \quad (10)$$

получим следующее представление нормированной суммы элементов Фурье функции f :

$$D_n(f, \mu) := \frac{\varkappa_n}{|\sigma'|} \int_\sigma f(\xi) D_n(\widetilde{\mu\xi}) d\xi = \varkappa_n \int_0^\pi S(\theta) f(\mu) D_n(\theta) \sin^r \theta d\theta, \quad (11)$$

где $\varkappa_n$ определено равенством (9) из условия $D_n(1, \mu) = 1$ и имеет порядок n^r .

2.2. При четном r ввиду нулевого значения интеграла (8) нормирование полинома (6) только числовым множителем невозможно.

2.2.1. Нормируем интеграл (6) таким образом, чтобы

$$\frac{\varkappa}{|\sigma'|} \int_\sigma D_n(\widetilde{\mu\xi}) \left(\frac{\sin m\widetilde{\mu\xi}}{\sin \mu\xi} \right)^r d\xi = 1,$$

и полагаем

$$\begin{aligned} D_{n,m}(f, \mu) &:= \frac{\varkappa}{|\sigma'|} \int_\sigma f(\xi) D_n(\widetilde{\mu\xi}) \left(\frac{\sin m\widetilde{\mu\xi}}{\sin \mu\xi} \right)^r d\xi \\ &= \varkappa \int_0^\pi S(\theta) f(\mu) D_n(\theta) \sin^r m\theta d\theta \end{aligned} \quad (11')$$

(снова воспользовались формулой (7)). В силу четности r это будет сферический полином; порядок его не выше $n + r(m-1)$.

Задача теперь состоит в подборе по n и r натурального параметра m такого, чтобы

$$\int_0^\pi D_n(\theta) \sin^r m\theta d\theta \neq 0.$$

Ясно, что должно быть $rm > n$ (аргументацию см. выше после (8)).

Учитывая, что

$$\sin^r m\theta = 2^{-r} \left(C_r^{r/2} + 2 \sum_{k=1}^{r/2} (-1)^k C_r^{r/2-k} \cos 2km\theta \right), \quad (12)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(\theta) \sin^r m\theta d\theta &= 2^{-r} \left(C_r^{r/2} + 2 \sum_{2km \leq n} (-1)^k C_r^{r/2-k} \right) \\ &= -2^{-r+1} \sum_{2km > n} (-1)^k C_r^{r/2-k} \end{aligned} \quad (13)$$

– в заключение учли, что полная сумма коэффициентов равна нулю (аргументация там же – после (8)).

Так как необходимо $rm > n$, то последняя сумма не пуста, а поскольку биномиальные коэффициенты C_{2p}^{p-k} с ростом k до p строго убывают, эта сумма и не нулевая. Возможность нормирования доказана. Кроме того, как это вытекает из (13), чтобы в (11') иметь $D_{n,m}(1, \mu) = 1$, следует положить

$$\varkappa = -(-1)^{r/2} \frac{2^r}{\pi} \quad (14)$$

при условии $(r-2)m \leq n$, когда в сумму (13) не будет входить слагаемое с $k = r/2 - 1$; таким образом, общим условием равенства (14) будет

$$(r-2)m \leq n < rm. \quad (15)$$

Задача выбора по n и r подходящих m и $\varkappa$ решена.

Следующим шагом проанализируем представление (11').

С учетом (12) и (5) будем иметь

$$D_n(\theta) \sin^r m\theta = 2^{-r} \left(C_r^{r/2} D_n(\theta) + \sum_{k=1}^{r/2} (-1)^k C_r^{r/2-k} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \frac{\cos 2km\theta}{\sin(\theta/2)} \right).$$

Но $2 \sin(n + 1/2)\theta \cos 2km\theta = \sin(n + 2km + 1/2)\theta + \sin(n - 2km + 1/2)\theta$; следовательно,

$$\begin{aligned} 2^r D_n \sin^r m\theta &= C_r^{r/2} D_n + \sum_{k=1}^{r/2-1} (-1)^k C_r^{r/2-k} (D_{n+2km} + D_{n-2km}) \\ &\quad + (-1)^{r/2} (D_{n+rm} - D_{rm-n}). \end{aligned}$$

В обозначении номеров ядер Дирихле учли условие (15), в силу которого $rm - n > 0$ и $n - 2km \geq 0$ для всех k от 1 до $r/2 - 1$.

Таким образом, представление (11') преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} D_{n,m}(f, \mu) = & -\frac{(-1)^{r/2}}{\pi} \int_0^\pi S(\theta) f(\mu) \left(C_r^{r/2} D_n(\theta) \right. \\ & + \sum_{k=1}^{r/2-1} (-1)^k C_r^{r/2-k} (D_{n+2km}(\theta) + D_{n-2km}(\theta)) \\ & \left. + (-1)^{r/2} (D_{n+rm}(\theta) - D_{rm-n}(\theta)) \right) d\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

при этом $D_{n,m}(1, \mu) = 1$.

Обозначим через $S_n(\varphi, t)$ частичные суммы классического тригонометрического ряда Фурье функции φ действительного переменного $t \in \mathbb{R}$, через $Sf(\mu)$ – функцию того же действительного переменного, определяемую равенством $Sf(\mu)(t) = S(t)f(\mu)$. В этих обозначениях представление (16) можно записать компактнее:

$$D_{n,m}(f, \mu) = \sum c_k S_{k_n}(Sf(\mu), 0), \quad (16')$$

где коэффициенты c_k и номера k_n определяются из предыдущего представления.

2.2.2. Выбор m и n по заданному порядку полинома. Пусть $n \in \mathbb{Z}_0$. Выберем по n целые n_r и m_r на место прежних n и m в (11') из следующих условий:

$$n = n_r + r(m_r - 1), \quad (17)$$

т. е. чтобы порядок сферического полинома был не более n ;

$$n_r - (r - 2)m_r \simeq rm_r - n_r \rightarrow \infty, \quad (18)$$

т. е. чтобы наименьшие порядки ядер Дирихле в (16) были по возможности равными и бесконечно большими при $n \rightarrow \infty$. Тогда будет обеспечено названное выше условие (15) выбора m_r : чтобы $rm_r > n_r > (r - 2)m_r$.

Попытаемся найти не только достаточные, но и необходимые условия для оптимального нестрогого равенства в (18).

Введем, пока неопределенные, параметры n_1 и n_2 и положим

$$n_r - (r - 2)m_r = n_1, \quad rm_r - n_r = n_2, \quad (19)$$

откуда

$$2m_r = n_1 + n_2, \quad n_r = \frac{r(n_1 + n_2)}{2} - n_2.$$

Ясно, что n_1 и n_2 должны иметь общую четность; положим

$$n_1 = 2p_1 + \omega, \quad n_2 = 2p_2 - \omega, \quad (20)$$

где $\omega = 0$ или $\omega = 1$.

Имеем

$$m_r = p_1 + p_2, \quad n_r = r(p_1 + p_2) - 2p_2 + \omega. \quad (21)$$

Удовлетворим требованию (17):

$$n = r(p_1 + p_2) - 2p_2 + \omega + r(p_1 + p_2 - 1) = r2p_1 + 2(r-1)p_2 + \omega - r.$$

Поскольку r четно, ω должно иметь четность n ; пусть $n = 2p + \omega$. Тогда

$$p = rp_1 + (r-1)p_2 - \frac{r}{2}$$

(пришли к линейному диофантову уравнению). Найдем p_1 и p_2 .

Последнее уравнение равносильно такому:

$$p + \frac{r}{2} = (r-1)(p_1 + p_2) + p_1.$$

Пусть

$$p + \frac{r}{2} = (r-1)q + s, \quad 0 \leq s < r-1 \quad (22)$$

(т.е. s – остаток при делении $p + r/2$ на $r-1$).

Разбив q на неопределенные слагаемые, $q = q_1 + q_2$, положим

$$p_1 = (r-1)q_1 + s, \quad p_2 = q_2 - (r-1)q_1 - s \quad (23)$$

– второе равенство является следствием первого: $p_2 = (p_1 + p_2) - p_1 = q_2 - p_1$.

Удовлетворим требованию приближенного равенства (18), учитывая (19) и (20):

$$2p_1 + \omega + 2t = 2p_2 - \omega,$$

где $2t$ – погрешность равенства (18); ясно, что она должна быть четной. Последнее равенство равносильно такому: $p_1 + \omega + t = p_2$. Подставив в него значения (23), получим

$$(r-1)q_1 + s + \omega + t = q_2 - (r-1)q_1 - s,$$

откуда $q_2 = (2r-1)q_1 + 2s + \omega + t$.

Учитывая последнее и выбор q_1 и q_2 , имеем

$$q = q_1 + q_2 = q_1 + 2(r-1)q_1 + 2s + \omega + t = (2r-1)q_1 + 2s + \omega + t.$$

Здесь согласно разложению (22) $2s + \omega < 2(r-1) + 1 = 2r-1$. Таким образом, q_1 – результат деления q на $2r-1$ с остатком $s_1 = 2s + \omega + t$, откуда определяем

$$t = s_1 - 2s - \omega. \quad (24)$$

Итак, по n определяем $p = [n/2]$ и $\omega = n - 2p$. Находим $q = [(p + r/2)/(r - 1)]$ и $s = p + r/2 - (r - 1)q$. Наконец, получаем $q_1 = [q/(2r - 1)]$ и $s_1 = q - (2r - 1)q_1$.

Полагаем $q_2 = q - q_1$; тогда согласно (22)

$$p_1 = (r - 1)q_1 + s, \quad p_2 = q - q_1 - (r - 1)q_1 - s = q - rq_1 - s;$$

наконец, по формулам (21) находим

$$\begin{aligned} m_r &= (r - 1)q_1 + s + q - rq_1 - s = q - q_1, \\ n_r &= r(q - q_1) - 2(q - rq_1 - s) + \omega = (r - 2)q + rq_1 + 2s + \omega. \end{aligned}$$

Погрешность в (18), определяемая равенством

$$2t := (n_r - (r - 2)m_r) - (rm_r - n_r),$$

ввиду (24) равна $2(s_1 - 2s - \omega)$.

Далее, $n_r - (r - 2)m_r = (r - 2)q + rq_1 + 2s + \omega - (r - 2)(q - q_1) = 2(r - 1)q_1 + 2s + \omega \rightarrow \infty$. Требование (18) удовлетворено полностью.

Наконец, $n_r + r(m_r - 1) = (r - 2)q + rq_1 + 2s + \omega + r(q - q_1 - 1) = 2(r - 1)q + 2s + \omega - r = 2p + r + \omega - r = n$ — учли (22) и представление $n = 2p + \omega$. Удовлетворили и требование (17).

3. Приближение

3.1. Четномерный случай. Пусть r — четно. Будем пользоваться представлениями (16) и (16') с переобозначенными n и m на n_r и m_r , определенными по n согласно п. 2.2.2. Сферические полиномы $D_{n,m}(f, \mu)$ с замененными n и m обозначаем через $D_n(f, \mu)$. Это соглашение без дополнительных напоминаний будет действовать на протяжении всего настоящего пункта 3.1.

ТЕОРЕМА 1 (о сходимости в точке). *Если $S_n(Sf(\mu), 0) \rightarrow f(\mu)$, то $D_n(f, \mu) \rightarrow f(\mu)$ (обозначения см. выше после (16')).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (16') следует

$$D_n(d, \mu) - f(\mu) = \sum c_k (S_{k_n}(Sf(\mu), 0) - f(\mu)), \quad (25)$$

где $k_n \rightarrow \infty$. Далее очевидно.

Пусть теперь $\|f\|$ — норма функций, определенных на сфере; основное требование к норме — *сильная непрерывность относительно нее операторной функции $S(t)$* (см. (10)); такому требованию удовлетворяют нормы пространств $L_p(\sigma)$, $1 \leq p < \infty$, и $C(\sigma)$ соответственно функций, интегрируемых с p -й степенью и непрерывных на σ функций.

ТЕОРЕМА 2 (о сходимости по норме). *Пусть Sf — функция действительного переменного, определяемая равенством $(Sf)(t) = S(t)f$.*

Если $S_n(Sf, 0) \rightarrow f$, то $D_n(f) \rightarrow f$ (сходимость по норме).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем из того же представления (17), если в нем перейти к норме.

ТЕОРЕМА 3 (аналог неравенства Лебега). *Имеем*

$$\|f - D_n(f)\| \leq C_r E_n(f) \ln(n+2),$$

где $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f сферическими полиномами порядка не выше n , $\underline{n} = \min\{n_r - (r-2)t_r, rt_r - n_r\}$; константа C_r зависит только от r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_{\underline{n}}$ – сферический полином наилучшего для f приближения: $\|f - T_{\underline{n}}\| = E_{\underline{n}}(f)$. Имеем $D_n(T_{\underline{n}}) = T_{\underline{n}}$, что следует из представления (17) ввиду того, что $k_n \geq \underline{n}$, $S(t)T_{\underline{n}}$ – тригонометрический полином того же порядка, что и сферический полином $T_{\underline{n}}$, и поэтому $S_{k_n}(ST_{\underline{n}}, 0) = S(0)T_{\underline{n}} = T_{\underline{n}}$. Тогда аналогично классическому тригонометрическому случаю будем иметь $D_n(f) - f = T_{\underline{n}} - f + D_n(f - T_{\underline{n}})$. Переходя здесь к нормам, имея в виду (16'), получаем

$$\|D_n(f) - f\| \leq \|T_{\underline{n}} - f\| \left(1 + \sum |c_k| \|S_{k_n}(T_{\underline{n}} - f)\|\right).$$

Но $\|S_{k_n}\| \leq L_{k_n}$, где L_n – константа Лебега (норма в L ядра Дирихле). Осталось учесть, что L_n имеет порядок $\ln(n+2)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. По поводу констант Лебега см., например, [2, с. 482]; там же см. оценки наилучших приближений (с. 275).

2. В связи с функциональными значениями функции Sf и саму функцию f можно считать векторнозначной со значениями в некотором банаховом пространстве с нормой $|\cdot|$. Замечание относится и к нижеследующему случаю нечетномерного пространства.

3.2. Нечетномерный случай. Пусть r – нечетно.

ТЕОРЕМА 4 (о сходимости в точке). *Если в точке $\mu \in \sigma$ средняя $S(\theta)f(\mu)$ как функция от $\theta \in [0, \pi]$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, то $D_n(f, \mu) \rightarrow f(\mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (11) и выбора $\varkappa_n$

$$D_n(f, \mu) - f(\mu) = \varkappa_n \int_0^\pi (S(\theta)f(\mu) - f(\mu)) D_n(\theta) \sin^r \theta d\theta.$$

Но $D_n(\theta) \sin^r \theta = \sin(n+1/2)\theta \cos(\theta/2) \sin^{r-1} \theta$ (представление ядра Дирихле D_n см. в (17)). Полагая

$$\Phi(\theta) = (S(\theta)f(\mu) - f(\mu)) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{r-1} \theta, \quad (26)$$

имеем

$$D_n(f, \mu) - f(\mu) = \varkappa_n \int_0^\pi \Phi(\theta) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta.$$

Интегрируя r раз по частям, получаем

$$D_n(f, \mu) - f(\mu) = \frac{\varkappa_n}{(n+1/2)^r} \int_0^\pi \Phi^{(r)}(\theta) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{r\pi}{2}\right) d\theta \quad (27)$$

(подстановки пределов интегрирования дадут нулевые значения: первые за счет $\sin \theta$, последние – за счет $\cos(\theta/2)$ в π и разности $S(\theta)f(\mu) - f(\mu)$ в 0). Так как $\varkappa_n \asymp n^r$ и производная суммируема, последний интеграл, а с ним и разность $D_n(f, \mu) - f(\mu)$ стремятся к нулю.

ЛЕММА. Пусть $s \in \mathbb{Z}_0$; $k, m \in \mathbb{N}$; $\tilde{\Delta}(h)\varphi(\theta) = \varphi(\theta+h) - \varphi(\theta-h)$, $\tilde{\Delta}^k(h)$ — степень оператора. Если 2π -периодическая функция $\varphi(\theta)$ имеет ту же четность, что и $\cos(\theta - s\pi/2)$, то

$$\int_0^\pi \varphi(\theta) \cos\left(m\theta - \frac{s\pi}{2}\right) d\theta = 2^{-k} \int_0^\pi \left(\tilde{\Delta}^k\left(\frac{\pi}{2m}\right)\varphi(\theta)\right) \cos\left(m\theta - (s-k)\frac{\pi}{2}\right) d\theta. \quad (\text{A})$$

Если функция $\varphi(\theta)$ имеет на $[0, \pi]$ производную нечетного порядка ρ , то

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(\theta) \sin m\theta d\theta &= \sum_{k=0}^{(\rho-1)/2} (-1)^k m^{-2k-1} (\varphi^{(2k)}(0) - (-1)^m \varphi^{(2k)}(\pi)) \\ &\quad + (-1)^{(\rho-1)/2} m^{-\rho} \int_0^\pi \varphi^{(\rho)}(\theta) \cos m\theta d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Для любой функции $\varphi(\theta)$ на $[0, \pi]$

$$\int_0^\pi \varphi(\theta) \cos m\theta d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\tilde{\Delta}(h)\varphi(\theta)) \sin m\theta d\theta, \quad (\text{C})$$

где $h = \theta$ и $t = \pi/(2m)$ для $\theta \in (0, \pi/(2m))$; $h = \pi/(2m)$ и $t = \theta$ для $\theta \in [\pi/(2m), \pi - \pi/(2m))$; $h = \pi - \theta$ и $t = \pi - \pi/(2m)$ для $\theta \in [\pi - \pi/(2m), \pi)$; во всех случаях $0 < h \leq \pi/(2m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях равенства (А) подынтегральная функция четна; учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(\theta) \cos\left(m\theta - \frac{s\pi}{2}\right) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \varphi(\theta) \cos\left(m\theta - \frac{s\pi}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\pi}^\pi \varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2m}\right) \cos\left(m\theta - (s-1)\frac{\pi}{2}\right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^\pi \varphi\left(\theta - \frac{\pi}{2m}\right) \cos\left(m\theta - (s+1)\frac{\pi}{2}\right) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^\pi \left(\tilde{\Delta}\left(\frac{\pi}{2m}\right)\varphi(\theta)\right) \cos\left(m\theta - (s-1)\frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\tilde{\Delta}\left(\frac{\pi}{2m}\right)\varphi(\theta)\right) \cos\left(m\theta - (s-1)\frac{\pi}{2}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Последнее равенство обусловлено четностью подынтегральной функции: разновидность функции поменяла ее четность, сдвиг косинуса на $\pi/2$ поменял его четность.

Применив полученное равенство k раз, придем к равенству (А).

Равенство (В) доказывается последовательным интегрированием по частям.

Для доказательства равенства (С) применим равенство (А) к четному 2π -периодическому продолжению $\tilde{\varphi}$ функции φ с $[0, \pi)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(\theta) \cos m\theta d\theta &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\tilde{\Delta}\left(\frac{\pi}{2m}\right) \tilde{\varphi}(\theta) \right) \sin m\theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/(2m)} \left(\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2m}\right) - \varphi\left(-\theta + \frac{\pi}{2m}\right) \right) \sin m\theta d\theta \right. \\ &\quad + \int_{\pi/(2m)}^{\pi-\pi/(2m)} \left(\tilde{\Delta}\left(\frac{\pi}{2m}\right) \varphi(\theta) \right) \sin m\theta d\theta \\ &\quad \left. + \int_{\pi-\pi/(2m)}^\pi \left(\varphi\left(2\pi - \theta - \frac{\pi}{2m}\right) - \varphi\left(\theta - \frac{\pi}{2m}\right) \right) \sin m\theta d\theta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \tilde{\Delta}(h) \varphi(t) \sin m\theta d\theta. \end{aligned}$$

Это равенство (С).

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть $S^{(r)}(t)f$ – производная по норме $\|\cdot\|$; обозначим

$$\omega(\delta, S^{(r)}f) = \sup_{0 < h < \delta} \sup_t \|\Delta(h)S^{(r)}(t)f\|,$$

где $\Delta(h)\varphi(t) = \varphi(t+h) - \varphi(t)$.

ТЕОРЕМА 5. Если существует производная $S^{(r)}(t)f$, то

$$c\|f - D_n(f)\| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n+1}, S^{(r)}f\right) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{(r-1)/2} (\|S^{(2i)}(0)f\| + \|S^{(2i)}(\pi)f\|).$$

Для $d = 3$

$$\|f - D_n(f)\| \leq C\omega\left(\frac{\pi}{n+1}, S'f\right)$$

(в этом случае теоремы 4 и 5 по предложению автора доказаны Л. В. Егоровым). Константы C и $c > 0$ не зависят от n и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируем функцию (26) r раз:

$$\Phi^{(r)}(\theta) = \sum_{s=0}^r C_r^s (S(\theta)f - f)^{(r-s)} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{r-1}\theta \right)^{(s)}. \quad (28)$$

Поскольку

$$\sin^m \theta = (2i)^{-m} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^m = \sum_{k=0}^m a_k e^{i((m-2k)\theta - m\pi/2)}$$

(за константами не следим), то

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^m \theta = \operatorname{Re} e^{i\theta/2} \sin^m \theta = \sum_{k=0}^m a_k \cos\left(\left(m-2k+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{m\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^{r-1}\theta\right)^{(s)} = \sum_{k=0}^{r-1} b_k \sin\left(\left(r-2k-\frac{1}{2}\right)\theta - (r-s)\frac{\pi}{2}\right) \quad (29)$$

(перешли от $\cos(x - (r-1)\pi/2)$ к $-\sin(x - r\pi/2)$ и взяли производную по формуле $(\sin x)^{(s)} = \sin(x + s\pi/2)$).

Далее,

$$\begin{aligned} & \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^{r-1}\theta\right)^{(s)} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{r\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{b_k}{2} \left(\cos\left((n-r+2k+1)\theta - \frac{s\pi}{2}\right) - \cos\left((n+r-2k)\theta - r\pi + \frac{s\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{j=-r+1}^r c_j \cos\left((n+j)\theta - \frac{s\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

(в последнем равенстве перешли от $\cos(x - r\pi + s\pi/2)$ к $\cos(x - s\pi/2)$).

Подставляя (29) в (28), затем полученное в (27), учитывая (30), находим

$$D_n(f) - f = \varkappa_n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-r} \sum_{s=0}^r \sum_{j=-r+1}^r a_{sj} \int_0^\pi (S(\theta)f - f)^{(r-s)} \cos\left((n+j)\theta - \frac{s\pi}{2}\right) d\theta. \quad (31)$$

При $s = 2i - 1 > 0$ от $\cos(m\theta - s\pi/2)$ в интегралах (31) переходим к $\sin m\theta$; при $s = 2i > 0$ интегралы преобразуем по формуле

$$\int_0^\pi (S(\theta)f)^{(r-2i)} \cos(n+j)\theta d\theta = -\frac{1}{n+j} \int_0^\pi (S(\theta)f)^{(r-2i+1)} \sin(n+j)\theta d\theta;$$

опять считаем пока $n+j \neq 0$. Таким образом, с $\cos$ останется интеграл при $s = 0$. Его заменим согласно равенству (C) леммы интегралом

$$\int_0^\pi \tilde{\Delta}(h) S^{(r)}(\theta) f \sin(n+j)\theta d\theta, \quad (32)$$

где $0 < h \leq \pi/(2|n+j|)$. К оставшимся интегралам с $\sin$ и с четными производными $(S(\theta)f)^{(r-2i+1)}$ снова применим лемму, ее равенство (B) при $\rho = 2i - 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi (S(\theta)f)^{(r-2i+1)} \sin(n+j)\theta d\theta = (-1)^{i-1} (n+j)^{-2i+1} \int_0^\pi S^{(r)}(\theta) f \cos(n+j)\theta d\theta \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k (n+j)^{-2k-1} (S^{(r-2i+1+2k)}(0)f - (-1)^{m+j} S^{(r-2i+1+2k)}(\pi)f). \end{aligned} \quad (33)$$

При $r - 2i + 1 = r - s = 0$ в представлении (31) под интегралом стоит функция $S(\theta)f - f$, и поэтому в (33) слагаемое с $k = 0$ будет содержать разность $S(\pi) - f$ вместо $f - (-1)^{n+j} S(\pi)f$.

Последний интеграл в (33) заменим интегралом (32) согласно равенству (В) леммы. При $j = -n$ интегралы в (31) равны нулю при s нечетном; при четном s имеем

$$\int_0^\pi (S(\theta)f)^{(r-s)} d\theta = S^{(r-s-1)}(\pi)f - S^{(r-s-1)}(0)f.$$

Здесь, как и выше в (33), производные четных порядков.

Переходя в (31) к нормам и используя вышеприведенные представления, получим

$$\begin{aligned} \|f - D_n(f)\| \leq & \sum_{\substack{j=-r+1 \\ j \neq -n}}^r c_{sj} \omega\left(\frac{\pi}{|n+j|}, S^{(r)}f\right) \\ & + |n+j|^{-1} \sum_{\rho=0}^{(r-1)/2} (\|S^{(2\rho)}(0)f\| + \|S^{(2\rho)}(\pi)f\|). \end{aligned}$$

Замена j на 1 осуществляется известным способом (см. ниже).

Если $d = 3$, то в (33) будет одно слагаемое с $k = 0$, равное $(1/(n+j))(S(\pi)f - f)$. Его оценим по норме следующим образом:

$$\begin{aligned} \|S(\pi)f - S(0)f\| &= \frac{1}{2} \|S(\pi) - 2S(0)f + S(-\pi)\| \leq \pi \omega(\pi, S'f) \\ &\leq \pi(n+1) \omega\left(\frac{\pi}{n+1}, S'f\right). \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие известные в теории приближения функций свойства модулей непрерывности:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Delta}^2(h)\varphi\| &\leq 2h\omega(h, \varphi'), \quad \omega(n\delta, \varphi) \leq n\omega(\delta, \varphi), \\ \omega(\eta, f) &\leq \left(\left[\frac{\eta}{\delta}\right] + 1\right) \omega(\delta, f). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

Саратовский государственный университет
E-mail: postmaster@scnit.saratov.su

Поступило
03.08.1995
Исправленный вариант
10.03.1997