Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Голубцов, Пример кусочно-линейного эргодического полиморфизма, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 323–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:20:56

Пример кусочно-линейного эргодического полиморфизма

П. Е. Голубцов

В настоящей работе рассматриваются динамические системы, введенные А. М. Вершиком, – полиморфизмы. К таким системам относится, в частности, класс многозначных отображений отрезка на себя, имеющих инвариантную меру. Полиморфизмы возникают в различных разделах математики и механики, например, в задаче о разрушении адиабатического инварианта. Нас будут интересовать эргодические свойства полиморфизмов. Первый раздел статьи посвящен основным понятиям. В разделах 2 и 3 рассматривается пример трехпараметрического семейства эргодических полиморфизмов, образованных кусочно-линейными отображениями.

Библиография: 3 названия.

1. Основные понятия. Пусть отрезок $[0, 1]$ представлен в виде объединения:

$$[0, 1] = \bigcup_{j=1}^J I_j, \quad I_j = [a_j, b_j].$$

Для каждого j зададим функции

$$\varphi_j: I_j \rightarrow [0, 1], \quad p_j: I_j \rightarrow [0, 1].$$

Мы предполагаем, что функции φ_j и p_j кусочно-гладкие внутри интервала I_j , $j = 1, \dots, J$. Пусть

$$V(x) = \{j : x \in I_j\}, \quad U(x) = \{j : x \in \varphi_j(I_j)\},$$

и выполнены условия: $\sum_{j \in V(x)} p_j(x) = 1$ для всех $x \in [0, 1]$; каждая функция φ_j строго монотонна на I_j и, следовательно, существуют обратные функции $\psi_j = \varphi_j^{-1}$; мера Лебега инвариантна в следующем смысле: имеет место равенство $W_T 1 = 1$, где $W_T: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ – оператор следующего вида:

$$W_T \rho(x) = \sum_{j \in U(x)} p_j \circ \psi_j(x) |\psi_j'(x)| \rho \circ \psi_j(x).$$

Тогда $T := (\{\varphi_j\}; \{p_j\}; \{I_j\})$ называют *полиморфизмом* [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полиморфизм T называют *эргодическим*, если для функций $\rho \in L_2[0, 1]$ из равенства $W_T \rho = \rho$ следует $\rho = \text{const}$ почти всюду.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00681-а).

2. Семейство полиморфизмов $T(a, b, c)$. Рассмотрим следующее семейство полиморфизмов. Пусть $I_1 = I_2 = [0, 1]$, $0 < b < a < c < 1$ и

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x \frac{a}{b}, & \text{если } x \in [0, b], \\ 1 - (1-x) \frac{1-a}{1-b}, & \text{если } x \in [b, 1]. \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x \frac{a}{c}, & \text{если } x \in [0, c], \\ 1 - (1-x) \frac{1-a}{1-c}, & \text{если } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

Рис. 1. Полиморфизм $T(a, b, c)$

Обозначим $T(a, b, c) = (\varphi_1, \varphi_2; p, 1-p; I_1, I_2)$, где постоянная $p \in [0, 1]$ определяется из условия инвариантности меры Лебега. Вычислим обратные к φ_1, φ_2 функции:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} x \frac{b}{a}, & \text{если } x \in [0, a], \\ 1 - (1-x) \frac{1-b}{1-a}, & \text{если } x \in [a, 1], \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} x \frac{c}{a}, & \text{если } x \in [0, a], \\ 1 - (1-x) \frac{1-c}{1-a}, & \text{если } x \in [a, 1]. \end{cases}$$

Пусть $\rho \in L_2[0, 1]$. Тогда

$$W_T \rho(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} p \rho \circ \psi_1(x) + \frac{c}{a} (1-p) \rho \circ \psi_2(x), & \text{если } x \in [0, a], \\ \frac{(1-b)}{(1-a)} p \rho \circ \psi_1(x) + \frac{(1-c)}{(1-a)} (1-p) \rho \circ \psi_2(x), & \text{если } x \in [a, 1]. \end{cases}$$

Отсюда следует, что условие $W_T 1 = 1$ выполняется при $p = (c-a)/(c-b)$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Полиморфизм $T(a, b, c)$ эргодический при любых $0 < b < a < c < 1$.*

3. Доказательство свойства эргодичности. Для доказательства мы воспользуемся следующим утверждением, доказанным в статье [3].

Для произвольного полиморфизма $T = (\{\varphi_j\}; \{p_j\}; \{I_j\})$ положим

$$q_j(x) := p_j \circ \psi_j(x) |\psi_j'(x)|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что $q_j, j = 1, \dots, J$, почти всюду отличны от 0. Тогда*

- (а) *из равенства $\|W_T \rho\| = \|\rho\|$ следует, что $\rho \circ \psi_j$ не зависит от j ,*
- (б) *из равенства $W_T \rho = \rho$ следует, что для всех j*

$$\rho \circ \psi_j = \rho, \quad \rho \circ \varphi_j = \rho. \quad (1)$$

Из данного предложения следует, что, если $W_T \rho = \rho$, то функция ρ инвариантна относительно φ_j и $\psi_j, j = 1, \dots, J$. Далее везде под T подразумевается $T(a, b, c)$.

ЛЕММА 1. *Пусть $W_T \rho = \rho$,*

$$g_1: [0, c] \rightarrow [0, b], \quad g_2: [b, 1] \rightarrow [c, 1], \quad h_1: [b, v] \rightarrow [b, u], \quad h_2: [u, c] \rightarrow [v, c],$$

где $u = bc/a, v = 1 - (1 - b)(1 - c)/(1 - a)$, $u, g_i, h_i, i = 1, 2$, суть гомотетии. Тогда

$$\rho \circ g_1(x) = \rho(x), \quad \text{если } x \in [0, c], \quad (2)$$

$$\rho \circ g_2(x) = \rho(x), \quad \text{если } x \in [b, 1], \quad (3)$$

$$\rho \circ h_1(x) = \rho(x), \quad \text{если } x \in [b, v], \quad (4)$$

$$\rho \circ h_2(x) = \rho(x), \quad \text{если } x \in [u, c]. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $b < u < v < c$, так как $v - u = (a - b)(c - a)/(a(1 - a))$.

Рис. 2. Взаимное расположение точек

Рассмотрим некоторые тождества, которые следуют из приведенного выше предложения.

При $x \in [0, c]$: $\rho(x) = \rho \circ \psi_1 \circ \varphi_2(x)$. Проследим, как меняется отрезок $[0, c]$ под действием преобразования $\psi_1 \circ \varphi_2$:

$$[0, c] \xrightarrow{\varphi_2} [0, a] \xrightarrow{\psi_1} [0, b].$$

Преобразования ψ_1 и φ_2 линейные, поэтому

$$\rho \circ g_1(x) = \rho(x), \quad \text{где } g_1(x) = \psi_1 \circ \varphi_2|_{[0, c]}(x) = \frac{xb}{c}.$$

Аналогично действуем для проверки (3): $\rho(x) = \rho \circ \psi_2 \circ \varphi_1(x)$,

$$[b, 1] \xrightarrow{\varphi_1} [a, 1] \xrightarrow{\psi_2} [c, 1].$$

Следовательно,

$$\rho \circ g_2(x) = \rho(x), \quad \text{где} \quad g_2(x) = \psi_2 \circ \varphi_1|_{[b,1]}(x) = 1 - \frac{(1-x)(1-c)}{1-b}.$$

При $x \in [b, v]$: $\rho(x) = \rho \circ \psi_2 \circ g_1 \circ \varphi_1(x)$,

$$[b, v] \xrightarrow{\varphi_1} [a, c] \xrightarrow{g_1} \left[\frac{ab}{c}, b \right] \xrightarrow{\psi_2} [b, u].$$

При $x \in [u, c]$: $\rho(x) = \rho \circ \psi_1 \circ g_2 \circ \varphi_2(x)$,

$$[u, c] \xrightarrow{\varphi_2} [b, a] \xrightarrow{g_2} \left[c, 1 - \frac{(1-a)(1-c)}{1-b} \right] \xrightarrow{\psi_1} [v, c].$$

Очевидно, последние преобразования также линейны.

С помощью леммы 1 докажем эргодичность T . Покажем, что только постоянная функция ρ обладает свойствами (1)–(5). Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$E(t) = \{x \in [0, 1] : \rho(x) > t\}.$$

Предположим, что $|E(t)| > 0$, где запись $|X|$ обозначает меру Лебега множества X . Для произвольного $\varepsilon > 0$ покажем, что $|E(t)| > 1 - \varepsilon$, откуда следует равенство $|E(t)| = 1$, которое означает, что функция ρ постоянна.

Мы фиксируем значение t , поэтому ниже будем обозначать множество $E(t)$ просто как E . Далее будем придерживаться следующей схемы. Начнем с некоторого интервала $l \subset [b, u]$, обладающего свойством

$$|l \setminus E| < \varepsilon |l|, \quad (6)$$

и при помощи описанной ниже процедуры, сохраняющей свойство (6), будем образовывать новые, лежащие внутри $[b, u]$ и возрастающие по длине, интервалы пока не получим фундаментальный интервал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интервал ξ называется *фундаментальным*, если

$$\begin{aligned} [b, u] &\subset \bigcup_{k=-k_0}^{+\infty} h_1^k(\xi), & u &\in h_1^{-k_0}(\xi), \\ |h_1^i(\xi) \cap h_1^j(\xi)| &= 0, & \text{если } i &\neq j, \end{aligned}$$

и ξ обладает свойством (6).

Если такой интервал найден, то из (4) следует

$$|[b, u] \setminus E| < \varepsilon \left(1 + \frac{v-u}{u-b} \right) (u-b).$$

Последняя оценка получается так:

$$\begin{aligned} |([b, u] \cap h_1^{-k_0}(\xi)) \setminus E| &< \varepsilon |h_1^{-k_0}(\xi)| < \varepsilon(v - u), \\ |([b, u] \setminus h_1^{-k_0}(\xi)) \setminus E| &< \varepsilon |[b, u] \setminus h_1^{-k_0}(\xi)| < \varepsilon(u - b). \end{aligned}$$

Остается заметить, что согласно свойствам (1)–(5) условная мера множества E на отрезках $[u, v]$, $[v, c]$, $[0, b]$, $[c, 1]$ и, следовательно, на отрезке $[0, 1]$ совпадает с условной мерой множества E на отрезке $[b, u]$.

Вначале выберем достаточно маленький отрезок $l_1 \subset [b, u]$, содержащий точку плотности множества E на отрезке $[b, u]$ ($|[b, u] \cap E| > 0$, так как $|[0, 1] \cap E| > 0$). Каждый раз, получая отрезок $l_i \subset [b, u]$, находим минимальное k , при котором $h_1^{-k}(l_i) \not\subset [b, u]$, обозначая $l'_i = h_1^{-k}(l_i)$. Условие (6) выполнено для l'_i , и

$$|l'_i| \geq \frac{v - b}{u - b} |l_i| = \frac{a(1 - b)}{b(1 - a)} |l_i|. \quad (7)$$

Рассмотрим два случая расположения точки u относительно интервала l'_i . Обозначим $l'_i = (d, e)$.

(А) Пусть $u \in l'_i$, $\tau := (u, e)$.

Рис. 3. Случай (А)

ЛЕММА 2. Пусть $C > 1$.

а) Предположим, что $|\tau \setminus E| < C\varepsilon|\tau|$. Тогда интервал $\varphi_2(\tau)$ содержит фундаментальный интервал ξ такой, что

$$|\xi \setminus E| < C\varepsilon|\xi|.$$

б) Предположим, что $|\tau \setminus E| \geq C\varepsilon|\tau|$. Тогда

$$|[d, u] \setminus E| < \varepsilon(u - d), \quad |\tau| < \frac{1}{C} |l'_i|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По свойству (1)

$$|\varphi_2(\tau) \setminus E| < C\varepsilon|\varphi_2(\tau)|.$$

Рассмотрим фундаментальный интервал

$$\xi = \left(h_1 \left(\frac{a}{c} e \right), \frac{a}{c} e \right), \quad \varphi_2(\tau) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} h_1^k(\xi).$$

Из свойства (4) следует нужное утверждение.

б) Применяя оценку (6) для интервала l'_i , получаем

$$|\tau| \leq \frac{1}{C\varepsilon} |\tau \setminus E| < \frac{1}{C\varepsilon} |l'_i \setminus E| < \frac{1}{C} |l'_i|,$$

$$|[d, u] \setminus E| = |l'_i \setminus E| - |\tau \setminus E| < \varepsilon |l'_i| - C\varepsilon |\tau| < \varepsilon(u - d).$$

Следуя лемме 2, мы либо получаем фундаментальный интервал ξ такой, что $|\xi \setminus E| < C\varepsilon |\xi|$ (как показано ниже, C можно выбрать независимо от ε), либо возвращаемся в ситуацию $l_{i+1} \subset [b, u]$, где интервал $l_{i+1} = (d, u)$ обладает свойством (6). Тогда выполняется неравенство

$$|l_{i+1}| > \left(1 - \frac{1}{C}\right) |l'_i|. \quad (8)$$

(Б) Пусть $u < d$, $l'_i \subset [u, v]$.

Рис. 4. Случай (Б)

Положим $\lambda_1 = \varphi_2(l'_i)$ (условие (6) сохраняется для λ_1)

$$\lambda_1 \subset \left[\frac{a}{c}u, \frac{a}{c}v\right], \quad |\lambda_1| = \frac{a}{c} |l'_i|.$$

Пользуясь формулой $\lambda_{i+1} = \varphi_2(\lambda_i)$, найдем минимальное s такое, что $\lambda_{s+1} \not\subset [u, v]$; обозначим $l''_i = \lambda_{s+1}$. Выполняются неравенства

$$|l''_i| \geq \left(\frac{a}{c}\right)^{s+1} |l'_i|, \quad u < \left(\frac{a}{c}\right)^s v. \quad (9)$$

Если $l''_i \subset [b, u]$, то берем интервал l''_i в качестве l_{i+1} , если $u \in l''_i$, то переходим к случаю (А), взяв интервал l''_i в качестве l'_i .

Согласно (7), (8) и (9) для того, чтобы с каждым шагом длина интервалов l_i увеличивалась, достаточно взять такое $C > 1$, что

$$\frac{a(1-b)}{b(1-a)} \left(1 - \frac{1}{C}\right) > 1, \quad \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \left(\frac{a}{c}\right)^{s+1} > 1, \quad \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \left(1 - \frac{1}{C}\right) \left(\frac{a}{c}\right)^{s+1} > 1,$$

при условии

$$\left(\frac{a}{c}\right)^s > \frac{u}{v}.$$

Тогда длина интервалов увеличивается экспоненциально и, значит, на некотором шаге мы получим фундаментальный интервал.

Очевидно, что число C существует, если выполняется условие

$$\frac{a(1-b)}{b(1-a)} \frac{a}{c} \frac{u}{v} \geq 1.$$

Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$a(1-b) - (1-a) + (1-b)(1-c) \geq 0. \quad (10)$$

Обратим внимание, что при замене

$$(x, y, a, b, c) \mapsto (1-x, 1-y, 1-a, 1-c, 1-b),$$

соответствующей последовательному отражению плоскости (x, y) относительно прямых $x = 1/2$ и $y = 1/2$, получается полиморфизм $T'(a, b, c)$ с теми же эргодическими свойствами, что и у $T(a, b, c)$ (по геометрическим соображениям). Для полиморфизма T' неравенство, соответствующее неравенству (10), выглядит так

$$(1-a)c - a + bc \geq 0. \quad (11)$$

Остается заметить, что, по крайней мере, одно из неравенств (10) и (11) выполняется. Действительно, пусть

$$f_1(a) := a(1-b) - (1-a) + (1-b)(1-c), \quad f_2(a) := (1-a)c - a + bc.$$

Рассмотрим значения этих функций в концах отрезка $[b, c]$:

$$\begin{aligned} f_1(b) &= -(1-b)(c-b) > -(c-b), & f_1(c) &= c-b, \\ f_2(b) &= c-b, & f_2(c) &= -c(c-b) > -(c-b). \end{aligned}$$

Так как функции f_1 и f_2 линейные, то

$$\max(f_1(a), f_2(a)) > 0 \quad \text{для всех } a \in (b, c).$$

Теорема доказана.

Рис. 5. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Автор благодарит своего научного руководителя Д. В. Трещева за постановку задачи и ценные замечания, сделанные в ходе ее решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. M. Vershik, “Polymorphisms, Markov processes, and quasi-similarity”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **13**:5 (2005), 1305–1324.
- [2] А. М. Вершик, “Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы”, *Проблемы теории вероятностных распределений. IV*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **72**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1977, 26–61.
- [3] A. Neishtadt, D. Treschev, “Polymorphisms and adiabatic chaos”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31**:1 (2011), 259–284.

П. Е. Голубцов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: gtz@bk.ru

Поступило

21.04.2009

Исправленный вариант

01.10.2010