Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чернов, Об одном обобщении леммы Бихари на случай вольтерровых операторов в лебеговых пространствах, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 757–769

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:16:29

Об одном обобщении леммы Бихари на случай вольтерровых операторов в лебеговых пространствах

А. В. Чернов

Для оператора, действующего в лебеговом пространстве $L_q(\Pi)$, $1 < q < \infty$, формулируется и доказывается абстрактный аналог леммы Бихари. В качестве приложения демонстрируется его применение к получению равномерной поточечной оценки приращения решения управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговом пространстве. Процедура сведения управляемых начально-краевых задач к указанному уравнению иллюстрируется на примере задачи Гурса–Дарбу.

Библиография: 29 названий.

DOI: 10.4213/mzm8951

1. Введение. Лемма Бихари (см. [1]), являющаяся простейшим нелинейным аналогом леммы Гронуолла¹, хорошо известна специалистам по теории дифференциальных уравнений. Известны также и различные более общие утверждения о неравенствах, позволяющие строить оценки решений дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, а также операторных уравнений, – см., например, [2]–[6] и др. В частности, в [6; теорема 2.1] был представлен нелинейный аналог леммы Гронуолла, который состоял в следующем.

Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $F: L_q(\Pi) \rightarrow L_q(\Pi)$ – нелинейный оператор вида $F[x] = B[x^{q/p}]$, где оператор $B: L_p \rightarrow L_q$ линейный и положительный, а функция $\varphi \in L_q$ неотрицательна и достаточно мала по норме. При этих условиях и некотором дополнительном требовании относительно вольтерровых свойств оператора B в [6] была построена поточечная на всем множестве Π оценка сверху для всякого $x \in L_q(\Pi)$, удовлетворяющего неравенству $x \leq F[x] + \varphi$ (точную формулировку см. ниже, лемма 3). Отличительной особенностью соответствующего способа обобщения леммы Гронуолла явилось то, что оценка x строилась на заранее заданном множестве Π , одном и том же для любой функции φ , достаточно малой по норме. Это

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (проект НК-13П(9)) и аналитической целевой ведомственной программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927).

¹Иногда ее называют леммой Гронуолла–Беллмана или леммой Беллмана.

обстоятельство позволило построить равномерные поточечные оценки глобальных решений бесконечного семейства вольтерровых операторных уравнений, отвечающего некоторому ограниченному множеству управлений, при том, однако, условии, что нормы управлений отличаются достаточно мало [6; теорема 1.1].

В данной статье развивается и обобщается упомянутый выше нелинейный аналог леммы Гронуолла из [6] (а соответственно, и утверждение о поточечной оценке [6; теорема 1.1]). А именно, требование малости φ по норме заменяется более слабым (как показано) требованием существования решения у некоторого мажорантного уравнения. Полученный результат является, по существу, непосредственным абстрактным аналогом леммы Бихари. Остановимся на этом обстоятельстве более подробно. Для этого напомним формулировку классической леммы Бихари.

ЛЕММА 1. Пусть функции $x(t)$, $f(t)$ непрерывны и неотрицательны на $[a; b]$, причем

$$x(t) \leq c + \int_a^t f(\tau) x^m(\tau) d\tau \quad \text{для всех } t \in [a; b], \quad (1)$$

$$\int_a^t f(\tau) d\tau < \frac{1}{(m-1)c^{m-1}} \quad \text{для всех } t \in [a; b], \quad (2)$$

где $m > 1$, $c > 0$ – некоторые константы. Тогда имеет место неравенство

$$x(t) \leq c \cdot \left[1 - (m-1) \cdot c^{m-1} \cdot \int_a^t f(\tau) d\tau \right]^{1/(1-m)} \equiv \bar{x}(t) \quad \text{для всех } t \in [a; b]. \quad (3)$$

Сформулированная лемма и ее обобщения имеют многочисленные приложения. В частности, они оказываются весьма полезными при исследовании таких вопросов теории дифференциальных уравнений, как доказательство единственности и существования решений, отыскание явных поточечных оценок решения нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе в частных производных, управляемость начально-краевых задач, асимптотическая устойчивость и т.д. – см., например, [1], [7]–[12] (в теории асимптотической устойчивости используется вариант леммы 1, когда $b = +\infty$).

Для сравнения с результатами, полученными в данной статье, важно заметить, что $x = \bar{x}(t)$ является решением уравнения

$$x(t) = c + \int_a^t f(\tau) x^m(\tau) d\tau \equiv c + F[x](t) \quad \text{для всех } t \in [a; b]. \quad (4)$$

Действительно, уравнение (4) равносильно задаче Коши

$$\begin{cases} x'(t) = f(t)x^m(t), & t \in [a; b], \\ x(a) = c. \end{cases} \quad (5)$$

При этом непосредственным дифференцированием и подстановкой $t = a$ убеждаемся, что функция $x = \bar{x}(t)$ решает задачу (5):

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{c^m c^{1-m}}{1-m} \cdot \left[1 - (m-1)c^{m-1} \int_a^t f(\tau) d\tau \right]^{\{(1/(1-m))-1\}=m/(1-m)} \cdot (1-m)c^{m-1} f(t) \\ &= f(t)\bar{x}^m(t), \\ \bar{x}(a) &= c. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (2), которое является существенным отличием леммы Бихари от леммы Гронуолла и, очевидно, выполнено при $m = 1$, можно трактовать как условие существования решения уравнения (4). При его невыполнении в той или иной точке $t_0 \in (a; b)$ решение $\bar{x}$ (а оно всегда существует как локальное решение) уравнения (4) терпит разрыв типа бесконечного скачка в точке t_0 , и таким образом, уравнение (4) не имеет непрерывного (и вообще, ограниченного) решения на $[a; b]$. При этом само неравенство (3) переписывается в виде

$$x(t) \leq \bar{x}(t) \quad \text{для всех } t \in [a; b].$$

Именно такого сорта неравенство мы и доказываем в данной статье для исходного неравенства $x \leq F[x] + \varphi$ (ср. с неравенством (1)), $\varphi \in L_q(\Pi)$, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, и оператора F , действующего в лебеговом пространстве $L_q(\Pi)$ и определяемого формулой $F[x] = B[x^{q/p}] + G[x]$, где B, G – положительные линейные ограниченные операторы (ЛОО) произвольного вида. Применяемый метод доказательства позволяет рассмотреть и намного более общую ситуацию, но рассмотрение именно нелинейности указанного вида не случайно. Дело в том, что как показывает следующая лемма 2 (лемма о мажоранте), результаты, полученные для данной ситуации, позволяют доказывать различного рода теоремы сравнения для операторных уравнений в лебеговых пространствах достаточно широкого класса.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(t, x): \Pi \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $x \in \mathbb{R}^l$, причем для каждого $y(\cdot) \in L_q^l(\Pi)$ соответствующая суперпозиция $f(\cdot, y(\cdot)) \in L_\sigma(\Pi)$, где $1 \leq q, \sigma < \infty$. Тогда найдутся функция $a(\cdot) \in L_\sigma^+(\Pi)$ и число $b \geq 0$ такие, что

$$|f(t, x)| \leq a(t) + b \cdot |x|^{q/\sigma} \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad x \in \mathbb{R}^l.$$

Для случая $l = 1$ лемма 2 формулируется и доказывается в [13; лемма 5.17.6, с. 349]. Обоснование для общего случая см. в [6; лемма 3.1].

2. Формулировка основного результата. Далее везде будем предполагать, что $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ -алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π , P_H – оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_H(\cdot)$ множества $H \in \Sigma$ (будем обозначать его одинаково вне зависимости от того, в каком именно пространстве $L_p(\Pi)$, $p \in [1, \infty]$, он рассматривается).

Будем считать, кроме того, что числа $1 \leq p < q < \infty$ заданы,

$$\begin{aligned} L_p &= L_p(\Pi), & L_q &= L_q(\Pi), \\ L_q^+ &= L_q^+(\Pi) = \{x(\cdot) \in L_q(\Pi) : x(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in \Pi\}. \end{aligned}$$

В случае $x \in L_p$ норму $\|x\|_{L_p}$, если иное не оговорено, будем обозначать просто $\|x\|$. Пусть теперь $F: L_p \rightarrow L_q$ – некоторый оператор. Всякое множество $H \in \Sigma$ такое, что $P_H F P_H = P_H F$, будем, следуя [14], [15], называть *вольтерровым множеством* оператора F . Совокупность всех вольтерровых множеств оператора F будем обозначать $\mathcal{B}(F)$. По аналогии с [16], [17] примем следующие соглашения. Всякую конечную систему множеств $\{H_0, H_1, \dots, H_k\} \subset \mathcal{B}(F)$, обладающую свойством

$\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k = \Pi$, назовем *вольтерровой цепочкой* оператора F . В случае ЛОО $F: L_p \rightarrow L_q$ указанную вольтеррову цепочку будем называть *вольтерровой δ -цепочкой* этого оператора, если, кроме того,

$$\|P_h F P_h\|_{L_p \rightarrow L_q} < \delta \quad \text{для всех } h = H_i \setminus H_{i-1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Так, например, если $\Pi = [0, b_1] \times [0, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, а оператор F определяется формулой²

$$F[z](t) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} z(\xi) d\xi_2, \quad t = \{t_1, t_2\} \in \Pi, \quad z \in L_p(\Pi),$$

то в качестве вольтерровой δ -цепочки годится, например, система

$$\{H(\tau[i]) : 0 = \tau[0] < \dots < \tau[k] = b_1 + b_2\}$$

множеств вида $H(\tau) = \{t = \{t_1, t_2\} \in \Pi : t_1 + t_2 \leq \tau\}$ при условии, что мелкость разбиения $\lambda = \max_{i=1, \dots, k} |\tau[i] - \tau[i-1]|$ достаточно мала.

Известно (см. [18]), что в случае $p = q$ наличие для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ -цепочки у ЛОО F обеспечивает ему *квазинильпотентность*, т.е. равенство нулю спектрального радиуса. Здесь можно усмотреть прямое соответствие между формулируемой далее теоремой и абстрактными (линейными) обобщениями леммы Гронуолла (см., например, [19]). В [18], [20] приводятся, кроме того, простые достаточные условия наличия у ЛОО для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ -цепочки.

Рассмотрим уравнение

$$x = B[x^{q/p}] + G[x] + \varphi, \quad x \in L_q^+(\Pi), \quad (6)$$

где $B: L_p \rightarrow L_q$, $G: L_r \rightarrow L_q$ – положительные ЛОО, для любого $\delta > 0$ обладающие общей для них вольтерровой δ -цепочкой $\mathcal{T}$, числа p, q, r таковы, что $+\infty > q \geq \max\{p, r\}$, $p, r \in [1, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть уравнение (6) имеет решение $x = \bar{x} \in L_q^+$ при $\varphi = \bar{\varphi} \in L_q^+$. Тогда для любого $\varphi \in L_q^+$ такого, что $\varphi \leq \bar{\varphi}$, уравнение (6) также имеет, и притом единственное, решение $x_\varphi \leq \bar{x}$. Более того, для всякого $x \in L_q^+$, удовлетворяющего неравенству

$$x \leq B[x^{q/p}] + G[x] + \varphi,$$

справедлива оценка: $x \leq x_\varphi$.

Заметим, что уравнение вида

$$x = B[|x|^{q/p}] + G[|x|] + \varphi, \quad x \in L_q(\Pi),$$

заведомо имеет нулевое решение при $\varphi = 0$. Поэтому пользуясь теоремой устойчивости существования глобальных решений из [14], нетрудно показать, что это же уравнение заведомо имеет решение $x = \bar{x} \in L_q$ для всякого $\bar{\varphi} \in L_q$, достаточно малого по норме, и более того, справедлива равномерная оценка по норме: $\|\bar{x}\| \leq \gamma \|\bar{\varphi}\|$. Понятно, что в случае $\bar{\varphi} \geq 0$ решение $\bar{x} \geq 0$, и таким образом, сказанное справедливо также и для уравнения (6). Иными словами, требования теоремы 1 сформулированы корректно. Более того, в качестве следствия теоремы 1 получаем нелинейный аналог леммы Гронуолла, доказанный ранее (другим способом) в [6; теорема 2.1]:

²Это так называемый разрешающий оператор задачи Гурса–Дарбу.

ЛЕММА 3. *Существуют числа $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ такие, что для всех $x, \varphi \in L_q^+$, $\|\varphi\| \leq \varepsilon$, удовлетворяющих неравенству*

$$x \leq B[x^{q/p}] + G[x] + \varphi,$$

справедлива оценка: $x \leq S^{-1}[\varphi]$, где $S: L_q \rightarrow L_q$ – оператор, определяемый формулой $S[x] = x - B[x^{q/p}] - G[x]$, причем $\|S^{-1}[\varphi]\| \leq \gamma \cdot \|\varphi\|$.

3. Доказательство основного результата. Сначала приведем два вспомогательных утверждения, которые касаются свойств нелинейного уравнения вида

$$y = B[b(y)] + G[g(y)] + \varphi, \quad y \in L_q(\Pi), \quad (7)$$

где $B: L_p \rightarrow L_q$, $G: L_r \rightarrow L_q$ – положительные ЛОО, для любого $\delta > 0$ обладающие общей для них вольтерровой δ -цепочкой $\mathcal{T}$, $+\infty > q \geq \max\{p, r\}$, $p, r \in [1, +\infty)$; $b(y)$, $g(y)$ – дифференцируемые функции такие, что (сформулируем условия на функцию $b(\cdot)$; условия на функцию $g(\cdot)$ получаются из них формальной заменой $b \rightarrow g$, $p \rightarrow r$):

- 1) $b(x) \in L_p^+$ для всех $x \in L_q^+$; $b(0) = 0$;
- 2) $b'(x) \in L_\sigma^+$, где $\sigma = pq/(q-p)$, если $q > p$, или $\sigma = +\infty$, если $q = p$;
- 3) существует неубывающая функция $\mathcal{N}_b: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\|b'(x)\|_{L_\sigma} \leq \mathcal{N}_b(\|x\|)$ для всех $x \in L_q^+$.

В частности, для функции $b(x) = x^{q/p}$ при условии, что $q > p$, можем взять $\mathcal{N}_b(t) = (q/p)t^{(q-p)/p}$, $t \geq 0$. Если же $q = p$, то $\mathcal{N}_b(x) \equiv 1$.

Пусть $\varphi \in L_q$. Определим операторы $F: L_q^+ \rightarrow L_q^+$ и $F_\varphi: L_q^+ \rightarrow L_q$ формулами

$$F[y] = B[b(y)] + G[g(y)], \quad F_\varphi[y] = F[y] + \varphi.$$

Пусть H_1, H_2 – два соседних множества вольтерровой δ -цепочки $\mathcal{T}$, $H_1 \subset H_2$, $h = H_2 \setminus H_1$. Для любых $x, z_1, z_2 \in L_q^+$ рассмотрим норму

$$\gamma_F(H_1, H_2)[x, z_1, z_2] = \|P_h(F_\varphi[P_{H_1}x + P_h z_1] - F_\varphi[P_{H_1}x + P_h z_2])\|.$$

Пользуясь леммой Адамара³ и неравенством Гельдера вместе с определением вольтерровой δ -цепочки и условием 3), нетрудно получить следующую оценку:

$$\gamma_F(H_1, H_2)[x, z_1, z_2] \leq \delta \cdot \sup_{\theta \in [0;1]} \mathcal{N}(\|P_{H_1}x + P_h z_1 + \theta P_h \Delta z\|) \|P_h \Delta z\|, \quad (*)$$

где $\mathcal{N} = 2(\mathcal{N}_b + \mathcal{N}_g)$, $\Delta z = z_2 - z_1$. Оценку (*) далее мы будем неоднократно использовать. Действуя совершенно аналогично, нетрудно получить еще две важных оценки:

$$\|b(x)\|_{L_p} \leq \mathcal{N}_b(\|x\|) \cdot \|x\|, \quad \|g(x)\|_{L_r} \leq \mathcal{N}_g(\|x\|) \cdot \|x\| \quad \text{для всех } x \in L_q^+. \quad (**)$$

ЛЕММА 4 [6; лемма 4.1]. *Ни при каком $\varphi(\cdot) \in L_q$ уравнение (7) не может иметь более одного решения в $L_q^+(\Pi)$.*

³Иногда ее называют теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме.

Для $\varphi \in L_q$ определим множество

$$M_\varphi = \{y \in L_q^+ : y \leq F_\varphi[y]\}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $B: L_p \rightarrow L_q$, $G: L_r \rightarrow L_q$ – положительные линейные ограниченные операторы, для всякого $\delta > 0$ обладающие общей для них вольтерровой δ -цепочкой. Пусть, кроме того, уравнение (7) имеет решение $y = \bar{y} \in L_q^+$ при $\varphi = \bar{\varphi} \in L_q^+$. Тогда для всех $y \in M_{\bar{\varphi}}$ имеем: $y \leq \bar{y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем любой элемент $y_0 \in M_{\bar{\varphi}}$, а также число $R = \max\{\|y_0\|, \|\bar{y}\|\}$. Найдем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$2\delta\mathcal{N}(4R) \leq 1.$$

Согласно условию операторы B и G обладают общей для них вольтерровой δ -цепочкой $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \dots, H_k\}$. Обозначим $P_i = P_{H_i}$ – оператор умножения на характеристическую функцию χ_{H_i} множества H_i , $i = 0, \dots, k$; $P_{(i)} = P_i - P_{i-1}$ – оператор умножения на характеристическую функцию χ_{h_i} множества $h_i = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$. Докажем наше утверждение по индукции как последовательность неравенств, $i = 1, \dots, k$:

$$P_{(i)}y_0 \leq P_{(i)}\bar{y}. \quad (\mathcal{N}_i)$$

Тогда из совокупности всех этих неравенств будет следовать, что

$$y_0 = \sum_{i=1}^k P_{(i)}y_0 \leq \sum_{i=1}^k P_{(i)}\bar{y} = \bar{y}.$$

1. Докажем неравенство $(\mathcal{N}_1)$. Рассмотрим уравнение

$$y = P_1 F_{\bar{\varphi}} P_1[y], \quad y \in P_1 L_q^+ = \{y \in L_q^+ : y = P_1 y\}. \quad (E_1)$$

Согласно условию теоремы и учитывая вольтерровость множества H_1 по отношению к оператору $F_{\bar{\varphi}}$ ($P_1 F_{\bar{\varphi}} P_1 = P_1 F_{\bar{\varphi}}$) это уравнение имеет решение $y = P_1 \bar{y}$. Мы хотим далее показать, что это решение представляется в виде

$$P_1 \bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_1 F_{\bar{\varphi}})^n [P_1 y_0].$$

Воспользуемся для этого принципом сжимающих отображений. Определим множество

$$Y = \{y \in P_1 L_q^+ : \|P_1(y - \bar{y})\| \leq 2R, P_1 y \leq P_1 F_{\bar{\varphi}}[y]\}.$$

Заметим, что $P_1 y_0, P_1 \bar{y} \in Y$, и таким образом, множество $Y \neq \emptyset$.

а) Зафиксируем любое $y \in Y$ и покажем, что $P_1 F_{\bar{\varphi}}[y] \in Y$. Заметим, во-первых, что в силу неравенства (*) и выбора δ

$$\begin{aligned} \|P_1(F_{\bar{\varphi}}[y] - \bar{y})\| &= \|P_1(F_{\bar{\varphi}} P_1[y] - F_{\bar{\varphi}} P_1[\bar{y}])\| \\ &\leq \delta \mathcal{N}(\|\bar{y}\| + \|P_1(y - \bar{y})\|) \cdot \|P_1(y - \bar{y})\| \leq \delta \cdot \mathcal{N}(3R) \cdot 2R \leq 2R. \end{aligned}$$

При этом в силу монотонности оператора $F_{\bar{\varphi}}$, а следовательно, и оператора $P_1 F_{\bar{\varphi}}$ имеем

$$P_1 F_{\bar{\varphi}}[y] = P_1 F_{\bar{\varphi}} P_1[y] \leq P_1 F_{\bar{\varphi}} P_1 F_{\bar{\varphi}}[y] = P_1 F_{\bar{\varphi}}[P_1 F_{\bar{\varphi}}[y]].$$

Таким образом, $P_1 F_{\bar{\varphi}}: Y \rightarrow Y$.

б) Проверим, что оператор $P_1 F_{\bar{\varphi}}$ является сжимающим на множестве Y . Действительно, для любых $y_1, y_2 \in Y$ в силу неравенства (*) имеем

$$\begin{aligned} \|P_1(F_{\bar{\varphi}}[y_1] - F_{\bar{\varphi}}[y_2])\| &\leq \delta \mathcal{N}(\max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}) \cdot \|P_1(y_1 - y_2)\| \\ &\leq \delta \cdot \mathcal{N}(4R) \cdot \|P_1(y_1 - y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|P_1(y_1 - y_2)\|. \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с принципом сжимающих отображений уравнение (E_1) разрешимо единственным образом на множестве Y , и более того, соответствующее решение $y = y_*$ можно найти как предел $y_* = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_1 F_{\bar{\varphi}})^n[\tilde{y}]$ для любого начального приближения $\tilde{y} \in Y$. В частности,

$$y_* = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_1 F_{\bar{\varphi}})^n[P_1 y_0].$$

Однако $P_1 \bar{y}$ тоже является решением этого уравнения, и стало быть, в силу единственности решения

$$P_1 \bar{y} = y_* = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_1 F_{\bar{\varphi}})^n[P_1 y_0].$$

Тогда в силу монотонности оператора $P_1 F_{\bar{\varphi}}$ и выбора $y_0 \in M_{\bar{\varphi}}$, а также вольтерровости множества H_1 имеем

$$P_1 y_0 \leq P_1 F_{\bar{\varphi}}[y_0] = P_1 F_{\bar{\varphi}}[P_1 y_0] \leq (P_1 F_{\bar{\varphi}})^2[P_1 y_0] \leq \dots \leq (P_1 F_{\bar{\varphi}})^n[P_1 y_0] \leq \dots \leq P_1 \bar{y},$$

т.е. выполняется неравенство ($\mathcal{N}_1$).

2. Действуя по индукции, предположим, что неравенства ($\mathcal{N}_i$) для $i = 1, \dots, m$ уже доказаны и, таким образом,

$$P_m y_0 = \sum_{i=1}^m P_{(i)} y_0 \leq \sum_{i=1}^m P_{(i)} \bar{y} = P_m \bar{y}.$$

Докажем, что выполняется также и неравенство ($\mathcal{N}_{m+1}$). Рассмотрим уравнение

$$y = P_{(m+1)} F P_{(m+1)}[y] + \varphi_{m+1}, \quad y \in P_{(m+1)} L_q^+, \quad (E_{m+1})$$

где приняты обозначения

$$F[y] = B[b(y)] + G[g(y)], \quad \varphi_{m+1} = P_{(m+1)} F P_m[\bar{y}] + P_{(m+1)} \bar{\varphi}.$$

Отметим, что таким способом определенный оператор F обладает свойством

$$F P_{m+1} = F(P_m + P_{(m+1)}) = F P_m + F P_{(m+1)},$$

хотя и не является линейным. Пользуясь этим свойством, покажем, что y_0 удовлетворяет неравенству

$$P_{(m+1)} y_0 \leq P_{(m+1)} F P_{(m+1)}[y_0] + \varphi_{m+1}. \quad (8)$$

Действительно, согласно выбору y_0 и вольтерровости множеств H_m и H_{m+1} по отношению к оператору F , а также по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} P_{m+1}y_0 &\leq P_{m+1}F_{\bar{\varphi}}[y_0] = P_{m+1}FP_{m+1}[y_0] + P_{m+1}\bar{\varphi} \\ &= P_{m+1}FP_{(m+1)}[y_0] + P_{m+1}FP_m[y_0] + P_{m+1}\bar{\varphi} \\ &\leq P_{m+1}FP_{(m+1)}[y_0] + P_{m+1}FP_m[\bar{y}] + P_{m+1}\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Действуя на это неравенство оператором $P_{(m+1)}$, получаем (8). Неравенство (8) в совокупности с тем очевидным обстоятельством, что $P_{(m+1)}\bar{y}$ является решением уравнения (E_{m+1}) , а также неравенством $(*)$, позволяет нам повторить рассуждения п. 1, заменив в них оператор $P_1F_{\bar{\varphi}}$ оператором $P_{(m+1)}FP_{(m+1)}[\cdot] + \varphi_{m+1}$. Исходя из этого, получаем оценку $(\mathcal{N}_{m+1})$.

3. По индукции делаем вывод, что все неравенства $(\mathcal{N}_i)$ для $i = 1, \dots, k$ выполняются, а следовательно, $y_0 \leq \bar{y}$. Лемма доказана.

Обозначим $S(\Pi)$ – множество всех функций, измеримых на множестве Π . Следующее утверждение доказано в [21; теорема I.6.17 и ее следствие 1, с. 68].

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{N}$ – непустое и ограниченное сверху подмножество в $S(\Pi)$. Тогда существует $x_0 = \sup \mathcal{N} \in S(\Pi)$. Если множество $\mathcal{N}$ ограничено также и снизу, то существует $x_1 = \inf \mathcal{N} \in S(\Pi)$.

Доказательство следующего утверждения основано на идее доказательства теоремы А. Тарского о неподвижной точке [22; теорема V.3.11, с. 154].

ЛЕММА 7. Пусть $\varphi \in L_q^+$, а множество M_φ ограничено сверху функцией $\bar{y} \in L_q^+$. Тогда существует $y_* = \sup M_\varphi \in [0; \bar{y}] \subset L_q^+$. При этом y_* является решением уравнения (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $0 \leq \varphi = F_\varphi(0)$, т.е. $0 \in M_\varphi$, и, следовательно, множество $M_\varphi \neq \emptyset$. Обозначим $y_* = \sup M_\varphi$. По лемме 6 $y_* \in S(\Pi)$, и по условию, $0 \leq y_* \leq \bar{y} \in L_q^+$. Тогда в силу идеальности пространства L_q имеем: $y_* \in L_q^+$.

Очевидно, что $y \leq y_*$ для всех $y \in M_\varphi$, и в силу монотонности оператора F_φ и по определению множества M_φ получаем

$$y \leq F_\varphi[y] \leq F_\varphi[y_*] \quad \text{для всех } y \in M_\varphi,$$

а в таком случае

$$y_* = \sup M_\varphi \leq F_\varphi[y_*] \implies y_* \in M_\varphi,$$

и в силу монотонности оператора F_φ

$$F_\varphi[y_*] \leq F_\varphi[F_\varphi[y_*]] \implies F_\varphi[y_*] \in M_\varphi \implies F_\varphi[y_*] \leq \sup M_\varphi = y_*.$$

Таким образом, $y_* \leq F_\varphi[y_*] \leq y_*$, откуда $y_* = F_\varphi[y_*]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 следует непосредственно из лемм 4, 5 и 7. Нужно только заметить, что множество

$$M_\varphi = \{x \in L_q^+ : x \leq B[x^{q/p}] + G[x] + \varphi\}$$

содержится в множестве $M_{\bar{\varphi}}$ для всех $\varphi \in L_q^+ : \varphi \leq \bar{\varphi}$, причем по лемме 5 $M_{\bar{\varphi}}$ ограничено сверху функцией $\bar{x}$.

4. О проблеме оценки решений уравнений с частными производными.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Различные аспекты этой теории, в частности, вопросы существования глобальных решений, разрушения решений, непрерывной зависимости решений от начальных данных и правой части, устойчивости по первому приближению и т.д., отражены, например, в [23] (там же см. библиографию). Что касается известных автору оценок решений, их естественно разбить на следующие три категории.

1) Оценки *приращения решения* управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) (при изменении входящих в постановку задачи управляющих функций) *по норме* подходящего банахова пространства – см., например, [14], [16], [24]–[26] (там же см. дальнейшую библиографию). Оценки указанного типа оказываются востребованными при обосновании сходимости численных методов оптимизации – см., например, [16], при выводе необходимых условий оптимальности – см., например, [27], [28], а также при исследовании особых управлений – см., например, [29].

2) Поточечные (по всем независимым переменным) оценки самих решений как таковых снизу и (или) сверху. Ввиду обширности литературы по этой тематике приведем лишь имена некоторых авторов. *Гиперболические уравнения*: I. Kubiacyzk, M. Cichon, M. Dawidowski, A. Belarbi, M. Benchohra, Н. И. Погодаев; см. также [11]; *параболические и обобщенно параболические*: А. К. Гуцин, А. В. Лежнев, В. И. Ушаков, Ф. Х. Мукминов, Л. М. Кожевникова, Г. А. Рудых, А. В. Сеницын, Л. И. Камынин, В. И. Налимов; *эллиптические уравнения*: М. А. Красносельский, Е. Б. Дынкин (Е. В. Dynkin), С. Е. Кузнецов (S. E. Kuznetsov), J.-F. Le Gall, M. Marcus, L. Véron. В работах перечисленных авторов соответствующие оценки носили зачастую вспомогательный характер и использовались при исследовании таких вопросов, как асимптотическое поведение решений, устойчивость (в том или ином смысле) и т.п.

3) Прочие оценки, а именно: поточечные по части переменных, в частности, по времени; оценки решений или их следов по норме; оценки различных интегральных выражений, содержащих решения и т.д. и т.п. Поскольку оценки такого типа не имеют непосредственного отношения к данной статье, приведем лишь (разумеется, далеко не полный) список авторов: В. И. Юдович, Ю. А. Дубинский, С. И. Похожаев, И. В. Скрыпник, М. И. Вишик, А. Е. Мамонтов, Ф. Бенилан, В. Л. Камынин, N. Trudinger, J. G. Morris, R. Adams, A. Kufner, G. Talenti и т.д.

В данной статье развивается предложенная в [6] методика получения поточечных (по всем независимым переменным) оценок приращения решения управляемых НКЗ. Таким образом, речь идет об оценках, сочетающих в себе свойства 1) и 2), и более тонких по сравнению с 1).

Основная идея этой методики состоит в сведении управляемой НКЗ к функционально-операторному уравнению вида

$$y(t) = w(t) + A[g(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))](t), \quad t \in \Pi, \quad y(\cdot) \in L_q^l(\Pi), \quad (9)$$

и последующем применении соответствующих абстрактных результатов (см. ниже п. 5) для этого уравнения. Здесь $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу ограниченное множество, $w(\cdot) \in L_q^l(\Pi)$; $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ – управляющая функция (управление), $\mathcal{D} \subset L_r^s(\Pi)$ – ограниченное множество, $A: L_p^m(\Pi) \rightarrow L_q^l(\Pi)$ – ЛОО, числа $n, m, l, s \in \mathbb{N}$,

$1 \leq p < q < +\infty$ заданы; функция $g(\cdot, \cdot, \cdot): \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ – заданная функция, удовлетворяющая следующим условиям типа Каратеодори:

- а) $g(t, x, w)$ непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^l$ для почти всех (п.в.) $t \in \Pi$, при каждом $w \in \mathbb{R}^s$ и вместе с производной $g'_x(t, x, w): \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{m \times l}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x, w\} \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$ для п.в. $t \in \Pi$;
- б) для каждого $u(\cdot) \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathbf{G}_u[y] = g(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$ определяет оператор $\mathbf{G}_u: L_q^l(\Pi) \rightarrow L_p^m(\Pi)$;
- в) для каждого $u \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathcal{G}_u[y] = g'_x(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$ определяет оператор $\mathcal{G}_u: L_q^l(\Pi) \rightarrow L_{\sigma}^{m \times l}(\Pi)$, $1/q + 1/\sigma = 1/p$.

К уравнению (9) естественным образом (с помощью обращения главной части дифференциального уравнения) может быть сведен довольно широкий класс управляемых начально-краевых задач.

Для пояснения сказанного рассмотрим следующий пример, ставший уже классическим для теории оптимизации распределенных систем, а именно, управляемую задачу Гурса–Дарбу:

$$\begin{aligned} x''_{t_1 t_2}(t) &= g(t, x(t), u(t)), & t &= (t_1, t_2) \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2], \\ x(t_1, 0) &= \omega_1(t_1), & t_1 &\in [0, T_1], \\ x(0, t_2) &= \omega_2(t_2), & t_2 &\in [0, T_2], \\ \omega_1(0) &= \omega_2(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Будем считать, что функции ω_1 и ω_2 абсолютно-непрерывны, а функция g удовлетворяет указанным выше условиям типа Каратеодори при $\ell = 1$, $m = 1$, $1 \leq p < q \leq +\infty$, $r \in [1, \infty]$. Решение задачи (10) будем понимать в смысле п.в. и искать его среди функций из $L_q(\Pi)$, имеющих смешанную производную в классе $L_p(\Pi)$. Тогда можно понимать его как решение уравнения

$$x(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0) + \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} g(\xi, x(\xi), u(\xi)) d\xi_2.$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$x(t) = w(t) + A[g(\cdot, x, u)](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in L_q(\Pi), \quad (11)$$

где $w(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0)$, $w \in L_q(\Pi)$, $A: L_p(\Pi) \rightarrow L_q(\Pi)$ – оператор, определяемый формулой

$$A[z](t_1, t_2) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_2.$$

Как уже было показано в п. 2, этот оператор обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ -цепочкой и, очевидно, является положительным. Уравнение (11) имеет вид (9) и удовлетворяет всем предположениям. Из этого примера видно, что для их проверки достаточно установить лишь некоторые свойства оператора A – разрешающего оператора НКЗ, обращающего главную часть дифференциального уравнения (или системы уравнений) и отражающие по сути дела характер зависимости решения соответствующего линейного дифференциального уравнения от правой части при нулевых начально-краевых условиях.

Что касается других примеров сведения управляемых НКЗ к уравнению (9), см. [6], [14]. Кроме того, отметим, что уравнение (9) в указанном далее смысле родственно (точнее говоря, двойственно) функционально-операторному уравнению следующего вида [16]:

$$z(t) = g(t, A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi \subset \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

где $A: L_p^m(\Pi) \rightarrow L_q^\ell(\Pi)$ – ЛОО, $g: \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ – заданная функция, $u \in L_\kappa^s(\Pi)$ – управляющая функция. Уравнение (12) с помощью очевидной замены $y = A[z]$ сводится к уравнению (9). И наоборот, уравнение (9) в случае $\theta = 0$ (к этому случаю его можно привести заменой $y - \theta = \tilde{y}$) с помощью замены $z = f(\cdot, y, u)$ сводится к уравнению (12). Таким образом, при условии единственности решения задачи, которые записываются в виде уравнения (12), могут быть записаны и в виде (9), и наоборот. Это обстоятельство важно иметь в виду, поскольку в [16], [24] приводятся многочисленные примеры сведения распределенных систем к уравнению (12). Нам далее оказывается более удобным использовать уравнение (9).

Далее относительно ЛОО A будем предполагать, что он обладает положительной мажорантой $B: L_p(\Pi) \rightarrow L_q(\Pi)$, у которой для любого $\delta > 0$ существует вольтеррова δ -цепочка.

5. Приложение к оценке разности решений функционально-операторного уравнения.

ЛЕММА 8 [6; лемма 3.4]. Пусть функция $f(t, x, v): \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x, v\} \in \mathbb{R}^{l+s}$, причем для всех $y(\cdot) \in L_q^l(\Pi)$, $u(\cdot) \in L_r^s(\Pi)$ имеем $f(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \in L_\sigma(\Pi)$, где $1 \leq q, r, \sigma < \infty$. Тогда существуют функции $a(\cdot) \in L_\sigma^+(\Pi)$ и число $b \geq 0$ такие, что

$$|f(t, x, v)| \leq a(t) + b \cdot |x|^{q/\sigma} + b \cdot |v|^{r/\sigma} \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^s.$$

Пусть $V(\cdot) \in L_r(\Pi)$, $v(\cdot) \in L_r^s(\Pi)$ – некоторые фиксированные функции, причем для $u = v$ существует решение $y = y_v$ уравнения (9); $\mathcal{V}$ – заданное подсемейство семейства функций

$$\{u(\cdot) \in L_r^s(\Pi) : |u(t)| \leq V(t) \text{ для п.в. } t \in \Pi\}.$$

Применяя лемму 8 к функции $f(t, x, z) = |g'_x(\cdot, y_v + x, z)|$, получаем, что существуют $a(\cdot) \in L_\sigma^+(\Pi)$ и $b \geq 0$ такие, что для любых $\Delta y \in L_q^l(\Pi)$, $u \in \mathcal{V}$

$$|g'_x(\cdot, y_v + \Delta y, u)| \leq a(\cdot) + b(|\Delta y|^{q/\sigma} + |u|^{r/\sigma}) \leq a_0(\cdot) + b \cdot |\Delta y|^{q/\sigma},$$

где $a_0 = a + b|V|^{r/\sigma} \in L_\sigma(\Pi)$. Впрочем, во многих случаях параметры $a_0(\cdot)$ и b можно указать и непосредственно. Положим для краткости

$$\Delta_u g(y_v) = g(\cdot, y_v(\cdot), u(\cdot)) - g(\cdot, y_v(\cdot), v(\cdot)), \quad u(\cdot) \in L_r^s(\Pi),$$

и выберем функцию $\bar{\varphi} \in L_q^+(\Pi)$ так, чтобы

$$\sup_{u \in \mathcal{V}} B[|\Delta_u g(y_v)|] \leq \bar{\varphi}.$$

В качестве такой функции годится, например,

$$\overline{\varphi}(t) = B \left[\max_{w \in \mathbb{R}^s: |w| \leq V(\cdot)} |g(\cdot, y_v(\cdot), w) - g(\cdot, y_v(\cdot), v(\cdot))| \right] (t).$$

Следующее уравнение естественно назвать *мажорантным* по отношению к исходному:

$$x = bB[x^{q/p}] + B[a_0(\cdot)x] + \overline{\varphi}, \quad x \in L_q^+. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть мажорантное уравнение (13) имеет решение $\overline{x}$. Тогда для любого решения уравнения (9) $y = y_u$, отвечающего некоторому $u \in \mathcal{V}$, имеет место поточечная оценка

$$|\Delta y(t)| = |y_u(t) - y_v(t)| \leq \overline{x}(t) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующая оценка очевидна:

$$|\Delta y| \leq B[|g(\cdot, y_u, u) - g(\cdot, y_v, u)|] + B[|\Delta_u g(y_v)|].$$

Используя далее лемму Адамара, получаем

$$|\Delta y| \leq B \left[\int_0^1 |g'_x(\cdot, y_v + \theta \Delta y, u)| d\theta |\Delta y| \right] + B[|\Delta_u g(y_v)|].$$

При этом в силу выбора параметров $a_0(\cdot)$ и b имеем

$$|g'_x(\cdot, y_v + \theta \Delta y, u)| \leq a_0(\cdot) + b \cdot |\Delta y|^{q/\sigma}.$$

Поскольку $(q/\sigma) + 1 = q/p$, получаем оценку

$$|\Delta y| \leq bB[|\Delta y|^{q/p}] + B[a_0(\cdot)|\Delta y|] + B[|\Delta_u g(y_v)|].$$

Остается применить теорему 1. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Bihari, "A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**:1 (1956), 81–94.
- [2] Н. В. Азбелев, "О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах", *Матем. сб.*, **39**:2 (1956), 161–178.
- [3] Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, "Об интегральных неравенствах. I", *Матем. сб.*, **56**:3 (1962), 325–342.
- [4] Н. С. Курпель, Б. А. Шувар, *Двусторонние операторные неравенства и их применения*, Наукова думка, Киев, 1980.
- [5] Е. С. Жуковский, "Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах", *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 3–18.
- [6] А. В. Чернов, "О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах", *Матем. заметки*, **88**:2 (2010), 288–302.
- [7] M. Aassila, "Global existence and energy decay for a damped quasilinear wave equation", *Math. Methods Appl. Sci.*, **21**:13 (1998), 1185–1194.
- [8] R. Ikehata, N. Okazawa, "Yosida approximation and nonlinear hyperbolic equations", *Nonlinear Anal.*, **15**:5 (1990), 479–495.

- [9] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, RAM Res. Appl. Math., **36**, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [10] D. Bařnov, P. Simeonov, *Integral Inequalities and Applications*, Math. Appl. (East European Ser.), **57**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [11] S. S. Dragomir, Y.-H. Kim, "Some integral inequalities for functions of two variables", *Electron. J. Differential Equations*, 2003, Paper No. 10, 13 pp.
- [12] В. Д. Ногин, *Теория устойчивости движения*, СПбГУ, СПб, 2008.
- [13] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [14] В. И. Сумин, А. В. Чернов, "О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений", *Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Матем. модел. и оптим. упр.*, **26**:1 (2003), 39–49.
- [15] В. И. Сумин, А. В. Чернов, *Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений*, Деп. в ВИНТИ 25.04.00, № 1198-В00, Нижегородск. ун-т, Н. Новгород, 2000.
- [16] В. И. Сумин, "Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **30**:1 (1990), 3–21.
- [17] В. И. Сумин, "Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах", *Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Матем. модел. и оптим. упр.*, **19**:2 (1998), 138–151.
- [18] В. И. Сумин, А. В. Чернов, "Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность", *Дифференц. уравнения*, **34**:10 (1998), 1402–1411.
- [19] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [20] А. В. Чернов, "О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений", *Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского*, 2009, № 3, 130–137.
- [21] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [22] Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Наука, М., 1984.
- [23] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных*, Научный мир, М., 2008.
- [24] В. И. Сумин, *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*, Часть I, ННГУ, Н. Новгород, 1992.
- [25] А. В. Аргучинцев, О. А. Крутикова, "Оптимизация полудлинейных гиперболических систем с гладкими граничными управлениями", *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 2, 3–12.
- [26] А. А. Злотник, "Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных", *Матем. заметки*, **75**:2 (2004), 307–310.
- [27] С. Ф. Морозов, В. И. Сумин, "Оптимизация нелинейных процессов переноса", *Докл. АН СССР*, **247**:4 (1979), 794–798.
- [28] В. И. Плотников, В. И. Сумин, "Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве", *Сиб. матем. журн.*, **22**:6 (1981), 142–161.
- [29] В. И. Сумин, "Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации", *Докл. АН СССР*, **320**:2 (1991), 295–299.

А. В. Чернов

Институт радиоэлектроники
и информационных технологий,
Нижегородский государственный
технический университет
E-mail: chavnn@mail.ru

Поступило

09.10.2010