Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Москва, А. М. Райгородский, Новые нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 319–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:29:42

Новые нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

В. Ф. Москва, А. М. Райгородский

1. Введение и формулировка результата. Пусть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим граф $G_n = (V_n, E_n)$, у которого

$$V_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = \pm 1\}| = |\{i : x_i = 0\}| = k\},$$

$$E_n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2k}\}.$$

Будем считать, что в каждом векторе из V_n первая ненулевая координата равна 1. Таким образом, $|V_n| = C_n^k 2^{k-1}$.

Граф G_n играет исключительно важную роль в проблемах Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера (см. [1]–[6]). В частности, вопрос об отыскании числа независимости

$$\alpha(G_n) = \max\{|W| : W \subseteq V_n, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \notin E_n, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W\}$$

такого графа крайне интересен и по-прежнему открыт.

Впервые этот вопрос возник в работе [3]. Затем он обсуждался в книге [2]. Наконец, в статьях [7]–[9] были предложены новые нетривиальные подходы к проблеме, которые позволили получить как асимптотические верхние и нижние оценки, так и их аналоги в малых размерностях. Сейчас нам будут более интересны асимптотические результаты, к ним мы и перейдем.

В работах [7], [8] доказана

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место оценка $\alpha(G_n) \geq (2.241 \dots + o(1))^n$.*

В свою очередь, наилучшая известная верхняя оценка (см. [8]) дается в теореме 2.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место оценка $\alpha(G_n) \leq (2.462 \dots + o(1))^n$.*

Очевидно, что зазор довольно велик. В книге [2] предложена многопараметрическая конструкция, которая при правильном подборе параметров, с большой вероятностью оптимальна. Проведя соответствующую оптимизацию, мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место оценка $\alpha(G_n) \geq (2.264 \dots + o(1))^n$.*

ГИПОТЕЗА 1. *Имеет место равенство $\alpha(G_n) = (2.264 \dots + o(1))^n$.*

Гипотеза 1 имеет ряд важных следствий, о которых мы скажем в п. 2 данной заметки.

2. Возможные приложения в проблемах Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера. Проблема Борсука состоит в отыскании минимального числа $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ (см. [1]–[6]). Проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера сводится к поиску величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, называемой *хроматическим числом пространства* и равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки пространства, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1 (см. [1], [2]).

В предположении справедливости гипотезы 1 можно обосновать следующие две теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294), гранта Президента РФ (грант № МД-8390.2010.1), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8784.2010.1).

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.249 \dots + o(1))^n$.*

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место оценка $f(n) \geq (1.369 \dots + o(1))^{\sqrt{n}}$.*

Обе эти теоремы значительно уточняют известные неравенства

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n, \quad f(n) \geq (1.225 \dots + o(1))^{\sqrt{n}}$$

(см. [1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 совсем простое:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G_n) \geq \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} = \frac{(2\sqrt{2} + o(1))^n}{(2.264 \dots + o(1))^n} = (1.249 \dots + o(1))^n.$$

Доказательство теоремы 5 требует более сложного рассуждения, которое стандартно (см. [1], [2]) и выходит за рамки этого краткого сообщения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146. [2] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
 [3] A. M. Raigorodskii, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247. [4] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, М., 1965.
 [5] V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997. [6] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005. [7] В. К. Любимов, А. М. Райгородский, *Докл. РАН*, **427:4** (2009), 458–460. [8] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, “О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$: оценки, гипотезы и приложения к задачам Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. (в печати)*. [9] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, *Матем. заметки*, **86:5** (2009), 794–796.

В. Ф. Москва

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Поступило

10.06.2010

А. М. Райгородский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mraigor@yandex.ru