Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. И. Абдурагимов, О численном методе построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 803–812

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:40:02

УДК 519.62

О численном методе построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

Э. И. Абдурагимов

Для нахождения приближения к положительному решению двухточечной краевой задачи

$$y'' + c(x)y^m = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где $m = \text{const} > 1$, $c(x)$ – непрерывная неотрицательная на $[0, 1]$ функция, предложен итерационный метод. Доказана сходимость этого метода. Получена также оценка погрешности.

Библиография: 20 названий.

Введение. Исследованиям положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено много работ российских и зарубежных математиков (см., например, [1]–[18] и цитированную в них литературу). Книги [1], [2] посвящены положительным решениям задач, в них рассматриваются различные методы доказательства существования и единственности положительных решений нелинейных дифференциальных уравнений, изучаются свойства положительных решений, операторные уравнения с вогнутыми и выпуклыми операторами, построение положительных решений и т.д. В работах [3]–[15] рассматриваются вопросы существования и единственности положительных решений нелинейных дифференциальных второго порядка эллиптического типа, в [16] исследуется поведение положительных решений, в [17], [19] получены априорные оценки положительного решения, в [18], [20] изучаются кратные положительные решения.

Положительные решения задачи Дирихле для сильно нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка возникают в газовой динамике, в теории химических реакторов и т.д. Поэтому задача построения положительного решения задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta u = f(x, u), \quad f(x, 0) = 0, \quad (0.1)$$

в том случае, когда $f(x, u)$ имеет рост по u выше первого порядка, является актуальной. Однако в настоящее время в математической литературе мало изучен вопрос

построения положительного решения уравнения (0.1). В данной работе сделана попытка устранить этот пробел.

Заметим, что двухточечная краевая задача

$$y'' + c(x)y^m = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (0.2)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (0.3)$$

где $m = \text{const} > 1$, $c(x)$ – непрерывная неотрицательная на $[0, 1]$ функция, может быть записана в эквивалентной операторной форме

$$y = Ay. \quad (0.4)$$

При этом если $m > 1$, то оператор A будет выпуклым. В монографии [2; с. 418] авторы отмечают: “Если оператор A выпуклый, а $y^* \in K$ – ненулевое решение уравнения (0.4), то приближения

$$y_n = Ay_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (0.5)$$

не будут сходиться к y^* (даже “почти при всех” начальных приближениях из каждой малой окрестности точки y^* в конусе K)”. Поэтому попытка найти положительное решение задачи (0.2), (0.3), записав ее в виде операторного уравнения (0.4) с помощью итерационного процесса (0.5), обречена на неудачу. Это подтверждает и следующий простой пример. Для нелинейного алгебраического уравнения $x = x^2$ с тривиальным решением $x = 0$ и положительным решением $x = 1$ итерационный процесс $x_{n+1} = x_n^2$, $n = 0, 1, \dots$, сходится к положительному решению $x = 1$ только тогда, когда начальное приближение $x_0 = \pm 1$. В то же время, если оператор A вогнутый и y^* – ненулевое решение уравнения (0.4), то, как доказано в [2; теорема 49.2, с. 417], при каждом ненулевом начальном приближении y_0 последовательные приближения (0.5) сходятся к y^* .

В данной работе предложен приближенный численный метод построения положительного решения задачи (0.2), (0.3), сходящийся к единственному (см. работу автора [14]) положительному решению задачи (0.2), (0.3). Получена априорная оценка погрешности построенного приближенного положительного решения. Приведена также схема алгоритма построения с заданной точностью приближенного положительного решения задачи (0.2), (0.3). В качестве примеров приведены положительные решения задачи (0.2), (0.3), построенные по указанной в алгоритме схеме при $b(x) = x, e^x$ и $m = 2$. Заметим, что построенное положительное решение в случае $b(x) = x, m = 2$ совпадает с положительным решением задачи (0.2), (0.3) из работы автора [15], построенного другим методом.

1. Априорные оценки. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$y'' + c(x)y^m = 0, \quad 0 < x < a, \quad (1.1)$$

$$y(0) = y(a) = 0, \quad (1.2)$$

где $m = \text{const} > 1$, $c(x)$ – непрерывная неотрицательная на $[0, a]$ функция, причем $c(x) \not\equiv 0$, a – положительное число. Заменой $x = at$ эта задача сводится к задаче

вида (0.2), (0.3), для которой в [14] доказано существование единственного положительного решения из класса $C^2[0, 1]$. Следовательно, задача (1.1), (1.2) имеет единственное положительное решение $y \in C^2[0, a]$ при любом $a > 0$. Получим оценки этого решения.

Пусть $d(x, a) = \min(x, a - x)$ – расстояние от точки x до границы отрезка $[0, a]$. Предположим, что при любом $a > 0$ существует положительная постоянная c_0 , зависящая лишь от m , такая, что

$$\int_0^a d^{m+1}(t, a) c(t) dt \geq c_0 a^{m+1} \int_0^a c(t) dt. \quad (1.3)$$

Например, если $c(x) = 1$ или $c(x) = x$, то в (1.3) будет равенство с константой $c_0 = 1/(2^{m+1}(m+2))$, если $c(x) = e^x$, то (1.3) выполняется с $c_0 = 1/(2^{2m+3}e^{1/2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (1.3) следует, что $c_0 < 2^{-(m+1)}$.

ЛЕММА 1. Если выполняется неравенство (1.3), то для положительного решения задачи (1.1), (1.2) справедливы оценки

$$4^{1/(m-1)} \phi(a) \leq \|y\| \leq \left(\frac{2}{c_0}\right)^{1/(m-1)} \phi(a), \quad (1.4)$$

где

$$\phi(a) = \left(a \int_0^a c(t) dt\right)^{-1/(m-1)}, \quad \|y\| = \max_{0 \leq x \leq a} y(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (1.1) вытекает, что $y'' = -c(x)y^m \leq 0$. Следовательно, $y(x)$ является выпуклой вверх функцией. Тогда легко проверить справедливость неравенства

$$y(x) \geq \frac{d(x, a)}{a} \|y\|. \quad (1.5)$$

Функция Грина оператора $-d^2/dx^2$ с граничными условиями (1.2) имеет вид

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(a-t)x}{a}, & \text{если } 0 \leq x \leq t, \\ \frac{(a-x)t}{a}, & \text{если } t \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что

$$G(x, t) \geq \frac{d(x, a)d(t, a)}{a}. \quad (1.7)$$

Решение $y(x)$ задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = \int_0^a G(x, t) c(t) y^m(t) dt. \quad (1.8)$$

Отсюда в силу (1.5) и (1.7) имеем

$$y(x) \geq \frac{d(x, a)}{a^{m+1}} \|y\|^m \int_0^a d^{m+1}(t, a) c(t) dt.$$

Следовательно,

$$\|y\| \geq y\left(\frac{a}{2}\right) \geq \frac{1}{2a^m} \|y\|^m \int_0^a d^{m+1}(t, a) c(t) dt.$$

Отсюда, пользуясь (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq 2^{1/(m-1)} \left(\frac{a^m}{\int_0^a d(t, a)^{m+1} c(t) dt} \right)^{1/(m-1)} \leq 2^{1/(m-1)} \left(\frac{a^m}{c_0 a^{m+1} \int_0^a c(t) dt} \right)^{1/(m-1)} \\ &= \left(\frac{2}{c_0} \right)^{1/(m-1)} \frac{1}{(a \int_0^a c(t) dt)^{1/(m-1)}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Правая часть неравенства (1.4) доказана.

Далее, из (1.8) и вида функции Грина (1.6) следует

$$y(x) \leq \|y\|^m \int_0^a G(x, t) c(t) dt \leq \frac{a}{4} \|y\|^m \int_0^a c(t) dt.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|y\| \geq \left(\frac{4}{a \int_0^a c(t) dt} \right)^{1/(m-1)} = 4^{1/(m-1)} \phi(a). \quad (1.10)$$

Лемма доказана.

Пусть $y(x, a)$ – решение задачи (1.1), (1.2). Обозначим $y'(0, a) = s$.

ЛЕММА 2. *Справедливы оценки*

$$4^{m/(m-1)} c_0 \psi(a) \leq s \leq \left(\frac{2}{c_0} \right)^{m/(m-1)} \psi(a), \quad (1.11)$$

где $\psi(a) = (a^m \int_0^a c(t) dt)^{-1/(m-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.8) имеем

$$y'(0, a) = s = \frac{1}{a} \int_0^a (a - t) c(t) y^m(t) dt. \quad (1.12)$$

Отсюда в силу (1.5), (1.10) и (1.3)

$$\begin{aligned} s &\geq \frac{\|y\|^m}{a^{m+1}} \int_0^a (a - t) c(t) d^m(t, a) dt \geq \frac{\|y\|^m}{a^{m+1}} \int_0^a c(t) d^{m+1}(t, a) dt \\ &\geq 4^{m/(m-1)} \frac{\int_0^a c(t) d^{m+1}(t, a) dt}{a^{m+1+m/(m-1)} (\int_0^a c(t) dt)^{m/(m-1)}} \geq 4^{m/(m-1)} c_0 \psi(a). \end{aligned}$$

Левая часть неравенства (1.11) доказана.

Из (1.12) в силу (1.9) имеем

$$s \leq \|y\|^m \int_0^a c(t) dt \leq \left(\frac{2}{c_0} \right)^{m/(m-1)} \frac{\int_0^a c(t) dt}{(a \int_0^a c(t) dt)^{m/(m-1)}} = \left(\frac{2}{c_0} \right)^{m/(m-1)} \psi(a).$$

Лемма доказана.

Если, например, $c(x) \equiv 1$, то неравенство (1.11) примет вид

$$\frac{1}{2^{(m^2-2m-1)/(m-1)}(m+2)a^{(m+1)/(m-1)}} \leq s \leq \frac{2^{(m^2+2m)/(m-1)}(m+2)^{(m+1)/(m-1)}}{a^{(m+1)/(m-1)}}.$$

2. Численный метод построения положительного решения. Пусть s – положительное число. Рассмотрим задачу Коши

$$y'' + c(x)y^m = 0, \quad m > 1, \quad (2.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = s, \quad (2.2)$$

где $c(x)$ – непрерывная неотрицательная при всех $x \geq 0$ функция. Предположим, что

$$\int_0^\infty c(t) dt = \infty. \quad (2.3)$$

ЛЕММА 3. Для любого конечного $s > 0$ существует единственное положительное число a такое, что задача (2.1), (2.2) имеет единственное положительное решение $y \in C^2[0, a]$ и $y(a) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $y'(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = 0$, то существует число δ_0 такое, что $y'(x) \geq s/2$ при $x \in [0, \delta_0]$. Следовательно, $y(x) \geq sx/2$ при $x \in [0, \delta_0]$. Предположим противное, т.е. $y(x) > 0$ при всех $x > 0$. Тогда из уравнения (2.1) следует, что $y(x)$ является выпуклой вверх функцией при $x > 0$. Интегрируя (2.1) от 0 до x , получим

$$y'(x) = s - \int_0^x c(t)y^m(t) dt. \quad (2.4)$$

Покажем, что существует точка x_0 такая, что $y'(x_0) = 0$. В самом деле, если $y'(x) \neq 0$ ни при каком $x > 0$, т.е. $y'(x) > 0$ при всех $x > 0$, то $y(x)$ возрастает при $x > 0$. Тогда для некоторого $\Delta > 0$ из (2.4) при $x > \Delta$ следует

$$s > \int_0^x c(t)y^m(t) dt > \int_\Delta^x c(t)y^m(t) dt \geq y^m(\Delta) \int_\Delta^x c(t) dt.$$

Устремляя здесь x к ∞ и учитывая (2.3), получим противоречие. Следовательно, существует точка x_0 такая, что $y'(x_0) = 0$. Так как $y(x)$ выпукла вверх, то в этой точке $y(x)$ достигает наибольшего значения и убывает при $x > x_0$. Поэтому она обратится в нуль в некоторой точке оси ox . Это противоречит предположению $y(x) > 0$ при всех $x > 0$. Следовательно, существует точка a такая, что $y(a) = 0$ и $y(x) > 0$ при $x \in (0, a)$. Причем это значение a будет единственным. Далее, интегрируя (2.4) от 0 до x , получим

$$y(x) = sx - \int_0^x (x-t)c(t)y^m(t) dt,$$

отсюда следует, что $0 \leq y(x) \leq sx$, если $x \in (0, a)$. А из (2.1) получаем оценку

$$|y''| \leq c_M s^m x^m, \quad x \in (0, a),$$

где $c_M = \max_{0 \leq x \leq a} c(x)$. Отсюда следует, что $y \in C^2[0, a]$. Лемма доказана.

Итак, каждому значению $s > 0$ соответствует единственное значение a такое, что $y(a) = 0$, где $y(x)$ – решение задачи (2.1), (2.2), и, наоборот, каждому значению $a > 0$ такому, что $y(x)$ является положительным решением краевой задачи (1.1), (1.2), соответствует единственное значение $y'(0) = s$, так как задача (1.1), (1.2) имеет единственное положительное решение $y \in C^2[0, a]$ (см. [8]). Между $a > 0$ и $s > 0$ установлено взаимно однозначное соответствие. Запишем это соответствие в виде функции $s = s(a)$. Из леммы 2 следует, что

$$s_1(a) \leq s(a) \leq s_2(a),$$

где $s_1(a) = 4^{m/(m-1)} c_0 \psi(a)$, $s_2(a) = (2/c_0)^{m/(m-1)} \psi(a)$ – положительные убывающие функции.

ЛЕММА 4. Для любого $s \in (s_2, \infty)$ существует единственное число $\Delta_2 \in (0, a)$ такое, что $y(a - \Delta_2) = 0$, где $y(x)$ – решение задачи (2.1), (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $y(a - \Delta) \neq 0$ для любого $\Delta \in (0, a)$. Из условия леммы следует, что $y(a) \neq 0$, так как в противном случае по лемме 2 имеем $s_1(a) \leq s \leq s_2(a)$, а по условию леммы $s_2(a) < s$. Тогда по лемме 3 существует единственная точка $a + \delta$ ($\delta > 0$) такая, что $y(a + \delta) = 0$. А по лемме 2

$$s_1(a + \delta) \leq s(a + \delta) \leq s_2(a + \delta) < s_2(a).$$

Это противоречит условию леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Для любого $s \in (0, s_1(a))$ существует единственное число $\Delta_1 \in (0, \infty)$ такое, что $y(a + \Delta_1) = 0$, где $y(x)$ – решение задачи (2.1), (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 4.

Из этих лемм следует, что если взять в (2.2) $s = q_2 = s_2(a) + \varepsilon_0$, где ε_0 – некоторое положительное число, то $y(a) < 0$, если же взять в (2.2) $s = q_1 = s_1(a) - \varepsilon_0$, то $y(a) > 0$.

ЛЕММА 6. Предположим, что выполняется условие (2.3). Тогда, если в (2.2) $s \in [s_1 - \varepsilon_0, s_2(1) + \varepsilon_0]$, где ε_0 – положительное число ($\varepsilon_0 < s_1(1)$), то существует положительное число $\gamma \in [\alpha, \beta]$ такое, что $u(\gamma) = 0$, где $\alpha = \min(1, \gamma_0)$, $\beta = \max(1, \gamma_1)$,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{4c_0^{(m-1)/m}}{(s_2(1) + \varepsilon_0)^{(m-1)/m} \left(\int_0^1 c(t) dt \right)^{1/m}}, \\ \gamma_1 &= \frac{2}{c_0(s_1(1) - \varepsilon_0)^{(m-1)/m} \left(\int_0^1 c(t) dt \right)^{1/m}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко проверить, пользуясь замечанием 1, что $\gamma_0 < \gamma_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование положительного γ такого, что $u(\gamma) = 0$, следует из леммы 3. Покажем, что $\gamma \in [\alpha, \beta]$. В самом деле, по лемме 2

$$s \geq \frac{4^{m/(m-1)} c_0}{\gamma^{m/(m-1)} \left(\int_0^\gamma c(t) dt \right)^{1/(m-1)}}.$$

Если $\gamma < \alpha = \min(1, \gamma_0)$, то отсюда имеем

$$s > \frac{4^{m/(m-1)} c_0}{\gamma_0^{m/(m-1)} (\int_0^1 c(t) dt)^{1/(m-1)}} = s_2(1) + \varepsilon_0.$$

Это противоречит условию леммы.

Аналогично, по лемме 2

$$s \leq \left(\frac{2}{c_0}\right)^{m/(m-1)} \frac{1}{\gamma^{m/(m-1)} (\int_0^\gamma c(t) dt)^{1/(m-1)}}.$$

Если $\gamma > \beta = \max(1, \gamma_1)$, то отсюда имеем

$$s < \left(\frac{2}{c_0}\right)^{m/(m-1)} \frac{1}{\gamma_1^{m/(m-1)} (\int_0^1 c(t) dt)^{1/(m-1)}} = s_1(1) - \varepsilon_0.$$

Это также противоречит условию леммы. Лемма доказана.

На основании изложенного выше положительное решение задачи (1.1), (1.2) можно найти с любой заданной точностью, пользуясь методом половинного деления по алгоритму, состоящему из следующих шагов.

Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Задаем $A = s_1(1) - \varepsilon_0$, где ε_0 – некоторое число из интервала $(0, s_1(1))$, и решаем задачу Коши (2.1), (2.2) с $s = A$, начиная с $x = 0$ до $x = 1$, каким-либо численным методом, например, методом Рунге–Кутты.

Шаг 2. Задаем $B = s_2(1) + \varepsilon_0$ и решаем задачу Коши (2.1), (2.2) с $s = B$, начиная с $x = 0$ до $x = 1$, тем же численным методом, что и в шаге 1.

Шаг 3. Вычисляем

$$s^{(n)} = \frac{A + B}{2}$$

и решаем задачу Коши (2.1), (2.2) с $s = s^{(n)}$, начиная с $x = 0$ до $x = 1$ тем же численным методом, что и выше.

Шаг 4. Если окажется, что $y(1, s^{(n)}) = 0$, то искомое решение совпадает с решением, полученным на шаге 3, и вычисления прекращаем. В противном случае проверяем условие

$$\frac{B - A}{2} \leq \varepsilon, \quad (2.6)$$

где ε – наперед заданное положительное число. Если (2.6) не выполняется и при этом $y(1, s^{(n)})y(1, A) < 0$, то полагаем $B = s^{(n)}$; если (2.6) не выполняется и при этом $y(1, s^{(n)})y(1, A) > 0$, то полагаем $A = s^{(n)}$. Затем n увеличиваем на 1 и переходим к шагу 3.

Это продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие (2.6). Тогда решение, полученное на шаге 3, есть искомое приближенное решение.

Заметим, что минимальное число итераций можно заранее найти из неравенства

$$\frac{s_2(1) - s_1(1) + 2\varepsilon_0}{2^n} \leq \varepsilon.$$

3. Оценка погрешности. Оценим погрешность приближенного положительного решения задачи (1.1), (1.2) с $a = 1$, полученного в п. 2.

ТЕОРЕМА. Пусть $y(x)$ – положительное решение задачи (1.1), (1.2) с $a = 1$, а $y(x, s^{(n)})$ – решение задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[0, 1]$ с $s^{(n)} \in [s_1 - \varepsilon_0, s_2(1) + \varepsilon_0]$. Справедлива оценка погрешности

$$|y(x) - y(x, s^{(n)})| \leq \frac{s_2(1) - s_1(1)}{2^n} e^{mc_M(s_2(1))^{m-1}x}, \quad (3.1)$$

где $c_M = \max_{0 \leq x \leq 1} c(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение $y_n(x) = y(x, s^{(n)})$ уравнения (2.1) на отрезке $[0, 1]$ с начальными условиями $y_n(0) = 0$, $y'_n(0) = s^{(n)}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y_n(x) = s^{(n)}x - \int_0^x (x-t)c(t)y_n^m(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.2)$$

Решению $y(x)$ краевой задачи (1.1), (1.2) с $a = 1$ по лемме 2 соответствует некоторое $s \in [s_1(1), s_2(1)] \subset [s_1(1) - \varepsilon_0, s_2(1) + \varepsilon_0]$, следовательно, $y(x)$ есть решение уравнения (2.1) на отрезке $[0, 1]$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = s$. Аналогично $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = sx - \int_0^x (x-t)c(t)y^m(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.3)$$

Функцию $c(x)$, непрерывную на отрезке $[0, 1]$, продолжим по непрерывности на $[0, \infty]$ так, чтобы для продолженной функции $C(x)$ выполнялось условие (2.3). Тогда, так как $s^{(n)} \in [s_1(1) - \varepsilon_0, s_2(1) + \varepsilon_0]$, то по лемме 6 существует $\gamma_n \in [\alpha, \beta]$ такое, что $y_n(\gamma_n) = 0$, т.е. $y_n(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2) с $a = \gamma_n$. По лемме 1 справедлива оценка

$$\|y\| \leq \left(\frac{2}{c_0}\right)^{1/(m-1)} \phi(\gamma_n).$$

Так как $\phi(t)$ – убывающая функция, то $\phi(\gamma_n) \leq \phi(\alpha)$, $\alpha = \min(1, \gamma_0)$, а γ_0 определяется равенством (2.5). Поэтому

$$0 < \max_{0 \leq x \leq 1} (y_n(x), y(x)) \leq \left(\frac{2}{c_0}\right)^{1/(m-1)} \max(\phi(1), \phi(\alpha)) = \left(\frac{2}{c_0}\right)^{1/(m-1)} \phi(\alpha) \equiv M_0.$$

Вычитая (3.3) из (3.2), получим

$$y_n(x) - y(x) = (s^{(n)} - s)x - \int_0^x (x-t)c(t)(y_n^m(t) - y^m(t)) dt. \quad (3.4)$$

Далее, воспользуемся неравенством

$$|a^m - b^m| \leq m(\max(a, b))^{m-1}|a - b|, \quad (3.5)$$

справедливым при любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $m \geq 1$, которое получается применением теоремы Лагранжа о среднем значении к функции $f(t) = t^m$ при $t \geq 0$. Пусть $|y_n(x) - y(x)| = v_n(x) \geq 0$. Пользуясь (3.5), из (3.4) имеем

$$v_n(x) \leq |s^{(n)} - s| + mc_M M_0^{m-1} \int_0^x v_n(t) dt.$$

Отсюда, пользуясь леммой Гронуола, имеем

$$v_n(x) \leq |s^{(n)} - s| e^{mc_M M_0^{m-1} x}. \quad (3.6)$$

Поскольку $s^{(n)}$ получено в п. 2 методом половинного деления, то

$$|s^{(n)} - s| \leq \frac{s_2(1) - s_1(1) + 2\varepsilon_0}{2^n}.$$

Тогда в силу (3.6)

$$|y(x, s^{(n)}) - y(x)| \leq \frac{s_2(1) - s_1(1) + 2\varepsilon_0}{2^n} e^{mc_M M_0^{m-1} x}.$$

Устремляя здесь ε_0 к нулю, получим (3.1). Теорема доказана.

Таблица 1. Положительное решение $c(x) = x$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.00	5.17	10.29	15.18	19.35	22.01	22.28	19.64	14.38	7.47	0.00

Таблица 2. Положительное решение $c(x) = e^x$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.00	1.77	3.50	5.08	6.30	6.93	6.79	5.82	4.18	2.16	0.00

В качестве примеров приведем таблицы значений положительных решений задачи (1.1), (1.2) при $c(x) = x$, $c(x) = e^x$, $m = 2$, полученные в п. 2 по приведенной выше схеме алгоритма с $\varepsilon = 10^{-3}$.

Таблица 3. Положительное решение, полученное неитерационным методом $c(x) = x$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.00	5.16	10.28	15.17	19.34	22.00	22.27	19.64	14.37	7.46	0.00

Для сравнения приведем таблицу значений положительного решения задачи (1.1), (1.2) при $c(x) = x$, $m = 2$, полученного неитерационным методом в [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1962.
- [2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1975.
- [3] С. И. Похожаев, “Об одной задаче Л. В. Овсянникова”, *Журн. прикл. механики и техн. физики*, 1989, № 2, 5–10.
- [4] С. И. Похожаев, “Об одном конструктивном методе вариационного исчисления”, *ДАН СССР*, **298:6** (1988), 1330–1333.

- [5] С. И. Похожаев, “О целых радиальных решениях некоторых квазилинейных эллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 3–18.
- [6] K. Schmitt, “Boundary value problems for quasilinear second-order elliptic equations”, *Nonlinear Anal.*, **2**:3 (1978), 263–309.
- [7] Т. С. Кожевникова, “О разрешимости некоторых нелинейных эллиптических задач”, *Матем. заметки*, **38**:6 (1985), 852–859.
- [8] Е. И. Галахов, “Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения”, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 202–211.
- [9] K.-S. Cheng, J.-T. Lin, “On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^\sigma$ and $\Delta u = K(x)e^{2u}$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304**:2 (1987), 639–668.
- [10] Ю. Л. Гапоненко, “О положительных решениях нелинейных краевых задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем., кибернет.*, 1983, № 4, 8–12.
- [11] C. Bandle, M. K. Kwong, “Semilinear elliptic problems in annular domains”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **40**:2 (1989), 245–257.
- [12] N. Kawano, J. Satsuma, S. Yotsutani, “On the positive solutions of an Emden-type elliptic equation”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **61**:6 (1985), 186–189.
- [13] M. K. Kwong, Y. Li, “Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **333**:1 (1992), 339–363.
- [14] Э. И. Абдурагимов, “О единственности положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи”, *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 6, 3–6.
- [15] Э. И. Абдурагимов, “Единственность положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи и численный метод его нахождения”, *Изв. вузов. Матем.*, 1998, № 11, 3–7.
- [16] B. Gidas, J. Spruck, “Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**:4 (1981), 525–598.
- [17] R. Kajikiya, “Norm estimates for radially symmetric solutions of semilinear elliptic equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **374**:4 (1995), 1163–1199.
- [18] P. Donato, “Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contractible domains”, *Manuscripta Math.*, **65**:2 (1989), 147–165.
- [19] C. Cosner, C. Schmitt, “A priori bounds for positive solutions of a semilinear elliptic equation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:1 (1985), 47–50.
- [20] R. Gardner, L. Peletier, “The set of positive solutions of semilinear equations in large balls”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **104**:1-2 (1986), 52–72.

Э. И. Абдурагимов

Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала

E-mail: abduragimov@mail.ru

Поступило

04.08.2010