Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Д. Д. Реповш, Задача о распространении накрывающей гомотопии для компактных групп преобразований, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 803–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8959>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:03:07

Задача о распространении накрывающей гомотопии для компактных групп преобразований

С. М. Агеев, Д. Реповш

Показано, что пространство орбит универсальных (в смысле Пале) G -пространств осуществляет классификацию G -пространств. Доказаны теоремы о распространении накрывающей гомотопии для G -пространств и о гомотопическом представлении изовариантной категории ISOV.

Библиография: 18 названий.

Введение

В работе изучается изовариантная категория ISOV, объектами которой являются пространства с действием компактной группы G , а морфизмами – изовариантные отображения. Исторически принято рассматривать объекты этой категории как обобщенные главные G -расслоения, а ее инъективные объекты ($\equiv$ Isov-AE-пространства) – как универсальные обобщенные главные G -расслоения. Впервые объекты с похожими свойствами были построены Пале для компактных групп Ли, действующих на конечномерных пространствах с конечным числом орбитных типов [1; § 2.6.]. В дальнейшем этот результат был распространен на компактные метризуемые группы, действующие на пространствах с конечномерным пространством орбит [2]. В работе [3] были сняты последние ограничения и установлена теорема существования Isov-AE-пространств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для всех $i \geq 1$ Equiv-AE-пространство $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим пространством. Тогда

$$\prod \{\mathbb{X}_i \mid i \geq 1\} \in \text{Isov-AE}.$$

Пространство $\mathbb{X}$ называется Isov-порождающим, если для любого метрического G -пространства $\mathbb{Z}$ существует изовариантное отображение $\eta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$. В статье [4] доказано, что счетная степень $\mathbb{J} \equiv (\text{Con } \mathbb{T})^\omega$ метрического конуса $\text{Con } \mathbb{T}$ над дискретным объединением $\mathbb{T}$ всех однородных пространств $G/H \in G\text{-ANE}$ является Isov-порождающим (см. также [5]). Так как $\mathbb{J}$ является также Equiv-AE-пространством и $\mathbb{J} \cong \mathbb{J}^\omega$, то из теоремы 1 следует $\mathbb{J} \in \text{Isov-AE}$.

Каждое семейство $\mathcal{F}$, лежащее в множестве Conj_G сопряженных классов замкнутых подгрупп G , порождает ряд эквивариантных гомотопических инвариантов:

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь. Работа второго автора выполнена при поддержке Slovenian Research Agency (гранты P1-0292-0101, J1-9643-0101, J1-2057-0101).

$\mathcal{F}$ -классифицирующее G -пространство в смысле [6], [7] и тесно связанные с ними обобщенные когомологии групп [8], [9], фундаментальные классы G -пространств и другие эквивариантные гомотопические инварианты [10]. Теорема 1 позволяет установить, что в $\mathcal{F}$ -классифицирующих G -пространствах может быть введена дополнительная структура изовариантных абсолютных экстензоров, что дает новые возможности для вычисления гомотопических инвариантов пространств орбит $\mathcal{F}$ -классифицирующих G -пространств. В свою очередь это дает важную информацию об обобщенных когомологиях компактных групп.

Теорема 1 влечет также важный вывод о том, что эквивариантный гомотопический тип Equiv-ANE -пространств совпадает с изовариантным гомотопическим типом IsoV-ANE -пространств. Это позволяет прояснить функториальную природу операции перехода к пучку орбит данного типа, которая не сохраняется при эквивариантных гомотопических эквивалентностях. Очерченному кругу вопросов будут посвящены последующие публикации (см., например, [3], [11]).

Здесь же мы с помощью теоремы 1 устанавливаем, что пространство орбит E любого IsoV-AE -пространства $\mathbb{E}$ осуществляет классификацию G -пространств в смысле Р. Пале. Для этого мы переносим на произвольные компактные группы классический результат Пале о накрывающей гомотопии (см. [1], а также [2]), а также доказываем более общий результат – теорему 2 о распространении накрывающей гомотопии. Вследствие этого категория ISOV допускает гомотопическое представление, во многих отношениях сводящее ее изучение к гомотопическим свойствам топологических пространств – теорема 5.

Постановка задачи о распространении накрывающей гомотопии. Пусть G есть компактная группа. Рассмотрим квадратную коммутативную G -диаграмму $\mathcal{D}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X} \\ \parallel & & \downarrow f \\ \mathbb{T} \times [0, 1] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array}$$

в которой $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$ есть замкнутая G -подпространство, а f , φ и ψ суть G -отображения. Скажем, что диаграмма $\mathcal{D}$ является *подходящей* (соответственно: является *слабо подходящей*) для G -отображения f , если

- (а) φ является изовариантным отображением (соответственно: также ψ индуцирует гомеоморфизм $\psi: T \times [0, 1] \rightarrow Y$ пространств орбит);
- (б) $(f^{-1} \circ \psi)(G(u) \times I)$ имеет одноорбитный тип (G_u) для всех $u \in T$.

Для подходящей коммутативной диаграммы $\mathcal{D}$ справедливо следующее:

- (1) орбитные типы пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{T}$ связаны соотношением $\text{Orb}_{\mathbb{T}} \subset \text{Orb}_{\mathbb{X}}$;
- (2) если отображение f является изовариантным, то отображение ψ тоже является изовариантным.

Если $\mathcal{D}$ является подходящей диаграммой, а f есть P -орбитная проекция, то

- (3) индуцированное отображение $\psi_P: \mathbb{T}/P \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$, задаваемое формулой $(\psi_P)(P \cdot u, t) = \psi(u, t)$, корректно определено и является изовариантным вложением.

Скажем, что G -отображение $\hat{\varphi}: \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ *расщепляет диаграмму $\mathcal{D}$* , если $\hat{\varphi}$ есть поднятие ψ относительно f (т.е. $f \circ \hat{\varphi} = \psi$) и $\hat{\varphi} = \text{ext } \varphi$. В силу (б) отображение $\hat{\varphi}$ необходимо является изовариантным (т.е. $\varphi = \hat{\varphi}$ на $\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}$).

Скажем, что *задача о распространении изовариантной накрывающей гомотопии* (коротко, ЗРНГ) для G -отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ разрешима (слабо разрешима), если любая подходящая G -диаграмма (слабо подходящая G -диаграмма) $\mathcal{D}$ для f допускает расщепление. В этом случае будем говорить, что G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ является *Isov-расслоением Гуревича* (слабым Isov-расслоением Гуревича). Ясно, что любое Isov-расслоение Гуревича является слабым Isov-расслоением Гуревича. Следующий результат является главным в работе.

ТЕОРЕМА 2. *Любая орбитная проекция $p: \mathbb{X} \rightarrow X$ является Isov-расслоением Гуревича.*

Если теперь применить критерий эквиморфности к изовариантному отображению $\hat{\varphi}$, расщепляющему слабо подходящую G -диаграмму $\mathcal{D}$, в которой отсутствует $\mathbb{S}$, то получим распространение на произвольные компактные группы известной теоремы Пале об эквивариантном типе пространства, имеющем орбитный тип произведения $\mathbb{W} \times [0, 1]$ (см. [1]).

Доказательство теоремы 2 основывается на следующем результате, имеющим и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\pi: G \rightarrow H$ есть эпиморфизм компактных групп, ядро $P = \text{Ker } \pi$ которого является группой Ли. Тогда любая P -орбитная проекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{X}/P$ является Isov-расслоением Гуревича.*

Для редуцирования теоремы 2 к теореме 3 разложим G -пространство $\mathbb{X}$ в ряд Ли $\{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$. Так как $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ есть компактная группа Ли, то в силу теоремы 3 $P_{\alpha+1}^{\alpha+1}$ -орбитная проекция $\pi_{\alpha+1}^{\alpha+1}: \mathbb{X}_{\alpha+1} \rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ является Isov-расслоением Гуревича для всех $\alpha < \tau$. Рассуждая далее по трансфинитной индукции, получим, что предельная орбитная проекция $\pi: \mathbb{X} \rightarrow X$ тоже является Isov-расслоением Гуревича.

Гомотопическое представление категории ISOV. На пространстве орбит X G -пространства $\mathbb{X}$ будем рассматривать *стратификацию* $\{X_{(H)} \mid H < G\}$, порожденную орбитными типами (при этом само X будем называть *$\mathcal{S}$ -пространством*); отображение $\alpha: X \rightarrow E$ $\mathcal{S}$ -пространств назовем *сохраняющим стратификацию* (или кратко, *$\mathcal{S}$ -отображением*), если

$$\alpha(X_{(H)}) \subset E_{(H)} \quad \text{для любой подгруппы } H < G.$$

Аналогично определяется *$\mathcal{S}$ -гомотопия* $H: X \times I \rightarrow E$ между отображениями, сохраняющими стратификацию (т.е. $H(X_{(H)} \times I) \subset E_{(H)}$ для любой $H < G$).

Послойным произведением пространств C и B относительно отображений $C \xrightarrow{g} A$ и $B \xrightarrow{f} A$ называется подмножество

$$\{(c, b) \mid g(c) = f(b)\} \subset C \times B,$$

которое обозначается через $C_g \times_f B$, или кратко $g^*(B)$ или $f^*(C)$. Проектирования $D = C_g \times_f B$ на сомножители C и B определяют отображения $f^*: D \rightarrow C$ и $g^*: D \rightarrow B$. Будем f^* называть *отображением*, *параллельным* f , а g^* – *отображением*, *параллельным* g .

Критерий эквиморфности (предложение 2) позволяет связать изовариантные отображения с послойными произведениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ есть изовариантное отображение, $\tilde{h}: Y \rightarrow X$ – отображение пространств орбит, порожденное h . Тогда G -отображение h и G -отображение $(\tilde{h})^*: (\tilde{h})^*(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$, параллельное $\tilde{h}$, эквивморфны, т.е. существует такой G -гомеоморфизм $\theta: (\tilde{h})^*(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{Y}$, что $h \circ \theta = (\tilde{h})^*$ (тем самым, $\mathbb{Y}$ отождествляется с послойным произведением $\tilde{h}^*(\mathbb{X})$).

С помощью теоремы 2 и предложения 1 устанавливается эквиморфность G -пространств, индуцированных $\mathcal{S}$ -отображениями, которые соединяются $\mathcal{S}$ -гомотопией:

ТЕОРЕМА 4. Если $\mathcal{S}$ -отображения $\alpha: X \rightarrow E$ и $\beta: X \rightarrow E$ соединяются $\mathcal{S}$ -гомотопией, то послойные произведения

$$\alpha^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_\pi \times_\alpha X \quad \text{и} \quad \beta^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_\pi \times_\beta X$$

эквиморфны (здесь $\pi: \mathbb{E} \rightarrow E$ есть орбитная проекция).

Если G -пространство $\mathbb{E}$ есть IsoV-AE, то верно и обратное: если $\alpha^*(\mathbb{E}) \cong_G \beta^*(\mathbb{E})$, то $\mathcal{S}$ -отображения $\alpha: X \rightarrow E$ и $\beta: X \rightarrow E$ соединяются $\mathcal{S}$ -гомотопией.

Через $\mathcal{S}\text{-HOMOT}_E$ обозначим категорию, объектами которой являются $\mathcal{S}$ -гомотопические классы $[\alpha]: X \rightarrow E$ $\mathcal{S}$ -отображений, а морфизм между $\mathcal{S}$ -отображениями $[\alpha], [\beta]: Y \rightarrow E$ есть $\mathcal{S}$ -гомотопический класс такого $\mathcal{S}$ -отображения $h: X \rightarrow Y$, что $\alpha = \beta \circ h$.

Сопоставим объекту $[\alpha]: X \rightarrow E$ категории $\mathcal{S}\text{-HOMOT}_E$ G -пространство, совпадающее с послойным произведением $\mathbb{X} \Leftarrow \alpha^*(\mathbb{E})$, а морфизму $[h]: X \rightarrow Y$ – изовариантное отображение

$$[h]_*: \mathbb{X} = \alpha^*(\mathbb{E}) \cong_G (\alpha')^*(\mathbb{E}) \xrightarrow{h_*} \beta^*(\mathbb{E}) \Leftarrow \mathbb{Y}, \quad \text{где} \quad h_*(x, e) = (h(x), e)$$

Из теоремы 4 легко следует, что так построенный ковариантный функтор Φ при определенных условиях осуществляет изоморфизм изовариантной гомотопической категории ISOV-HOMOT и $\mathcal{S}\text{-HOMOT}_E$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbb{E}$ есть IsoV-AE-пространство. Тогда

$$\Phi: \mathcal{S}\text{-HOMOT}_E \rightarrow \text{ISOV-HOMOT}$$

есть эквивалентность категорий.

Теорему 5 можно рассматривать как дополнительный аргумент в защиту тезиса о том, что изовариантная категория представляет собой обобщение категории главных G -расслоений.

1. Предварительные сведения и результаты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений и если не оговорено противное, предполагаются метрическими (непрерывными); рассматриваются только действия компактных групп.

Приведем основные понятия теории G -пространств [12]. Под действием компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ понимается непрерывное отображение μ из произведения $G \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, для которого

$$\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(g \cdot h, x), \quad \mu(e, x) = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{X}, \quad g, h \in G$$

(здесь e – единица группы G). Как правило, вместо $\mu(g, x)$ будем писать $g \cdot x$, или просто gx . Пространство $\mathbb{X}$ с действием группы G называется G -пространством. Отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ двух G -пространств называется G -отображением или эквивариантным отображением, если $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$, $g \in G$.

Заметим, что G -пространства и G -отображения образуют категорию, которую мы обозначим через G -TOP или EQUIV, если ясно о какой группе G идет речь. Мы свободно будем использовать символ “ G –” или “Equiv–”, означающий эквивариантный. Если “***” есть известное понятие из неэквивариантной топологии, то “ G –***” или “Equiv–***” обозначает соответствующий эквивариантный аналог.

Орбитой $G(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ называется подмножество $\{g \cdot x \mid g \in G\} = G \cdot x$, являющееся замкнутым. Естественное отображение

$$\pi = \pi_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow X, \quad x \mapsto G(x),$$

пространства $\mathbb{X}$ в пространство фактор-разбиения $X = \mathbb{X}/G$ назовем *орбитной проекцией*. Пространство фактор-разбиения X , наделенное факторной топологией, порожденное π , будем называть *пространством орбит*. Подмножество A называется *инвариантным* или G -*подмножеством*, если $\pi^{-1}\pi(A) = G \cdot A$.

Через Conj_G обозначим множество всех классов сопряженности замкнутых подгрупп G , а через Orb_G – семейство всех однородных пространств с точностью до эквиворфности. Если ввести на этих множествах частичный порядок:

$$\begin{aligned} (K) \leq (H) &\iff K \text{ содержится в некотором представителе } H' \text{ класса } (H), \\ G/K \geq G/H &\iff \text{существует эквивариантное отображение } f: G/K \rightarrow G/H, \end{aligned}$$

то биекция

$$(H) \in \text{Conj}_G \mapsto G/H \in \text{Orb}_G$$

обращает этот порядок. С учетом этого мы будем (там, где не возникает двусмысленности) эти множества отождествлять и использовать единое название – *множество G -орбитных типов* и единое обозначение – Orb_G .

Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ следующее подмножество:

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки x* . Для любой замкнутой подгруппы $H < G$ введем в рассмотрение следующие подмножества $\mathbb{X}$:

- $\mathbb{X}^H = \{x \in \mathbb{X} \mid H \cdot x = x\} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \subset G_x\}$ (множество H -неподвижных точек);
- $\mathbb{X}_H = \{x \in \mathbb{X} \mid H = G_x\}$;
- $\mathbb{X}_{(H)} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \text{ сопряжена с } G_x\}$ (лучок орбит типа (H)).

Через $\text{Orb}_{\mathbb{X}}$ обозначим $\{(G_x) \mid x \in \mathbb{X}\} \subset \text{Orb}_G$ – семейство орбитных типов $\mathbb{X}$.

Эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *изовариантным*, если f сохраняет стабилизаторы, т.е. $G_x = G_{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Категорию, образованную G -пространствами и изовариантными отображениями, обозначим через ISOV (всегда будет ясно о какой группе G идет речь). Следующий факт – *критерий эквиморфности* – широкоизвестен (см. [12; глава 1, пример 10]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Изовариантное непрерывное отображение является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда порожденное им отображение орбит является гомеоморфизмом.*

Рассмотрим компактную группу G и метрическое H -пространство $\mathbb{Y}$, где $H < G$, а также диагональное действие $h \cdot (g, y) = (g \cdot h^{-1}, h \cdot y)$ группы H на произведении $G \times \mathbb{Y}$. Обозначим через $[g, y]$ элемент

$$H \cdot (g, y) = \{(g \cdot h^{-1}, h \cdot y) \mid h \in H\}$$

пространства орбит $(G \times \mathbb{Y})/H$. Формулой

$$g_1 \cdot [g, y] = [g_1 \cdot g, y], \quad \text{где } g, g_1 \in G, \quad y \in \mathbb{Y},$$

корректным образом задается непрерывное действие G на $(G \times \mathbb{Y})/H$, которое называется *скрученным произведением* и обозначается через $G \times_H \mathbb{Y}$. Любое G -пространство $\mathbb{A}$, допускающее G -отображение $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow G/H$ в однородное пространство, эквиморфно скрученному произведению $G \times_H \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} = \alpha^{-1}([H])$ есть H -пространство, поскольку непрерывное G -отображение $\varphi: G \times_H \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{A}$, заданное формулой $\varphi([g, s]) = g \cdot s$, является эквиморфизмом. Доказательство следующего факта мы оставляем читателю.

ЛЕММА 1. *Пусть G -орбитный тип скрученного произведения $G \times_H \mathbb{S}$ одноэлементен. Если пространство орбит $\mathbb{S}/H$ связно, то H -орбитный тип $\mathbb{S}$ тоже одноэлементен.*

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G -отображений в категории $\mathcal{C}$, совпадающей с ISOV или с EQUIV. Пространство $\mathbb{X}$ с действием компактной группы G называется *абсолютным окрестностным $\mathcal{C}$ -экстензором* (обозначается $\mathbb{X} \in \mathcal{C}\text{-ANE}$), если каждый морфизм $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ из $\mathcal{C}$, определенный на замкнутом G -подмножестве $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ G -пространства $\mathbb{Z}$ и называемый *частичным $\mathcal{C}$ -морфизмом*, может быть продолжен на некоторую G -окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$ до морфизма $\hat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X} \in \mathcal{C}$. Если всегда возможно сделать $\mathbb{U}$ равным $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *абсолютным $\mathcal{C}$ -экстензором*, $\mathbb{X} \in \mathcal{C}\text{-AE}$. Если действующая группа G тривиальна (т.е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие *абсолютных [окрестностных] экстензоров* для метрических пространств – A[N]E (см. [13]).

Абсолютный [окрестностный] $\mathcal{C}$ -экстензор будет называться:

- эквивариантным [окрестностным] экстензором (кратко, Equiv-A[N]E-пространством), если $\mathcal{C} = \text{EQUIV}$;
- изовариантным [окрестностным] экстензором (кратко, IsoV-A[N]E-пространством), если $\mathcal{C}$ совпадает с категорией ISOV.

Отметим, что IsoV-AE-пространство совпадает с универсальным G -пространством в смысле Пале, а его пространство орбит классифицирует G -пространства. Если $\mathcal{C}$ -гомотопия $H: \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$ соединяет морфизмы $f, g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ категории $\mathcal{C}$, то будем кратко писать:

- $f \simeq_{\text{Equiv}} g$, если $\mathcal{C} = \text{EQUIV}$,
- $f \simeq_{\text{IsoV}} g$, если $\mathcal{C} = \text{ISOV}$.

Замкнутая подгруппа $H < G$ компактной группы G называется *экстензорной*, если однородное пространство G/H метризуемо и является $G\text{-ANE}$ -пространством.

Известно, что если $H < G$ является экстензорной подгруппой, то существует нормальная подгруппа $P \triangleleft G$ такая, что $P < H$ и G/P есть компактная группа Ли, а также G/H есть топологическое многообразие и G/H конечномерно и локально связно. Каждое из трех приведенных свойств характеризует экстензорные подгруппы [14]. Из существования в любой компактной группе как угодно малых нормальных экстензорных подгрупп следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой окрестности $\mathcal{O}(H) \subset G$ подгруппы H компактной группы G существует такая экстензорная подгруппа $H' < G$, что $H \subset H' \subset \mathcal{O}(H)$.

Эти и другие свойства экстензорных подгрупп изложены в [15], [5]. Известное понятие евклидова окрестностного G -ретракта над пространством [7] может быть обобщено следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. G -Отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется локально эквивариантно мягким, если для любой допустимой относительно f G -диаграммы¹

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Y} \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\ \mathbb{A} & \hookrightarrow & \mathbb{W} \end{array}$$

существует окрестностное G -продолжение $\widehat{\varphi}: \mathcal{U}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{X}$ отображения φ , являющееся поднятием ψ .

Несложно теорему Дика [7; п. 7.6.4.] усилить до следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $K < H < G$, а $K < G$ есть экстензорная подгруппа. Тогда естественное G -отображение

$$p: G/K \rightarrow G/H, \quad g \cdot K \mapsto g \cdot H,$$

является эквивариантно локально мягким.

Эпиморфизм $\pi: G \rightarrow H$ компактных групп с ядром P порождает на G -пространстве $\mathbb{X}$ отношение эквивалентности $x \sim x' \Leftrightarrow x' \in P \cdot x$. Ясно, что фактор-пространство $\mathbb{X}/P$ по этому отношению совпадает с $\{P \cdot x \mid x \in \mathbb{X}\}$ и является H -пространством:

$$h \cdot (P \cdot x) = P \cdot (g \cdot x), \quad \text{где } g \in \pi^{-1}(h).$$

Если $y = P \cdot x$, то стабилизатор H_y совпадает с $\pi(G_x)$.

Назовем фактор-отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/P$ P -орбитной проекцией. Если $P = G$, то f совпадает с орбитной проекцией $p: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}/G$. Поскольку композиция P -орбитной проекции f с орбитной проекцией H -пространства $(\mathbb{X}/P)/H$ есть совершенное отображение, то сама она является тоже совершенной сюръекцией и обладает следующими свойствами:

$$f(gx) = \pi(g) \cdot f(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{X}, \quad g \in G, \quad (1)$$

$$\pi(G_x) = H_{f(x)} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{X}, \quad (2)$$

$$\text{равенство } f(x) = f(x') \text{ влечет принадлежность } x \text{ и } x' \text{ одной } G\text{-орбите.} \quad (3)$$

Оказывается, эти свойства полностью характеризуют P -орбитную проекцию [5].

¹То есть G -диаграммы, в которой $\mathbb{A} \subset \mathbb{W}$ есть замкнутое G -подпространство, f , φ и ψ суть G -отображения, а также $f \circ \varphi = \psi|_{\mathbb{A}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Совершенная сюръекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ из G -пространства $\mathbb{X}$ на H -пространство $\mathbb{Y}$ является P -орбитной проекцией в том и только том случае, когда f обладает свойствами (1)–(3).*

Пусть $K < G$, $L \triangleq \pi(K) < H$ и $\pi' \triangleq \pi: K \rightarrow L$ – эпиморфизм компактных групп с ядром $Q = P \cap K$. Ясно, что

отображение $p: G/K \rightarrow H/L$, $p(g \cdot K) = \pi(g) \cdot L$, является P -орбитной проекцией. (4)

Пусть также $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ есть P -орбитная проекция, а $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow G/K$ есть отображение среза. Ясно, что $\mathbb{X}' \triangleq \varphi^{-1}([K])$ является K -пространством, а $\mathbb{Y}' \triangleq f(\mathbb{X}) - L$ -пространством. Из предложения 4 легко следует свойство наследуемости орбитных проекций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Отображение ограничения $f' \triangleq f: \mathbb{X}' \rightarrow \mathbb{Y}'$ является Q -орбитной проекцией.*

Пусть $K < G$ и $P \setminus K \neq \emptyset$. Тогда существует такая экстензорная подгруппа $\bar{K} < G$, $K < \bar{K} < G$, что отображение

$$\bar{p}: G/\bar{K} \rightarrow H/\bar{L}, \quad \bar{p}(g \cdot \bar{K}) = \pi(g) \cdot \bar{L}, \quad \text{где } \bar{L} \triangleq \pi(\bar{K}) < H,$$

является нетривиальной P -орбитной проекцией (и в силу теоремы 6 является эквивариантно локально мягким).

Пусть заданы экстензорная подгруппа $K < G$, G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ и замкнутое G -подмножество $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}$, а также коммутативная G -диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_0 & \xrightarrow{\varphi} & G/K \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{\psi} & G/H \end{array}$$

Так как в силу теоремы 6 естественное G -отображение $p: G/K \rightarrow G/H$, $K < H < G$, является эквивариантно локально мягким, а коммутативную G -диаграмму легко трансформировать в допустимую G -диаграмму $G/K \xleftarrow{\varphi} \mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X} \xrightarrow{\psi \circ f} G/H$ относительно p , то отсюда легко следует результат, который можно рассматривать как распространение теоремы о продолжении среза G -пространства на случай G -отображений.

ТЕОРЕМА 7. *Существует такое G -продолжение $\hat{\varphi}: \mathcal{O}(\mathbb{X}_0) \rightarrow G/K$ отображения φ на G -окрестность $\mathcal{O}(\mathbb{X}_0)$, что $p \circ \hat{\varphi} = \psi \circ f \downarrow$.*

Ряд Ли G -пространства. В компактной группе G рассмотрим ряд Ли $\{P_\alpha \triangleleft G\}$ нормальных подгрупп, индексированных ординалами $\alpha < \tau$ (см. [14]). Это означает, что

$$P_1 = G, \quad P_\beta < P_\alpha \quad \text{для всех } \alpha < \beta,$$

$$P_\alpha/P_{\alpha+1} \quad \text{есть компактная группа Ли для всех } \alpha < \tau, \quad \bigcap \{P_\alpha \mid \alpha < \tau\} = \{e\}. \quad (5)$$

В этом случае G есть предел $\varprojlim \{G/P_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$ обратной системы фактор-групп $\{G/P_\alpha\}$ и естественных эпиморфизмов $\chi_\alpha^\beta: G/P_\beta \rightarrow G/P_\alpha$, $\alpha < \beta$. При этом ядро соседних проекций $\chi_\alpha^{\alpha+1}$ совпадает с компактной группой Ли $P_\alpha/P_{\alpha+1}$.

Рассмотрим более общую конструкцию. Пусть $\pi_\alpha^\beta: \mathbb{X}_\beta \rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ есть естественная проекция из $\mathbb{X}_\beta = \mathbb{X}/P_\beta$ в $\mathbb{X}_\alpha = \mathbb{X}/P_\alpha$. Тогда π_α^β является P_α/P_β -орбитной проекцией, а отображение $\pi: \mathbb{X} \rightarrow \varprojlim \{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$, заданное формулой $\pi(x) = \{P_\alpha \cdot x\}$, является эквиморфизмом. Доказательство этого состоит в непосредственном применении критерия эквиморфности. Заметим, что соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ являются P -орбитными проекциями с компактной группой Ли $P = P_\alpha/P_{\alpha+1}$. Будем говорить, что обратная система $\{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$ есть *ряд Ли G -пространства $\mathbb{X}$* .

Часто возникает обратная ситуация, когда имеется обратная система, но нет самого G -пространства. Известный результат [16; гл. 2, § 6, теорема 11] может быть обобщен следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть $\{P_\alpha \triangleleft G\}$ есть ряд Ли, P_α^β , $\alpha < \beta$, есть ядро гомоморфизма φ_α^β , а $g_\alpha^\beta: \mathbb{Z}_\beta \rightarrow \mathbb{Z}_\alpha$ есть P_α^β -орбитная проекция, причем

$$g_\alpha^\beta \circ g_\beta^\gamma = g_\alpha^\gamma \quad \text{для всех } \alpha < \beta < \gamma.$$

Тогда $\mathbb{Z} = \varprojlim \{\mathbb{Z}_\alpha, g_\alpha^\beta\}$ есть G -пространство, $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}/P_\alpha$, а обратная система $\{\mathbb{Z}_\alpha, g_\alpha^\beta\}$ есть ряд Ли $\mathbb{Z}$.

Характеризация G -пространств вида $G/H \times [0, 1]$, возможно, известна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(H)}$, а $Z = [0, 1]$, то $\mathbb{Z}$ эквиморфно $G/H \times [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественную проекцию $\pi: \mathbb{Z}_H \rightarrow Z$ можно рассматривать как орбитную по действию нормализатора $N(H)$ на $\mathbb{Z}_H$, $Z = \mathbb{Z}_H/N(H)$. Из предложения 7 следует, что существует сечение $\sigma: Z \rightarrow \mathbb{Z}_H$ отображения π . Тогда $\varphi: G/H \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varphi(gH, t) = g \cdot \sigma(t)$, есть корректно определенный эквиморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть компактная группа G действует на пространстве $\mathbb{X}$ одноорбитного типа. Тогда орбитная проекция $p: \mathbb{X} \rightarrow X$ есть расслоение Гуревича.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим G -пространство $\mathbb{X}$ в ряд Ли $\{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$. Поскольку $P = P_\alpha/P_{\alpha+1}$ есть компактные группы Ли, то в силу леммы 3 соседние P -орбитные проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ являются локально тривиальными расслоениями и, следовательно, расслоениями Гуревича.

ЛЕММА 3. Любая P -орбитная проекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ из G -пространства $\mathbb{X}$ одноорбитного типа на H -пространство $\mathbb{Y}$, где ядро P эпиморфизма $\pi: G \rightarrow H$ есть компактная группа Ли, является локально тривиальным расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3 легко следует из теоремы о продолжении среза.

2. Изовариантные экстензоры

Теорема 1, очевидно, вытекает из более точного результата, а именно из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть для всех $i \geq 1$ Equiv-AE -пространство $\mathbb{X}_i$ является IsoV -порождающим пространством. Тогда

для любого частичного G -отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X} \Leftarrow \prod \{\mathbb{X}_i \mid i \geq 1\}$ существует такое G -отображение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, являющееся продолжением φ , что $\psi|_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение. (6)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{X} \in \text{Equiv-AE}$, то достаточно будет для любого эквивариантного отображения $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ найти такое G -отображение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$, продолжающее $\varphi = \widehat{\varphi}|_{\mathbb{A}}$, что $\psi|_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение. Поскольку $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ замкнуто, то возможно выбрать последовательность окрестностей $\mathbb{Z} = \mathbb{U}_0 \ni \mathbb{U}_1 \ni \dots$ и G -функций $\chi_i: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$, $i \geq 1$, таких, что

$$\bigcap \mathbb{U}_i = \mathbb{A}, \quad \chi_i^{-1}(0) \supset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{U}_i, \quad \chi_i^{-1}(1) \supset \mathbb{U}_{i+1}^2.$$

Представим отображение $\widehat{\varphi}$ в виде $\prod \widehat{\varphi}_i$, где $\widehat{\varphi}_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}_i$ есть эквивариантное отображение. Зафиксируем изовариантное отображение $e_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}_i$ (существующее, так как $\mathbb{X}_i$ является IsoV -порождающим), и пусть $H_i: \mathbb{Z} \times I \rightarrow \mathbb{X}_i$ есть Equiv -гомотопия, соединяющая e_i с $\widehat{\varphi}_i$ (существующая, так как $\mathbb{X}_i \in \text{Equiv-AE}$). Тогда искомое отображение ψ задается формулой

$$\begin{aligned} \psi|_{\mathbb{A}} &= \widehat{\varphi}|_{\mathbb{A}} = \varphi, \\ (\psi|_{\mathbb{U}_i \setminus \mathbb{U}_{i+1}})(z) &= \widehat{\varphi}_1 \times \dots \times \widehat{\varphi}_{i-1} \times H_i(z, \chi_i(z)) \times e_{i+1} \times \dots \quad \text{при } i \geq 0. \end{aligned}$$

Зафиксируем замкнутое топологическое вложение $j: X \hookrightarrow L$ пространства орбит произвольного G -пространства $\mathbb{X}$ в некоторое линейное нормированное пространство L [17]. Поскольку счетная степень $\mathbb{J}$ метрического конуса $\text{Con } \mathbb{T}$ над $\mathbb{T} = \bigsqcup \{G/H \mid G/H \in G\text{-ANE}\}$ является IsoV -порождающим [5], то существует изовариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{J}$. Очевидно, что произведение $(j \circ p) \times f$ есть замкнутое топологическое G -вложение $\mathbb{X}$ в G -пространство $\mathbb{Y} \Leftarrow L \times \mathbb{J}$, которое, как легко видеть, есть IsoV-AE . Таким образом, нами доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. Любое G -пространство допускает замкнутое G -вложение в IsoV-AE -пространство $L \times \mathbb{J}$.

Из теорем 9 и 8 легко вывести важное соотношение между инъективными объектами изовариантной и эквивариантной категорий.

ТЕОРЕМА 10. Для любого $\text{IsoV-A}[N]\text{E}$ -пространства $\mathbb{X}$ справедливо свойство (6), и следовательно, любое $\text{IsoV-A}[N]\text{E}$ -пространство является $\text{Equiv-A}[N]\text{E}$ -пространством.

Без доказательства отметим, что эквивариантный гильбертов куб $\mathbb{Q}$ (для компактной метрической группы G) есть IsoV-AE . С другой стороны, если $\mathbb{X}$ есть компактное IsoV-AE -пространство, то произведение $\mathbb{X}$ и гильбертова куба Q эквивалентно $\mathbb{Q}$. Другими примерами IsoV-AE -пространств могут служить: эквивариантное пространство $\mathbb{L}_2$; пространство $C(G, L)$ (с метрикой равномерной сходимости) всех непрерывных отображений $f: G \rightarrow L$ в эквивариантное гильбертово пространство L веса $w(G)$, наделенное непрерывным действием группы G по формуле

²Будем говорить, что вложение $A \subset B$ строгое, и писать $A \in B$, если $\text{Cl } A \subset \text{Int } B$.

$(g \cdot f)(h) = f(g^{-1} \cdot h)$, где $f \in C(G, L)$, а $g, h \in G$. Эти и другие результаты теории изовариантных экстензоров будут изложены в последующих публикациях автора.

Легко привести пример Equiv-AE -пространства $\mathbb{Z} \notin \text{IsoV-AE}$. Приведем несколько результатов, позволяющих судить о степени расхождения этих двух классов: $\mathbb{X} \in \text{Equiv-AE}$ влечет свойство равностепенной локальной стягиваемости (equi-LC) для семейства $\{\mathbb{X}^H \mid H < G\}$, а $\mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$ влечет $\{\mathbb{X}_H \mid H < G\} \in \text{equi-LC}$; $\text{Con } \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$ и $\mathbb{X}^G \in \text{AE}$ влечет $\mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$.

По-видимому, следующие вопросы представляют определенный интерес в связи с гипотезой Гильберта–Смита [18]: если действующая группа G нетривиальна, а $\mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$, то $\dim \mathbb{X} = \infty$? $\dim X = \infty$?

3. Соединение расщеплений

Ограничением подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ на инвариантное подмножество $U \subset T$ называется диаграмма $\mathcal{D}_U$,

$$\begin{array}{ccc} U_S \times [0, 1] \cup U \times \{0\} & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathbb{X}_U \rightleftharpoons f^{-1}(\mathbb{Y}_U) \\ \parallel & & \downarrow f \\ U \times [0, 1] & \xrightarrow{\psi_U} & \mathbb{Y}_U \rightleftharpoons \psi(U \times [0, 1]) \end{array}$$

в которой φ_U есть ограничение φ на $U_S \times I \cup U \times \{0\}$, $\psi_U \rightleftharpoons \psi|_{U \times I}$ и $U_S \rightleftharpoons U \cap S$. Ясно, что $\mathcal{D}_U$ является подходящей диаграммой; если диаграмма $\mathcal{D}$ расщепляется, то и $\mathcal{D}_U$ тоже.

Следующее утверждение о соединении расщеплений является модификацией рассуждений, использованных Пале в [1], в более общую ситуацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ есть открытое локально-конечное G -покрытие T . Если ограничение $\mathcal{D}_\lambda$ подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ на T_λ расщепляемо для любого $\lambda \in \Lambda$, то диаграмма $\mathcal{D}$ тоже расщепляема.

Сначала рассмотрим случай двухэлементного индексного множества Λ .

ЛЕММА 4 (о соединении двух расщеплений). Пусть $\{T_1, T_2\}$ есть открытое G -покрытие T , $\mathcal{D}_i$ есть ограничение подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ на T_i . Если G -гомеоморфизмы $g_i: T_i \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}_{T_i}$, $i \leq 2$, расщепляют диаграммы $(\mathcal{D})_i$ соответственно, то существует G -гомеоморфизм $g: T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, расщепляющий диаграмму $\mathcal{D}$. При этом

$$g = g_i \quad \text{на} \quad T_i \setminus T_0, \quad \text{где} \quad T_0 \rightleftharpoons T_1 \cap T_2. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4 будет основываться на эффекте расщепления гомотопии.

ЛЕММА 5 (о расщепляющей гомотопии). Пусть G -гомеоморфизмы $\widehat{\varphi}_i: T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, $i = 1, 2$, расщепляют подходящую диаграмму $\mathcal{D}$. Тогда существует изовариантная G -гомотопия $H_s: T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, $0 \leq s \leq 1$, соединяющая $\widehat{\varphi}_1$ и $\widehat{\varphi}_2$, такая, что H_s расщепляет диаграмму $\mathcal{D}^3$ для всех $0 \leq s \leq 1$.

³И, стало быть, H_s является G -гомеоморфизмом.

(Доказательство леммы 5 приведено ниже – после завершения доказательства предложения 8.)

В силу леммы 5 о расщепляющей гомотопии существует

$$\begin{aligned} &\text{изовариантная } G\text{-гомотопия } H_s: \mathbb{T}_0 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}_{\mathbb{T}_0}, 0 \leq s \leq 1, \\ &\text{соединяющая } g_1|_{\mathbb{T}_0} \text{ и } g_2|_{\mathbb{T}_0}, \text{ такая, что } G\text{-гомеоморфизм } H_s \\ &\text{расщепляет диаграмму } \mathcal{D}_{\mathbb{T}_0} \text{ для всех } 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_1$ являются дизъюнктными замкнутыми подмножествами нормального пространства $\mathbb{T}$, то существует такая инвариантная функция $\xi: \mathbb{T} \rightarrow [1, 2]$, что

$$\begin{aligned} \xi &\equiv 0 && \text{в некоторой окрестности } \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_2, \\ \xi &\equiv 1 && \text{в некоторой окрестности } \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, полагаем

$$g(u, t) = \begin{cases} g_1(u, t), & \text{если } (u, t) \in (T \setminus T_2) \times I, \\ H_{\xi(u)}(u, t), & \text{если } (u, t) \in T_0 \times I, \\ g_2(u, t), & \text{если } (u, t) \in (T \setminus T_1) \times I. \end{cases}$$

Непрерывность получающегося отображения $g: \mathbb{T} \times I \rightarrow \mathbb{Z}$ проверяется непосредственно с помощью (9). То, что g расщепляет диаграмму $\mathcal{D}$ следует из (8). Лемма 4 доказана.

Дальнейшее доказательство предложения 8 о соединении расщеплений осуществляется стандартной трансфинитной индукцией по вполне упорядоченному индексному множеству Λ с помощью леммы 4 о соединении двух расщеплений. Стабилизация строящегося отображения g , расщепляющего диаграмму $\mathcal{D}$, и его непрерывность следуют из локальной конечности покрытия $\{\mathbb{T}_\lambda\}$ и свойства (7). Все детали остаются на рассмотрение читателю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Из условия легко следует, что $h \rightleftharpoons (\widehat{\varphi}_1)^{-1} \circ \widehat{\varphi}_2$ есть G -автогомеоморфизм $\mathbb{T} \times [0, 1]$, тождественный на $\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}$. Так как

$$\psi = p \circ \widehat{\varphi}_2 = (\psi \circ \widehat{\varphi}_1^{-1}) \circ \widehat{\varphi}_2 = \psi \circ h, \quad (10)$$

то отсюда следует, что h имеет вид $h(z, t) = (\varphi_t(z), t)$, где $\varphi_t: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ есть непрерывное (по $t \in T$) семейство G -гомеоморфизмов. Ясно, что $\varphi_0 = \text{Id}$ и $\varphi_t|_{\mathbb{S}} = \text{Id}$ для всех $t \in I$.

Поскольку в силу (10) имеем $\psi(w) = \psi(P \cdot w) = \psi(h(P \cdot w))$ для всех $w = (z, t) \in \mathbb{T} \times I$, то $(\psi_P)(P \cdot z, t) = (\psi_P)(P \cdot \varphi_t(z), t)$. Принимая во внимание, что ψ_P есть H -гомеоморфизм, получаем

$$P \cdot z = P \cdot \varphi_t(z) \quad \text{для всех } t \in I. \quad (11)$$

После этого полагаем

$$h_s(u, t) = (\varphi_{s \cdot t}(u), t): \mathbb{T} \times I \rightarrow \mathbb{T} \times I, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Непосредственно проверяется, что h_s есть непрерывное семейство G -гомеоморфизмов, а также:

$$h_1 = h, \quad h_0 = \text{Id}, \quad h_s = h \quad \text{на } \mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}. \quad (12)$$

С помощью (11) легко вывести, что

$$\psi = \psi \circ h_s \quad \text{для всех } s \in I. \quad (13)$$

Наконец, искомая изовариантная гомотопия определяется формулой

$$H_s \Rightarrow \widehat{\varphi}_1 \circ h_s, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Все необходимые свойства H_s следуют из (12) и (13).

4. Доказательство теоремы 3

В теореме 3 достаточно доказывать, что P -орбитная проекция $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{X}/P$ является Isoв-расслоением Гуревича. В самом деле, имеется если подходящая диаграмма $\mathcal{D}$ для P -орбитной проекции f из теоремы 3, то перейдем от $\mathbb{Y}$ к $\mathbb{Y}' \subset (T \times I) \times \mathbb{Y}$ – образу $\mathbb{T} \times I$ при G -отображении $q \times \psi: \mathbb{T} \times I \rightarrow (T \times I) \times \mathbb{Y}$, от $\mathbb{X}$ перейдем к $\mathbb{X}' \subset (T \times I) \times \mathbb{X}$ – прообразу $\mathbb{Y}'$ при P -орбитной проекции

$$f' = \text{Id} \times f: (T \times I) \times \mathbb{X} \rightarrow (T \times I) \times \mathbb{Y}$$

(здесь $q: \mathbb{T} \times I \rightarrow T \times I$ есть орбитная проекция). Через φ' и ψ' обозначим отображения

$$q \times \varphi: \mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{X}', \quad q \times \psi: \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}'$$

соответственно. Ясно, что P -орбитная проекция $f': \mathbb{X}' \rightarrow \mathbb{Y}'$ естественным образом вовлечена в подходящую диаграмму $\mathcal{D}'$, которая в силу того, что ψ' индуцирует гомеоморфизм пространств орбит, является слабо подходящей. В силу справедливости теоремы 3 для слабо подходящих диаграмм существует изовариантное G -отображение $\widehat{\varphi}': \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}'$, расщепляющее $\mathcal{D}'$. Искомым изовариантным G -отображением $\widehat{\varphi}: \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$, расщепляющим $\mathcal{D}$, является композиция $\widehat{\varphi}'$ с проекцией $(T \times I) \times \mathbb{X}$ на сомножитель $\mathbb{X}$.

Поскольку в любой вполне подходящей диаграмме $\mathcal{D}$ изовариантное отображение $\varphi: \mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{X}$ является замкнутым G -вложением, то при доказательстве теоремы 3, не теряя общности, можно считать, что

- 1) $\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}$ лежит в $\mathbb{X}$ как замкнутое подмножество, а φ есть тождественное вложение;
- 2) $\mathbb{Y} = (\mathbb{T}/P) \times I$ и $\psi_P: (\mathbb{T}/P) \times I \rightarrow \mathbb{Y}$ является тождественным отображением.
- 3) отображение $f|_{\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}}$ совпадает с ограничением канонической P -орбитной проекции $\mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow T \times [0, 1]$ на $\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}$.

Далее доказательство теоремы 3 о расщепляемости слабо подходящей G -диаграммы будет вестись индукцией по компактной группе Ли P с использованием метатеоремы Пале [1], доказательство которой основано на стабилизации убывающей по вложению последовательности компактных групп Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\mathcal{P}(H)$ есть свойство, которое зависит от компактной группы Ли H . Предположим, что $\mathcal{P}(H)$ верно для тривиальной группы $H = \{e\}$ и $\mathcal{P}(H)$ верно, если $\mathcal{P}(K)$ верно для любой собственной подгруппы $K < H$. Тогда $\mathcal{P}(H)$ верно для всех компактных групп Ли H .

Если $|P| = 1$, то эпиморфизм $\pi: G \rightarrow H$ есть изоморфизм, что тривиализует изучаемую ситуацию. Предположим теперь, что для любой собственной подгруппы $Q < P$ теорема 3 доказана, и покажем, что она справедлива для любой P -орбитной проекции $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Следующее утверждение сводит установление расщепляемости слабо подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ к случаю, когда отсутствуют P -неподвижные точки в $\mathbb{X}$.

ЛЕММА 6. *Если любая слабо подходящая диаграмма $\mathcal{D}$ с пустым множеством $\mathbb{X}^P$ расщепляема, то расщепляема любая слабо подходящая диаграмма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению существует изовариантное отображение $\varphi': (\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^P) \times I \rightarrow \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^P$, расщепляющее слабо подходящую диаграмму $\mathcal{D}_{\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^P}$. Доопределим отображение φ' , потребовав, чтобы на $\mathbb{T}^P \times I$ оно совпадало с ψ . Легко проверяется корректность определения и непрерывность φ' .

Пусть $\mathcal{D}$ есть слабо подходящая диаграмма. В силу леммы 6 достаточно далее рассматривать G -пространство $\mathbb{X}$ с $\mathbb{X}^P = \emptyset$ (что эквивалентно $P \setminus G_x \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathbb{X}$). Так как $\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}$ естественно содержится в $\mathbb{X}$, то $\mathbb{T}^P = \emptyset$.

Разберем сначала случай, когда $\mathbb{T}$ допускает нетривиальное отображение среза $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow G/K$, где $K < G$ есть экстензорная подгруппа с $P \setminus K \neq \emptyset$. В этом случае G -отображение $\beta \triangleq \alpha \circ \text{pr}_1: \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow G/K$, где $\text{pr}_1: \mathbb{T} \times I \rightarrow \mathbb{T}$ есть проекция на первый сомножитель, при переходе к P -орбитной проекции порождает отображение среза

$$\beta_P: \mathbb{Y} = (\mathbb{T}/P) \times [0, 1] \rightarrow G/(P \cdot K) = H/L, \quad \text{где } L \triangleq \pi(K) < H.$$

Через

$$p: G/K \rightarrow G/\pi^{-1}(\pi(K)) \cong H/L$$

обозначим естественное G -отображение, являющееся P -орбитной проекцией.

ЛЕММА 7. *Если частичное G -отображение*

$$\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\} \xrightarrow{\beta \upharpoonright} G/K,$$

имеет такое G -продолжение $\widehat{\beta}: \mathbb{X} \rightarrow G/K$, что $\beta_P \circ f = p \circ \widehat{\beta}$, то диаграмма $\mathcal{D}$ расщепляема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi' \triangleq \pi \upharpoonright: K \rightarrow L$ – эпиморфизм компактных групп с ядром $Q = P \cap K$. Так как $P \setminus K \neq \emptyset$, то Q есть собственная подгруппа группы Ли P .

Введем в рассмотрение следующие объекты: K -пространство $\mathbb{T}' \triangleq \alpha^{-1}([K])$ и его замкнутое подпространство $\mathbb{S}' \triangleq \mathbb{T}' \cap \mathbb{S}$, а также K -пространства $\mathbb{X}' \triangleq \widehat{\beta}^{-1}([K])$. Ясно, что L -пространство $\mathbb{Y}' \triangleq \beta_P^{-1}([L])$ совпадает с $f(\mathbb{X}')$. Предложение 5 о наследуемости орбитных проекций влечет, что отображение ограничения $f' \triangleq f \upharpoonright: \mathbb{X}' \rightarrow \mathbb{Y}'$ является Q -орбитной проекцией.

Так как $\widehat{\beta} = \text{ext}(\beta \upharpoonright_{\mathbb{S} \times [0, 1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}})$, то

$$\varphi(\mathbb{S}' \times I \cup \mathbb{T}' \times \{0\}) \subset \mathbb{X}', \quad \psi(\mathbb{T}' \times I) = \mathbb{Y}'.$$

Обозначим через

$$\varphi': \mathbb{S}' \times I \cup \mathbb{T}' \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{X}' \quad \psi': \mathbb{T}' \times I \rightarrow \mathbb{Y}'$$

ограничения φ и ψ на соответствующие подмножества. Рассмотрим естественным образом возникающую коммутативную K -диаграмму $\mathcal{D}'$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}' \times I \cup \mathbb{T}' \times \{0\} & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{X}' \\ \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathbb{T}' \times I & \xrightarrow{\psi'} & \mathbb{Y}' \end{array}$$

в которой ψ' индуцирует гомеоморфизм пространств орбит, а φ' есть K -вложение. Из леммы 1 легко следует, что G -пространство $\mathbb{Z} \Leftarrow (f')^{-1}(\psi'(t' \times I))$ имеет одно-орбитный тип, и следовательно, коммутативная K -диаграмма $\mathcal{D}'$ является слабо подходящей.

Так как $Q < P$ является собственной подгруппой, то по индуктивному предположению существует K -отображение $\hat{\varphi}': \mathbb{T}' \times I \rightarrow \mathbb{X}'$, расщепляющее $\mathcal{D}'$. Непосредственно проверяется, что формулой

$$\hat{\varphi}([g, s]_K) = [g, \hat{\varphi}'(s)]_K, \quad s \in \mathbb{T}' \times I,$$

корректно определено G -отображение

$$\hat{\varphi}: G \times_K (\mathbb{T}' \times I) \equiv \mathbb{T} \times I \rightarrow G \times_K \mathbb{X}' \equiv \mathbb{X},$$

которое и расщепляет диаграмму $\mathcal{D}$.

Покажем, что условие леммы 7 (а, следовательно, и ее заключение) выполнены для элементов некоторого инвариантного покрытия $\mathbb{T}$. Тогда в силу теоремы о соединении расщеплений и индуктивного предположения будет следовать теорема 3.

Для этого рассмотрим произвольную точку $t \in \mathbb{T}$. Так как $P \setminus G_t \neq \emptyset$, то в силу предложения 3 существует такая экстензорная подгруппа $K < G$, что $G_t < K$ и $P \setminus K \neq \emptyset$. Так как $G/K \in G\text{-ANE}$, то существует отображение среза $\alpha: \mathbb{U} \rightarrow G/K$, где $\mathbb{U} = \mathbb{U}(t) \subset \mathbb{T}$ есть G -окрестность t .

Пусть $L \Leftarrow \pi(K) < H$, а $p: G/K \rightarrow G/\pi^{-1}(\pi(K)) \cong H/L$ – естественное G -отображение, порожденное вложением групп $K < \pi^{-1}(\pi(K))$. Через

$$\beta_P: \psi(\mathbb{U}) \times [0, 1] = (\mathbb{U}/P) \times [0, 1] \rightarrow G/(P \cdot K) = H/L$$

обозначим отображение среза, получающееся из G -отображения $\beta \Leftarrow \alpha \circ \text{pr}_1: \mathbb{U} \times [0, 1] \rightarrow G/K$ при переходе к P -орбитной проекции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Существует такая G -окрестность $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ точки t , что частичное G -отображение*

$$(f^{-1} \circ \psi)(\mathbb{V} \times I) \hookrightarrow (\mathbb{S} \cap \mathbb{V}) \times I \cup \mathbb{V} \times \{0\} \xrightarrow{\beta} G/K,$$

допускает G -продолжение

$$\hat{\beta}: (f^{-1} \circ \psi)(\mathbb{V} \times I) \rightarrow G/K, \quad \text{для которого} \quad \beta_P \circ f = p \circ \hat{\beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, можно считать, что $\mathbb{U}$ совпадает с $\mathbb{T}$, т.е. существует отображение среза $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow G/K$.

Рассмотрим G -пространство $\mathbb{A} = f^{-1}(\psi(\{t\} \times I)) \subset \mathbb{X}$. Ясно, что $\mathbb{A} \subset \mathbb{S} \times I$ для $t \in \mathbb{S}$ и $\mathbb{A} \cap (\mathbb{S} \times I \cup \mathbb{T} \times \{0\}) = G(t) \times \{0\}$ для $t \notin \mathbb{S}$. Так как $\mathbb{A}$ имеет одноорбитный тип (G_t) , а его пространство орбит гомеоморфно I , то в силу предложения 6 $\mathbb{A}$ эквивалентно $G(t) \times I$. Поэтому на $\mathbb{S} \times I \cup \mathbb{T} \times \{0\} \cup \mathbb{A}$ существует такое отображение среза $\gamma: \mathbb{S} \times I \cup \mathbb{T} \times \{0\} \cup \mathbb{A} \rightarrow G/K$, что γ совпадает с β на $\mathbb{S} \times I \cup \mathbb{T} \times \{0\}$, а также $\beta_P \circ f = p \circ \gamma$.

В силу теоремы 6 естественное G -отображение $p: G/K \rightarrow G/\pi^{-1}(\pi(K))$ является эквивариантно локально мягким. В силу теоремы 7 существует такое G -продолжение $\hat{\beta}: \mathbb{W} \rightarrow G/K$ отображения γ на G -окрестность $\mathbb{W} \supset \mathbb{S} \times I \cup \mathbb{T} \times \{0\} \cup \mathbb{A}$, что $\beta_P \circ f = p \circ \hat{\beta}$. Уменьшая, если надо, окрестность $\mathbb{W}$ до окрестности вида $(f^{-1} \circ \psi)(\mathbb{V} \times I)$, получаем требуемое отображение среза $\hat{\beta}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. S. Palais, *The Classification of G-Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.
- [2] С. М. Агеев, “Классификация G -пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1345–1357.
- [3] С. М. Агеев, “Изовариантные экстензоры”, *Сиб. матем. журн.* (в печати).
- [4] С. М. Агеев, “Экстензорные свойства пространств орбит и задача продолжения действия”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, № 1, 11–16.
- [5] С. М. Агеев, Д. Реповш, “О продолжении действий групп”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 3–28.
- [6] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, de Gruyter Stud. Math., **8**, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.
- [7] Т. том Дик, *Преобразования групп и теория представлений*, Мир, М., 1982.
- [8] S. Waner, “A generalization of the cohomology of groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85**:3 (1982), 469–474.
- [9] S. Waner, “Mackey functors and G -cohomology”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **90**:4, 641–648.
- [10] J. P. May, *Equivariant Homotopy and Cohomology Theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [11] С. М. Агеев, “Изовариантные экстензоры и характеристика эквивариантных гомотопических эквивалентностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 3–28.
- [12] Г. Е. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980.
- [13] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971.
- [14] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1984.
- [15] С. М. Агеев, “Эквивариантная теорема Дугунджи”, *УМН*, **45**:5 (1990), 179–180.
- [16] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971.
- [17] S.-T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.
- [18] С. М. Агеев, “Классифицирующие пространства для свободных действий и гипотеза Гильберта–Смита”, *Матем. сб.*, **183**:1 (1992), 143–151.

С. М. Агеев

Беларусский государственный университет

E-mail: ageev_sergei@yahoo.com

Поступило

15.11.2010

Исправленный вариант

09.10.2011

Д. Реповш

University of Ljubljana, Словения

E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si