Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Нижняя граница для дискретной нормы полинома на окружности, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 306–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 04:49:51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Нижняя граница для дискретной нормы полинома на окружности

В. Н. Дубинин

1. Введение и формулировка результата. В вопросах приближения функций зачастую выбирают равномерную сетку значений аргументов. В этой связи естественно поставить вопрос о соотношении дискретной нормы по данной сетке и равномерной нормы соответствующих функций на заданном множестве. В сравнительно недавней работе [1] Шейл-Смолл показал, что для алгебраических полиномов P степени n и натуральных $N > n$ справедлива оценка

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \sqrt{\frac{N-n}{N}} \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (1)$$

Ранее Рахманов и Шехтман [2] установили неравенство

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \left(1 + C \log \frac{N}{N-n}\right)^{-1} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad (2)$$

где абсолютную константу C можно оценить числом 16 (см. [2; с. 3, 5]). Этот результат обобщает оценку Марцинкевича [3], который получил (2) в случае $N = n + 1$. Неравенство (2) лучше, чем неравенство (1) при n/N близких к единице, но хуже оценки Шейл-Смолла при малых значениях n/N . В настоящей заметке доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть P – полином степени n , и пусть N – натуральное число, $N \geq 2n$. Тогда для дискретной нормы полинома P имеет место неравенство

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \cos \frac{\pi n}{2N} \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (3)$$

Равенство в (3) достигается в случае $P(z) = (z \exp(i\pi/N))^n + 1$ и любого N , кратного n .

Оценка (3) справедлива для всех $N > n$. Однако при $n < N < 2n$ она хуже оценки (1). В случае $N = 2n$ оценки (1) и (3) совпадают, а при $N > 2n$ неравенство (3) усиливает неравенства (1) и (2). Более того, при N , кратных n , неравенство (3) точное, и мы приходим к равенству

$$\sup \left\{ \left(\max_{|z|=1} |P(z)| \right) / \left(\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \right) \right\} = \left(\cos \left(\frac{\pi n}{2N} \right) \right)^{-1},$$

где N , кратное n , и верхняя грань берется по всем полиномам P степени n (ср. [2; теорема 1]).

Заметим, что еще в 1931 г. Бернштейн [4] получил неравенства для тригонометрических сумм, близкие неравенствам (1)–(3) (см. также [5; с. 147, 149, 154]). В частности,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00038) и ДВО РАН (грант № 09-I-П4-02).

из следствия на с. 154 работы [5] можно получить неравенство (3) в случае четных степеней n . Наше доказательство отлично от доказательств в работах [1]–[5]. Оно опирается, по существу, только на принцип максимума модуля подходящей аналитической функции. Следуя работе [6], можно усилить неравенство (3) с учетом свободного члена и старшего коэффициента полинома P .

2. Вспомогательный результат. Введем обозначения

$$m(P) = \min_{|z|=1} |P(z)|, \quad M(P) = \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Нам понадобится следующий аналог граничной леммы Шварца в одном ее частном случае.

ЛЕММА 1. Пусть P – полином степени n , для которого $P(0) \neq 0$ и $m(P) \neq M(P)$, и пусть функция $\zeta = \Phi(w)$ конформно и однолистно отображает внешность отрезка $\gamma = [m^2(P), M^2(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$ и $\Phi(m^2(P)) = -1$. Тогда функция

$$f(z) = \Phi\left(\overline{P(\bar{z})}P\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

регулярна на множестве

$$G = \left\{z : |z| < 1, \overline{P(\bar{z})}P\left(\frac{1}{z}\right) \notin \gamma\right\},$$

аналитически продолжима на множество

$$E = \{z : |z| = 1, |P(\bar{z})| \neq m(P), |P(\bar{z})| \neq M(P)\},$$

и в точках множества E справедливо неравенство

$$|f'(z)| \leq n. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанная гладкость функции f на множествах G и E легко проверяется. Далее, в некоторой окрестности начала координат имеет место разложение

$$f(z) = \frac{M^2(P) - m^2(P)}{4\bar{c}_0 c_n} z^n + \dots,$$

где c_0 – свободный член, а c_n – старший коэффициент полинома P . Кроме того, $f(z) \neq 0$ в $G \setminus \{0\}$. Поэтому функция

$$\frac{z^n}{f(z)}$$

регулярна на открытом множестве G . В точках границы этого множества модуль указанной функции не превосходит единицы. По принципу максимума модуля заключаем отсюда, что неравенство

$$|f(z)| \geq |z^n| \quad (5)$$

выполняется всюду на множестве G . Пусть теперь z – произвольная фиксированная точка множества E . Учитывая неравенство (5), имеем

$$|f'(z)| = \frac{\partial |f(z)|}{\partial |z|} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{|f(z)| - |f(rz)|}{1 - r} \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^n}{1 - r} = n.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Можно считать, что $M(P) = 1$ и $P(0) \neq 0$. В этих условиях $m(P) < M(P)$. Действительно, в противном случае полином P отображает окружность $|z| = 1$ в себя и ввиду равенства $P(\infty) = \infty$ принцип симметрии дает противоречие $P(0) = 0$. Покажем, что для любой точки $z = e^{i\varphi}$ на окружности $|z| = 1$ справедливо неравенство

$$|(|P(z)|^2)'_{\varphi}| \leq n \sqrt{|P(z)|^2(1 - |P(z)|^2)} \quad (6)$$

(ср. [6; теорема 2]). Ввиду непрерывности достаточно проверить это неравенство для всех точек z таких, что $\bar{z}$ принадлежит множеству E из леммы. Пусть $z \in E$. Тогда для функции f из данной леммы выполняется

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \Phi' \left(\overline{P(\bar{z})} P \left(\frac{1}{z} \right) \right) \right| \left| \overline{P'(\bar{z})} P \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z^2} \overline{P(\bar{z})} P' \left(\frac{1}{z} \right) \right| \\ &= |\Phi'(|P(\bar{z})|^2)| \left| \frac{P^2(\bar{z})}{z} \right| \left| \frac{\overline{z P'(\bar{z})}}{\overline{P(\bar{z})}} - \frac{(1/z) P'(1/z)}{P(1/z)} \right| \\ &= |\Phi'(|P(\bar{z})|^2)| |P^2(\bar{z})| \left| 2 \operatorname{Im} \frac{\bar{z} P'(\bar{z})}{P(\bar{z})} \right| = |\Phi'(|P(\bar{z})|^2)| |(|P(\bar{z})|^2)'_{\varphi}|. \end{aligned}$$

Для вычисления производной Φ' заметим, что обратная функция имеет вид

$$\Phi^{-1}(\zeta) = \frac{1}{4} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) (M^2(P) - m^2(P)) + \frac{1}{2} (M^2(P) + m^2(P)).$$

Отсюда

$$|\Phi'(|P(\bar{z})|^2)|^{-1} = \left| \frac{1}{4} (1 - e^{-i2\theta}) (M^2(P) - m^2(P)) \right| = \frac{1}{2} |\sin \theta| (M^2(P) - m^2(P)),$$

где $\Phi^{-1}(e^{i\theta}) = |P(\bar{z})|^2$, и, следовательно,

$$\cos \theta = \frac{2|P(\bar{z})|^2 - (M^2(P) + m^2(P))}{M^2(P) - m^2(P)}.$$

Окончательно

$$|f'(z)| = \frac{|(|P(\bar{z})|^2)'_{\varphi}|}{\sqrt{(|P(\bar{z})|^2 - m^2(P))(M^2(P) - |P(\bar{z})|^2)}}.$$

Применение неравенства (4) дает неравенство (6) для $\bar{z}$.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству неравенства (3). Обозначим через $z_0 = e^{i\varphi_0}$ одну из точек, в которой достигается максимум $M(P) = |P(z_0)| = 1$, и пусть ω_k – тот корень N -й степени из единицы, для которого дуга окружности

$$\left\{ z : |z| = 1, |\arg z - \arg \omega_k| \leq \frac{\pi}{N} \right\}$$

содержит точку z_0 . Предположим, что для некоторой ветви аргумента выполняется неравенство

$$\arg \omega_k - \frac{\pi}{N} \leq \varphi_0 \leq \arg \omega_k.$$

Деля обе части неравенства (6) на квадратный корень справа и интегрируя полученное соотношение на промежутке $(\varphi_0, \arg \omega_k)$ с заменой $|P(z)|^2 = u(\varphi)$, получаем

$$\begin{aligned} n(\arg \omega_k - \varphi_0) &\geq \int_{\varphi_0}^{\arg \omega_k} \frac{-u'_{\varphi} d\varphi}{\sqrt{u(1-u)}} = - \int_1^{u_k} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \\ &= -2 \int_1^{\sqrt{u_k}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -2 \arcsin \sqrt{u_k} + \pi, \end{aligned}$$

где $u_k = u(\arg \omega_k)$. Отсюда

$$2 \arcsin |P(\omega_k)| \geq \pi - n \frac{\pi}{N} > 0,$$

и

$$|P(\omega_k)| \geq \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2N} \right) = \cos \frac{\pi n}{2N}.$$

Переходя к максимуму, имеем неравенство (3). В случае $\arg \omega_k \leq \varphi_0$ аналогичные выкладки приводят к тому же неравенству.

Если $P(z) = (z \exp(i\pi/N))^n + 1$ и $N = nl$, где $l \geq 2$ – натуральное число, то

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = 2.$$

С другой стороны, прямые вычисления дают

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| = \max_{0 \leq k \leq l-1} |P(\omega_k)| = \max_{0 \leq k \leq l-1} 2 \left| \cos \left(\frac{\pi}{l} k + \frac{\pi}{2l} \right) \right| = 2 \cos \frac{\pi}{2l}.$$

Таким образом, для данного полинома P в (3) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Sheil-Small, *Bull. London Math. Soc.*, **40**:6 (2008), 956–964. [2] E. Rakhmanov, B. Shekhtman, *J. Approx. Theory*, **139**:1-2 (2006), 2–7. [3] J. Marcinkiewicz, *Acta Litt. Sci. Szeged*, **8** (1937), 131–135. [4] С. Н. Бернштейн, *Изв. АН СССР. ОМЕЖ*, **9** (1931), 1151–1161. [5] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений. В 4 т.*, т. 2: *Конструктивная теория функций*, Из-во АН СССР, М., 1954. [6] В. Н. Дубинин, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 51–60.

В. Н. Дубинин

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

14.01.2011