Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Шустиков, Критерий регулярности математической модели лазера, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 788–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:54:52

УДК 519

КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛАЗЕРА

С. Ю. Шустиков

Существует глубокая связь между условиями отсутствия взрыва для марковской эволюции в классической и квантовой теориях вероятностей. В обоих случаях эти условия эквивалентны сохранению единичного оператора (полной вероятности) минимальной марковской полугруппой. В настоящей работе изучается гайзенберговская эволюция модели, описывающей взаимодействие между цепочкой N двухуровневых атомов и n -модовым внешним бозонным полем, рассмотренной недавно Дж. Алли и Дж. Сьюэллом. Неограниченный генератор марковской эволюции для наблюдаемых системы действует в алгебре фон Неймана. Доказано условие отсутствия взрыва для генератора марковской полугруппы, являющееся операторным аналогом подобного условия, предложенного Р. З. Хасьминским и, позже, Т. Танигучи для классических стохастических процессов. В случае операторных алгебр это условие влечет единственность и консервативность квантовой динамической полугруппы, описывающей марковскую эволюцию состояний системы. В регулярном случае условие отсутствия взрыва устанавливает однозначное соответствие между формальным генератором и инфинитезимальным оператором марковской полугруппы.

Библиография: 12 названий.

Предметом исследования данной работы является цепочка N двухуровневых атомов, взаимодействующих с n -модовым внешним полем [1]. Наблюдаемые системы представляют собой ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = (\bigotimes_{r=1}^N \mathbb{C}^2) \otimes \Gamma^s(\ell_2^{\otimes n})$, где первый сомножитель в тензорном произведении отвечает пространству состояний “вещества” (т.е. цепочки атомов), а второй – пространству состояний “поля”, а ℓ_2 есть пространство квадратично-суммируемых последовательностей. Алгебра наблюдаемых, соответствующая веществу, есть $\bigotimes_{r=1}^N M_2^{(r)}$, где через $M_2^{(r)}$ обозначена алгебра комплексных (2×2) -матриц, действующих на r -й сомножитель в тензорном произведении гильбертовых пространств. Элементами, порождающими алгебру наблюдаемых поля, являются бозонные операторы рождения-уничтожения, действующие в симметричном фоковском пространстве $\Gamma^s(\ell_2^{\otimes n})$ с естественно определенным скалярным произведением. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим алгебру фон Неймана всех ограниченных операторов.

Генератор эволюции в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет стандартную линдбладовскую форму [2], [3]:

$$\mathcal{L}(X) = \Phi(X) - G^*X - XG, \quad G = iH + \frac{1}{2}\Phi(\mathbb{I}), \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS 96-0698.

где X – некоторая наблюдаемая, а уравнение эволюции имеет вид

$$\frac{d}{dt}P_t(X) = \mathcal{L}(P_t(X)), \quad P_t(X)|_{t=0} = X, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (2)$$

где $P_t(\cdot): \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *квантовой динамической полугруппой* [2], [3]. Пусть $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ – алгебра всех операторов следового класса и $\mathcal{T}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{H})$ – конус всех положительных операторов с единичным следом. Для любого начального состояния $\rho \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ ожидание наблюдаемой X в момент времени t определяется операцией взятия следа

$$\langle X \rangle_t = \text{Tr } \rho P_t(X).$$

В [4] доказано, что для широкого класса марковских процессов на $\mathbb{R}^n$ существуют естественные расширения их генераторов до генераторов квантовых динамических полугрупп $\mathcal{B}(\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n))$ вида (1), сохраняющих вышеуказанный вид ожидания.

В соответствии с [1] вполне положительная компонента $\Phi(\cdot)$ генератора $\mathcal{L}(\cdot)$ (см. (1)) действует как $\Phi(A \otimes B) = \Phi_f(A \otimes B) + \Phi_a(A \otimes B)$, где “f” и “a” означают *поле* и *атомы* соответственно. Более подробно,

$$\begin{aligned} \Phi_f(A \otimes B) &= \sum_{r=1}^N \sum_{l=0}^{n-1} (\varkappa_l A \otimes a_l^\dagger B a_l), \\ \Phi_a(A \otimes B) &= \sum_{r=1}^N \sum_{l=0}^{n-1} (b_{z,r} \sigma_{z,r} A \sigma_{z,r} + b_{-,r} \sigma_{+,r} A \sigma_{-,r} + b_{+,r} \sigma_{-,r} A \sigma_{+,r}) \otimes B. \end{aligned} \quad (3)$$

Оператор $H = H_f + H_a + H_{\text{int}}$, где “int” означает взаимодействие, является симметричным гамильтонианом с компонентами

$$\begin{aligned} H_f &= \sum_{r=1}^N \sum_{l=0}^{n-1} (\omega_l \mathbb{I} \otimes a_l^\dagger a_l), \quad H_a = \sum_{r=1}^N \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{\epsilon}{2} \sigma_{z,r} \otimes \mathbb{I} \right), \\ H_{\text{int}} &= \sum_{r=1}^N \sum_{l=0}^{n-1} \frac{i \lambda_l}{\sqrt{N}} (\sigma_{-,r} \otimes a_l^\dagger e^{-2\pi i k_l r} - \sigma_{+,r} \otimes a_l e^{2\pi i k_l r}). \end{aligned} \quad (4)$$

В выражениях (3), (4) $A \in \bigotimes_{r=1}^N \mathbb{M}_2^{(r)}$, $B \in \mathcal{B}(\Gamma^s(\ell_2^{\otimes n}))$, $\sigma_{\pm,r} = \sigma_{x,r} \pm i \sigma_{y,r}$, где $\sigma_{x,r}, \sigma_{y,r}, \sigma_{z,r}$ – стандартные матрицы Паули, действующие в пространстве состояний r -го атома, $b_{\pm,r} > 0$, $b_{z,r} > 0$, $\lambda_l > 0$, а операторы $a_l, a_l^\dagger$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям на $\ell_2^{\otimes n}$: $[a_l, a_m^\dagger] = \delta_{lm}$, $[a_l, a_m] = 0$, $[a_l^\dagger, a_m^\dagger] = 0$.

Основные свойства генератора $\mathcal{L}(\cdot)$ и его компонент описываются следующим предложением, где для упрощения записей положено $\mathbb{I} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ вместо выражения $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$, в котором первый и второй единичные операторы являются соответственно элементами алгебр наблюдаемых атомов и поля.

ТЕОРЕМА 1. *При $\varkappa_l > 0$, $\omega_l > 0$*

- 1) *оператор $-G$ является генератором сильно непрерывной однопараметрической сжимающей голоморфной полугруппы на $\mathcal{H}$, а $\Phi(\mathbb{I})$ – самосопряженным оператором;*

- 2) $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \text{dom } G^m$ является существенной областью определения оператора $\Phi(\mathbb{I})$ при любом $m \geq 2$;
- 3) $\mathcal{D} \subseteq \text{dom } \Phi(\mathbb{I}) \cap \text{dom } H$, H симметричен на $\mathcal{D}$, а единичный оператор действует в $\mathcal{H}$;
- 4) отображение $e^{-\varepsilon\Phi(\mathbb{I})}\Phi(\cdot)e^{-\varepsilon\Phi(\mathbb{I})}$ нормально и вполне положительно при $\forall \varepsilon > 0$;
- 5) существует $c > 0$ такое, что $\mathcal{L}(\Phi(\mathbb{I})) \leq c\Phi(\mathbb{I})$ в смысле квадратичных форм на $\mathcal{D}$.

Последнее условие является операторным аналогом достаточных условий отсутствия взрыва, изученных Р.З. Хасьминским [5], Т. Танигучи [6], Д.У. Струком и С.Р. Варданом [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем следующее:

1. оператор $-G$ определен на плотном множестве и замкнут;
2. резольвентное множество $P(-G)$ содержит сектор $|\arg \lambda| < \pi/2 + \beta$, $\beta > 0$;
3. для $\forall \varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(G + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon, \quad (5)$$

где M_ε не зависит от λ .

Если эти условия выполнены, оператор $-G$ является генератором полугруппы e^{-tG} , которая голоморфна при $|\arg t| < \beta$, равномерно ограничена при $|\arg t| \leq \omega - \varepsilon$ и сильно непрерывна в меньшем секторе при $t = 0$ (см. [4]).

Представим оператор G в виде разложения $G = G_0 + G_b$:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{2}\Phi_f(\mathbb{I}) + H_f = N\mathbb{I} \otimes \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\varkappa_l + i\omega_l \right) a_l^\dagger a_l, \\ G_b &= \frac{1}{2}\Phi_a(\mathbb{I}) + iH_a + iH_{\text{int}} \\ &= \frac{n}{2} \sum_{r=1}^N (b_{-,r}\sigma_{+,r}\sigma_{-,r} \otimes \mathbb{I} + b_{+,r}\sigma_{-,r}\sigma_{+,r} \otimes \mathbb{I} + b_{z,r}\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l (\sigma_{-,r} \otimes a_l^\dagger e^{-2\pi i k_l r} - \sigma_{+,r} \otimes a_l e^{2\pi i k_l r}) + i \frac{n\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^N \sigma_{z,r} \otimes \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varkappa_l > 0$, $\omega_l > 0$, а оператор G_0 диагонален.

Для доказательства того, что $-G = -(G_0 + G_b)$ является генератором, прежде всего докажем, что $-G_0$ есть генератор ограниченной голоморфной полугруппы, а G_b ограничен относительно G_0 с нулевой относительной верхней гранью. Согласно [4] этого достаточно, чтобы $-G$ порождал голоморфную полугруппу.

Прежде всего установим, что G_0 замкнут на области

$$\text{dom } G_0 = \{\Psi : \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|G_0\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty\}.$$

С этой целью проверим эквивалентное утверждение о том, что для любого $\lambda > 0$ оператор $G_0 + \lambda \mathbb{I}$ замкнут. Применим критерий из [4] для оператора G_0 , определенного на линейной оболочке экспоненциальных векторов. Согласно этому критерию оператор G_0 имеет замыкание тогда и только тогда, когда $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N = 0$, $\Psi_N \in \text{dom } G_0$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} G_0 \Psi_N = \tilde{\Psi}$ влечет $\tilde{\Psi} = 0$.

Рассмотрим вектор $\varphi_N = (G_0 + \lambda \mathbb{I}) \Psi_N$, где последовательность $\{\Psi_N\}$ такова, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\Psi_N\| = 0, \quad \Psi_N \in \text{dom } G_0, \quad G_0 \Psi_N \rightarrow \tilde{\Psi}.$$

Таким образом, имеем $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = \tilde{\Psi}$, $\Psi_N = (G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N$. Справедлива следующая оценка для норм:

$$\|(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N\| \leq \|(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1}(\tilde{\Psi} - \varphi_N)\| + \|(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N\|.$$

Определение сходимости дает

$$\begin{aligned} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = \tilde{\Psi} \right\} &\iff \{ \forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon_1) : \quad \forall N > N_1(\varepsilon_1) \quad \|\tilde{\Psi} - \varphi_N\| < \varepsilon_1 \}, \\ \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} (G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N = 0 \right\} \\ &\iff \{ \forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon_2) : \quad \forall N > N_2(\varepsilon_2) \quad \|(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N\| < \varepsilon_2 \}. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{N} = \max\{N_1, N_2\}$. Для $\forall N > \tilde{N}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1}(\tilde{\Psi} - \varphi_N)\| &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \varkappa_l + i \omega_l\right) k + \lambda} |\tilde{\Psi}_k - \varphi_{N,k}|^2 \right|^2} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{\Psi}_k - \varphi_{N,k}|^2} = \frac{1}{\lambda} \|\tilde{\Psi} - \varphi_N\|. \end{aligned}$$

Как прямое следствие, получаем

$$\|(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N\| < \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Так как $\tilde{\Psi}$ не зависит от $\tilde{N}$, $(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1} \varphi_N = 0$. Так как ядро оператора $(G_0 + \lambda \mathbb{I})^{-1}$ тривиально, имеем $\tilde{\Psi} = 0$ и $(G_0 + \lambda \mathbb{I})$ замкнут.

Множество $\text{dom } G_0$ очевидным образом замкнуто в $\mathcal{H}$, так как G_0 определен на тотальном множестве экспоненциальных векторов, линейная оболочка которых замыкаема в норме графика оператора G_0 .

Рассмотрим свойства резольвентного оператора $\Re(-G_0, \lambda) = -(G_0 + \lambda)^{-1}$. Отрицательная вещественная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора $\varkappa_l a_l^\dagger a_l$, так как все коэффициенты $\varkappa_l$ положительны (это энергии квантов поля), а операторы числа частиц $a_l^\dagger a_l$ имеют неотрицательные собственные значения.

Для доказательства неравенства (5) перепишем резольвенту диагонального оператора $-G_0$ в интегральной форме

$$\Re(-G_0, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-G_0 t} dt$$

и оценим ее норму.

Введем обозначения

$$\varkappa = \sum_{l=0}^{n-1} \varkappa_l, \quad \omega = \sum_{l=0}^{n-1} \omega_l, \quad \lambda = |\lambda| e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} - \beta + \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right].$$

Имеем

$$\|\Re(-G_0, \lambda) \Psi\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\Psi_k\|^2}{(|\lambda| \cos \varphi + \frac{1}{2} \varkappa k)^2 + (|\lambda| \sin \varphi + \omega k)^2},$$

где $\Psi = \Psi_0 \oplus \Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_k \oplus \dots \in \Gamma^s(\ell_2^{\otimes n})$. Положим

$$\begin{aligned} \Lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \left(|\lambda| \cos \varphi + \frac{1}{2} \varkappa k\right)^2 + (|\lambda| \sin \varphi + \omega k)^2 \\ &= |\lambda|^2 + \frac{1}{4} k^2 (\varkappa^2 + 4\omega^2) + |\lambda| k (\varkappa \cos \varphi + 2\omega \sin \varphi), \\ f(\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \varkappa \cos \varphi + 2\omega \sin \varphi. \end{aligned}$$

Наша цель – отыскать такое $\alpha > 0$, что $\Lambda \geq \alpha |\lambda|^2$. Вычислим экстремумы функции $f(\varphi)$. Условие $f'(\varphi) = 0$ дает

$$\varphi_{\max} = \arctg \frac{2\omega}{\varkappa}, \quad \varphi_{\min} = \arctg \frac{2\omega}{\varkappa} + \pi.$$

Абсолютный минимум $\varphi_{\min}$ может принадлежать сектору, в котором рассматривается резольвента. В этом случае

$$\begin{aligned} \Lambda &= |\lambda|^2 + \frac{1}{4} k^2 (\varkappa^2 + 4\omega^2) + |\lambda| k (\varkappa \cos \varphi_{\min} + 2\omega \sin \varphi_{\min}) \geq \alpha |\lambda|^2, \\ (1 - \alpha) \frac{|\lambda|^2}{k^2} - \frac{|\lambda|}{k} \sqrt{\varkappa^2 + 4\omega^2} + \frac{1}{4} (\varkappa^2 + 4\omega^2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Это неравенство справедливо для всех $|\lambda|$ и k , если дискриминант квадратного трехчлена неположителен: $D = \varkappa^2 + 4\omega^2 - (1 - \alpha)(\varkappa^2 + 4\omega^2) = \alpha(\varkappa^2 + 4\omega^2) \leq 0$. Но $\alpha > 0$, поэтому абсолютный минимум функции $f(\varphi)$ должен лежать вне сектора (иначе невозможно написать требуемую оценку для резольвенты), т.е.

$$\operatorname{tg}(\beta - \varepsilon) < \frac{\varkappa}{2\omega}. \quad (7)$$

Значения $f(\varphi)$ на границах сектора равны

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right) &= \varkappa \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right) + 2\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right) \\ &= -\varkappa \sin(\beta - \varepsilon) + 2\omega \cos(\beta - \varepsilon), \\ f\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right)\right) &= \varkappa \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right)\right) + 2\omega \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \varepsilon\right)\right) \\ &= -\varkappa \sin(\beta - \varepsilon) - 2\omega \cos(\beta - \varepsilon), \end{aligned}$$

причем второе является абсолютным минимумом в секторе. После подстановки его в выражение для Λ получаем следующую оценку для α :

$$\alpha \leq \frac{(\varkappa \cos(\beta - \varepsilon) - 2\omega \sin(\beta - \varepsilon))^2}{\varkappa^2 + 4\omega^2},$$

справедливую, если условие (7) выполнено. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, имеем $\operatorname{tg}(\beta) < \varkappa/(2\omega)$, где $\beta > 0$ определяет сектор $(-\pi/2 - \beta, \pi/2 + \beta)$, в котором справедливы оценки $\Lambda \geq \alpha|\lambda|^2$ и

$$\|\Re(-G_0, \lambda)\Psi\|^2 \leq \frac{1}{\alpha|\lambda|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|^2 = \frac{1}{\alpha|\lambda|^2} \|\Psi\|^2.$$

Требование (7) не существенно, так как для любых ограниченных $\varkappa$ и ω можно выбрать β достаточно малым и построить полугруппу при помощи интеграла Данфорда–Тейлора

$$e^{-tG_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (G_0 + \lambda)^{-1} d\lambda,$$

где Γ – кривая, лежащая целиком в секторе $(-\pi/2 - \beta, \pi/2 + \beta)$, идущая из бесконечности с $\arg \lambda = -(\pi/2 + \beta - \varepsilon)$ и уходящая на бесконечность с $\arg \lambda = \pi/2 + \beta - \varepsilon$. Следовательно, $-G_0$ является генератором голоморфной полугруппы.

Докажем, что G_b ограничен относительно G_0 с произвольно малой относительной верхней границей. Для этого применим известное операторное неравенство

$$A^*B + B^*A \leq \varepsilon A^*A + \varepsilon^{-1}B^*B \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (8)$$

в форме

$$\sum_{l=0}^{n-1} (A_l^* \otimes B_l + B_l^* \otimes A_l) \leq \varepsilon \sum_{l=0}^{n-1} A_l^* A_l \otimes \mathbb{I} + \varepsilon^{-1} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{I} \otimes B_l^* B_l \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где положим $A_l = a_l$,

$$B_l = \frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N \sigma_{-,r} e^{-2\pi i k_l r}.$$

В выражении для G_b (см. (6)) неограниченными являются только слагаемые, содержащие a_l и $a_l^\dagger$. Найдем их верхнюю границу относительно оператора G_0 . Разложим G_b на сумму $G_b = \tilde{G}_b + g_b$, где

$$\tilde{G}_b = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l (\sigma_{-,r} \otimes a_l^\dagger e^{-2\pi i k_l r} - \sigma_{+,r} \otimes a_l e^{2\pi i k_l r}),$$

$$g_b = \frac{n}{2} \sum_{r=1}^N \left(b_{-,r} \sigma_{+,r} \sigma_{-,r} \otimes \mathbb{I} + b_{+,r} \sigma_{-,r} \sigma_{+,r} \otimes \mathbb{I} + b_{z,r} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + i \frac{\epsilon}{2} \sigma_{z,r} \otimes \mathbb{I} \right).$$

Заметим, что $\|g_b\| < \infty$. Из неравенства треугольника и из (6) имеем

$$\|a + b\|^2 \leq 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2, \quad \|G_b \Psi\|^2 \leq 2\|\tilde{G}_b \Psi\|^2 + 2\|g_b \Psi\|^2.$$

Применяя канонические коммутационные соотношения для $a_l, a_l^\dagger$, получим

$$\|\tilde{G}_b \Psi\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l^2 (\|a_l^\dagger \Psi\|^2 + \|a_l \Psi\|^2) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l^2 (2\|a_l \Psi\|^2 + \|\Psi\|^2),$$

где $\|a_l \Psi\|^2 = \langle \Psi, a_l^\dagger a_l \Psi \rangle$.

Так как $\mathbb{I} \cdot a_l^\dagger a_l + a_l^\dagger a_l \cdot \mathbb{I} \leq \varepsilon^{-1} \mathbb{I} + \varepsilon (a_l^\dagger a_l)^2$, имеем $\|a_l \Psi\|^2 \leq \varepsilon^{-1} \|\Psi\|^2 + \varepsilon \|a_l^\dagger a_l \Psi\|^2$ на $\text{dom } G_0$. Следовательно, оператор $\tilde{G}_b$ ограничен относительно G_0 :

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}_b \Psi\|^2 &\leq \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l^2 (2\|a_l \Psi\|^2 + \|\Psi\|^2) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l^2 (2\varepsilon^{-1} \|\Psi\|^2 + 2\varepsilon \|a_l^\dagger a_l \Psi\|^2 + \|\Psi\|^2) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^N \lambda_l^2 \left((2\varepsilon^{-1} + 1) \|\Psi\|^2 + 2\varepsilon \frac{1}{N \min_l |\frac{1}{2}\kappa_l + i\omega_l|} \|G_0 \Psi\|^2 \right). \end{aligned}$$

Искомая относительная верхняя грань равна нулю, так как

$$\|G_b \Psi\|^2 \leq \delta \|G_0 \Psi\|^2 + \delta^{-1} \|\Psi\|^2$$

при произвольно малом δ .

Следующий шаг состоит в применении теоремы (см. [4]), утверждающей, что операторы G_0 и G замыкаемы или не замыкаемы одновременно и что их области определения совпадают.

Докажем самосопряженность оператора $\Phi(\mathbb{I})$. Слагаемые с σ -матрицами являются самосопряженными, так как они действуют в конечномерном пространстве $\bigoplus_{r=1}^N \mathbb{C}^2$. Остается доказать самосопряженность $T = \sum_l \kappa_l a_l^\dagger a_l$. Он симметричен ввиду своей структуры, т.е. $T^* \supset T$, и имеет плотную область определения (линейную оболочку экспоненциальных векторов), с которой может быть продолжен до своего замыкания. Полученное расширение будет самосопряженным ($T^* = T$), так как уравнение $T^* \Psi = \pm i \Psi$ не имеет ограниченных решений (см. [8], [9]).

2) Доказательство того, что $\text{dom } G_0^m = \text{dom } G^m$, аналогично предыдущему пункту, так как G_0^m является доминирующей частью оператора G^m . Область определения G_0^m можно описать как

$$\text{dom } G_0^m = \mathbb{C}^2 \otimes \left(\mathbb{I} + \sum_{l=0}^{n-1} \left| \frac{1}{2} \varkappa_l + i\omega_l \right| a_l^\dagger a_l \right)^{-m} \Gamma^s(\ell_2^{\otimes n}).$$

Векторы из $\text{dom } G_0^m$ принадлежат областям определения $\Phi(\mathbb{I})$ и H , так как могут быть представлены в виде линейных комбинаций экспоненциальных векторов. Оператор $\Phi(\mathbb{I})$ обладает единственным самосопряженным расширением с произвольного плотного множества собственной области определения, которое обозначим также через $\Phi(\mathbb{I})$. Следовательно, $\text{dom } G^m = \text{dom } G_0^m = \text{core } \Phi(\mathbb{I}) \in \text{core } \Phi(\mathbb{I})^{1/2}$ при любом $m \geq 1$.

3) Условие $\mathcal{D} \subseteq \text{dom } \Phi(\mathbb{I}) \cap \text{dom } H$ доказано в предыдущем пункте, а оператор H симметричен в $\mathcal{D}$ благодаря своей эрмитовой структуре.

4) Данное условие справедливо для класса нормальных вполне положительных отображений, имеющих краусову структуру (см. [10]), если $\Phi(\mathbb{I})$ корректно определен.

5) Для доказательства последнего условия необходимо оценить $\mathcal{L}(\Phi(\mathbb{I}))$. Используя канонические коммутационные соотношения, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi(\mathbb{I})) &= \Phi(\Phi(\mathbb{I})) - \Phi(\mathbb{I})^2 + i[H, \Phi(\mathbb{I})] \\ &= -N^2 \mathbb{I} \otimes \sum_{l=0}^{n-1} \varkappa_l^2 a_l^\dagger a_l + n^2 \sum_{r=1}^N b_{+,r} (b_{-,r} - b_{+,r}) i\sigma_{yr} \otimes \mathbb{I} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l (N\varkappa_l - n(b_{-,r} - b_{+,r})) (\sigma_{-,r} \otimes a_l^\dagger e^{-2\pi i k_l r} + \sigma_{+,r} \otimes a_l e^{2\pi i k_l r}). \end{aligned}$$

Оценим двойную сумму, используя неравенство (8):

$$\begin{aligned} \sigma_{-,r} \otimes a_l^\dagger e^{-2\pi i k_l r} + \sigma_{+,r} \otimes a_l e^{2\pi i k_l r} &\leq \varepsilon \mathbb{I} \otimes a_l^\dagger a_l + \varepsilon^{-1} \sigma_{+,r} \sigma_{-,r} \otimes \mathbb{I} \\ &= \varepsilon \mathbb{I} \otimes a_l^\dagger a_l + \varepsilon^{-1} \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \sigma_{z,r}) \otimes \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Положим $b_{\max} = \max_r \{b_{+,r}, b_{-,r}, b_{z,r}\}$, $b_{\min} = \min_r \{b_{+,r}, b_{-,r}, b_{z,r}\}$, $\varkappa_{\max} = \max_l \varkappa_l$, $\varkappa_{\min} = \min_l \varkappa_l$, $\lambda_{\max} = \max_l |\lambda_l|$. Все эти величины конечны и положительны, так как имеют очевидный физический смысл интенсивностей переходов, энергий квантов и констант связи. Имеем $|b_{+,r}(b_{-,r} - b_{+,r})| \leq 2b_{\max}^2$, $|b_{-,r} - b_{+,r}| \leq 2b_{\max}$. Используя $\|i\sigma_y\| = 1$, $\|\mathbb{I} + \sigma_{z,r}\| = 2$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi(\mathbb{I})) &\leq -N^2 \varkappa_{\min}^2 \mathbb{I} \otimes \sum_{l=0}^{n-1} a_l^\dagger a_l + \sqrt{N} \varepsilon \lambda_{\max} (N\varkappa_{\max} + 2nb_{\max}) \sum_{l=0}^{n-1} a_l^\dagger a_l \\ &\quad + 2Nn^2 b_{\max}^2 \mathbb{I} + \sqrt{N} 2\varepsilon n \lambda_{\max} (N\varkappa_{\max} + 2nb_{\max}) \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Первая и вторая суммы вместе могут быть ограничены сверху нулем, если выбрать $\varepsilon \leq (N^{3/2} \varkappa_{\min}^2) / (\lambda_{\max} (N\varkappa_{\max} + 2nb_{\max}))$. Следовательно, для третьего и четвертого членов получаем неравенство

$$2Nn^2 b_{\max}^2 + \sqrt{N} 2\varepsilon n \lambda_{\max} (N\varkappa_{\max} + 2nb_{\max}) \leq 2Nn(nb_{\max}^2 + N\varkappa_{\min}^2).$$

Используя выражения $\|\Phi_a(\mathbb{I})\| \geq 3Nnb_{\min}$ и $\Phi_a(\mathbb{I}) \leq \Phi(\mathbb{I})$ (см. (3)), получим оценку

$$\mathcal{L}(\Phi(\mathbb{I})) \leq c\Phi(\mathbb{I}) \quad \text{при } c \geq \frac{2}{3b_{\min}}(nb_{\max}^2 + N\kappa_{\min}^2).$$

Это завершает доказательство того, что класс генераторов (1), (3), (4), описывающих взаимодействие между веществом и полем, удовлетворяет критерию регулярности.

С математической точки зрения свойство регулярности генератора $\mathcal{L}(\cdot)$ важно потому, что в регулярном случае он определяет единственную консервативную квантовую динамическую полугруппу, являющуюся минимальным решением эволюционного уравнения (2). Это свойство представляет собой операторный аналог свойства регулярности генераторов невзрывных стохастических процессов. Используя достаточный критерий регулярности (см. [11], [12]) и теорему 1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *При любом выборе ограниченных коэффициентов $\kappa_l, \omega_l, \lambda_l$ ($l = 0, \dots, n-1$), $b_{+,r}, b_{-,r}, b_{z,r}$ ($r = 0, \dots, N$) и ϵ в формулах (3), (4) минимальная динамическая полугруппа $P_t(\cdot)$ с формальным генератором (1) консервативна. Она является единственным решением уравнения (2) в классе квантовых динамических полугрупп.*

Автор выражает благодарность профессору А. М. Чеботареву за помощь, оказанную при подготовке настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alli G., Sewell G. New methods and structures in the theory of the multi-mode Dicke laser model // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 10. P. 5598–5626.
- [2] Lindblad G. On generators of quantum dynamical semigroups // Comm. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119–130.
- [3] Goriny V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of N -level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 821–825.
- [4] Kato T. Perturbation Theory of Linear Operators. New York: Springer Verlag, 1966.
- [5] Khas'minskii R. Z. Ergodic problems of recurrent diffusion processes // Prob. Theory Appl. 1960. V. 5. № 1. P. 196–214.
- [6] Taniguchi T. On sufficient conditions for nonexplosion of solutions to stochastic differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 153. № 2. P. 549–561.
- [7] Strook D. W., Varadhan S. R. Multidimensional Diffusion Processes. New York: Springer Verlag, 1979.
- [8] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [9] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [10] Kraus K. General state changes in quantum theory // Ann. Phys. 1971. V. 64. P. 311–335.
- [11] Chebotarev A. M. Necessary and sufficient conditions for conservativity of a dynamical semigroup // J. Soviet Math. 1991. V. 56. № 5. P. 2697–2719.
- [12] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups // J. Funct. Anal. 1998. V. 153. № 2. P. 382–404.