Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Мищенко, Ю. Ю. Фролова, Некоторые экстремальные свойства многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 867–877

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8961>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:35:05

Некоторые экстремальные свойства многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница

С. П. Мищенко, Ю. Ю. Фролова

В случае нулевой характеристики основного поля доказано, что многообразие левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница является многообразием почти экспоненциального роста с почти полиномиальным ростом кодлины и имеет почти конечные кратности.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm8961

1. Предварительные сведения. На протяжении всей работы будем предполагать, что основное поле K имеет нулевую характеристику. Все понятия, определения которых мы не приводим, можно найти в книгах [1], [2]. Договоримся опускать скобки в произведениях элементов алгебры, если они расставлены левонормированным способом, т.е. $abc = ((ab)c)$.

Напомним, что *алгеброй Лейбница* называется линейная (неассоциативная) алгебра, удовлетворяющая тождеству

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz). \quad (1.1)$$

Таким образом, умножение справа является дифференцированием алгебры. Более того, это тождество по модулю антикоммутативности эквивалентно тождеству Якоби, поэтому, в частности, алгеброй Лейбница является любая алгебра Ли. Отметим, что вероятно впервые этот класс алгебр был введен в работе [3] в качестве обобщения понятия алгебры Ли.

Используя тождество (1.1), получаем, что так же, как и в алгебрах Ли, любое произведение в алгебре Лейбница является линейной комбинацией левонормированных произведений. Кроме того, если в тождество (1.1) вместо z подставить y , то получим следующее тождество:

$$x(yu) \equiv 0, \quad (1.2)$$

которое эквивалентно тождеству $x(yz) \equiv -x(zu)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00209-а).

Для удобства записи произведений договоримся обозначать оператор умножения справа, например, на элемент z заглавной буквой Z , считая, что $xz = xZ$. Используя тождества (1.1), получаем, например, в наших обозначениях такие равенства:

$$y(x_i x_j) = y x_i x_j - y x_j x_i = y[X_i, X_j],$$

а также

$$\underbrace{xy \cdots y}_m = xY^m.$$

Напомним, что многообразие линейных алгебр определяется как совокупность всех алгебр, в которых выполняется некоторый фиксированный набор тождественных соотношений.

Пусть $\mathbf{V}$ – некоторое многообразие алгебр Лейбница, а $F(X, \mathbf{V})$ – его относительно свободная алгебра со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Как обычно, совокупность всех полилинейных элементов от $x_1, x_2, \dots, x_n$ в алгебре F обозначим через $P_n(\mathbf{V})$. Действуя на индексы образующих, превращаем пространство $P_n(\mathbf{V})$ в модуль симметрической группы S_n . Так как характеристика основного поля равна нулю, то этот модуль является вполне приводимым. Рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ , где $\lambda \vdash n$ – разбиение числа n ,

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (1.3)$$

Рост многообразия $\mathbf{V}$ определяется ростом последовательности чисел $(c_n(\mathbf{V}))$, где $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$ – размерность полилинейной части степени n . Эти числа называют также *коразмерностями*, имея в виду коразмерности пространств полилинейных элементов соответствующего многообразию вербального идеала. Например, многообразие имеет *экспоненциальный* рост, когда существуют такие неотрицательные числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $r_1 > 1$, $r_2 > 1$, что для всех чисел n выполняются неравенства

$$C_1 r_1^n < c_n(\mathbf{V}) < C_2 r_2^n.$$

Говорят, что рост многообразия является *почти экспоненциальным*, если рост самого многообразия не является экспоненциальным, а любое собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ имеет экспоненциальный рост.

Число слагаемых $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$ в сумме (1.3) называют *кодлинной* многообразия $\mathbf{V}$, а числа m_λ – *кратностями*.

В данной работе объектом исследования является многообразие левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница, определяемое тождеством

$$x(y(zt)) \equiv 0. \quad (1.4)$$

Будем обозначать это многообразие ${}_3\mathbf{N}$.

Отметим, что, как доказано в работе [4], многообразие ${}_3\mathbf{N}$ имеет сверхэкспоненциальный рост, его кодлина не может быть ограничена полиномиальной функцией от n , а кратности не ограничены в совокупности константой. Более точно, коразмерность многообразия ${}_3\mathbf{N}$ определяются следующей формулой:

$$c_n({}_3\mathbf{N}) = n \cdot \text{inv}(n-1) = n \sum_{\lambda \vdash (n-1)} d_\lambda,$$

где $\text{inv}(m)$ – число инволюций (перестановок порядка два) в симметрической группе S_m , а через d_λ обозначена размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля.

Для многообразия ${}_3\mathbf{N}$ кратность m_λ в разложении

$$\chi_n({}_3\mathbf{N}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

равна числу угловых клеток диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda \vdash n$. Поясним, что клетка диаграммы Юнга называется *угловой*, если она не имеет “соседа” справа и снизу. Например, для разбиения $(3, 2, 2, 1)$ число угловых клеток равно 3, а для разбиения $(4, 2, 2)$ оно равно 2. Таким образом, понятно, что кратности не ограничены в совокупности, но для любого разбиения $\lambda \vdash n$ выполнено следующее неравенство $1 \leq m_\lambda < \sqrt{2n}$. Поэтому кодлина $l_n({}_3\mathbf{N})$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$p(n) \leq l_n({}_3\mathbf{N}) < p(n)\sqrt{2n},$$

где $p(n)$ – количество различных разбиений числа n . Напомним асимптотическую формулу для $p(n)$, которую можно найти, например, в книге [5]:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

Таким образом, получаем, что последовательность кодлин многообразия ${}_3\mathbf{N}$ имеет промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным рост.

Рассмотрим подпространство $Q_n^{(i)} = Q_n^{(i)}({}_3\mathbf{N})$ пространства $P_n = P_n({}_3\mathbf{N})$, порожденное всеми полилинейными левонормированными элементами, которые начинаются с образующей x_i :

$$Q_n^{(i)} = \text{span}\{x_i x_{j_1} \cdots x_{j_{n-1}} \mid \{j_1, \dots, j_{n-1}\} = \mathbf{N}_n \setminus \{i\}\},$$

где $i = 1, \dots, n$ и $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Все подпространства $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, имеют одинаковую структуру S_{n-1} -модуля, где S_{n-1} действует на $\mathbf{N}_n \setminus \{i\}$ и, как показано в статье [4], характер, например, S_{n-1} -модуля $Q_n^{(n)}$ является суммой всех неприводимых характеров с кратностями равными единице, т.е.

$$\chi(Q_n^{(n)}) = \sum_{\lambda \vdash (n-1)} \chi_\lambda.$$

Пусть

$$St_m = St_m(X_1, \dots, X_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(m)}$$

– так называемый стандартный ассоциативный полином от операторов умножения справа. Определим также такую его модификацию:

$$\begin{aligned} \widetilde{St}_{2m} &= \sum_{\sigma \in S_{2m}} (-1)^\sigma [X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}] \cdots [X_{\sigma(2m-1)}, X_{\sigma(2m)}], \\ \widetilde{St}_{2m+1} &= \sum_{\sigma \in S_{2m+1}} (-1)^\sigma [X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}] \cdots [X_{\sigma(2m-1)}, X_{\sigma(2m)}] X_{\sigma(2m+1)}. \end{aligned}$$

Отметим такие несложные равенства:

$$\widetilde{St}_{2m} = 2^m St_{2m}, \quad \widetilde{St}_{2m+1} = 2^m St_{2m+1}.$$

Обозначим через λ'_i длину i -го столбца диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. Определим следующий элемент свободной алгебры Лейбница:

$$g_\lambda = x_n St_{\lambda'_1} St_{\lambda'_2} \cdots St_{\lambda'_m}, \quad (1.5)$$

а через f_λ обозначим ассоциативный полином $St_{\lambda'_1} St_{\lambda'_2} \cdots St_{\lambda'_m}$, где $m = \lambda_1$ – длина первой строки диаграммы Юнга λ .

Как показано в работе [4], полная линеаризация элемента g_λ порождает неприводимый S_{n-1} -подмодуль в модуле $Q_n^{(n)}$, соответствующий разбиению $\lambda \vdash (n-1)$.

Напомним также строение семейства алгебр, которые порождают многообразие ${}_3\mathbf{N}$. Пусть $T_k = K[t_1, \dots, t_k]$ – кольцо многочленов от переменных $t_1, \dots, t_k$; H_k – алгебра Гейзенберга с базисом $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, c$ и таблицей умножения $b_i a_j = -a_j b_i = \delta_{ij} c$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а остальные произведения базисных элементов равны нулю. Алгебра H_k является алгеброй Ли. Превратим кольцо многочленов T_k в правый модуль алгебры H_k . Базисные элементы действуют на полином f из T_k следующим образом:

$$f a_s = f'_s, \quad f b_s = t_s f, \quad f c = f,$$

где f'_s – частная производная полинома f по переменной t_s .

Необходимая алгебра Лейбница является прямой суммой векторных пространств T_k и H_k , в котором умножение задается правилом

$$(f + v)(g + u) = fg + vu,$$

где $f, g \in T_k, v, u, vu \in H_k$. Обозначим эту алгебру $\tilde{H}^k$.

2. Экстремальные свойства многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Тогда существуют такие константы c_1, c_2, c_3, r_1, r_2 , что для любого n выполнены следующие неравенства:

$$c_n(\mathbf{V}) < c_1 r_1^n, \quad l_n(\mathbf{V}) < c_2 n^{r_2}, \quad m_\lambda < c_3.$$

Кроме того, существуют такие натуральные p, q , что

$$m_\lambda = 0, \quad \text{если } \lambda_{p+1} > q.$$

Таким образом, многообразие ${}_3\mathbf{N}$ имеет ряд экстремальных свойств. Оно является многообразием почти экспоненциального роста с почти полиномиальным ростом кодлинны и имеет почти конечные кратности. А также, как говорят, кохарактер его любого собственного подмногообразия лежит в крюке.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем несколько лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Тогда существуют такое n и разбиение $\lambda \vdash (n-1)$, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $g_\lambda \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество вида

$$\sum_{p \in S_m} \alpha_p x_0 x_{p(1)} x_{p(2)} \dots x_{p(m)} \equiv 0,$$

где $\alpha_p \in K$, которое не выполнено в ${}_3\mathbf{N}$.

Пусть $h(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ – тождество, выполняемое в многообразии $\mathbf{V}$, но не выполняемое в ${}_3\mathbf{N}$. Будем считать, что оно является линейной комбинацией левонормированных произведений, т.е.

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_i,$$

где $h_i, i = 1, \dots, n$, являются ассоциативными полиномами от операторов правого умножения $X_j, 1 \leq j \leq n, j \neq i$.

Сначала предположим, что $n \geq 3$. Так как тождество $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$ не выполняется в многообразии ${}_3\mathbf{N}$, значит, существует такая подстановка элементов алгебры $\tilde{H}^k$ вместо образующих, что значение, которое обозначим $\tilde{h}$, будет ненулевым элементом алгебры $\tilde{H}^k$. Отметим, что так как степень тождества больше или равна трем, то вместо ровно одной из образующих, например x_s , был подставлен многочлен f из кольца многочленов T_k .

Рассмотрим следствие тождества $h(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$, получаемое из него подстановкой вместо x_s произведения y^2 . В силу тождества (1.2) это следствие будет иметь вид $yyh_s \equiv 0$. Пусть $g = h_s$, причем будем считать, что многочлен g записан от операторов $Y_i, i = 1, 2, \dots, m$, где $m = n-1$. Тогда тождество приобретает вид

$$y^2 g(Y_1, \dots, Y_m) \equiv 0. \quad (2.1)$$

Пусть A – некоторая алгебра Лейбница. Следуя Хиггинсу (см. [6]), можно аналогично случаю алгебр Ли определить множество

$$I_g = \{a \in A \mid ag(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = 0 \text{ для всех } z_1, z_2, \dots, z_m \in A\}.$$

Так как умножение справа в алгебре Лейбница является дифференцированием, то аналогично результатам статьи [6] множество I_g является правым идеалом алгебры A .

Покажем, что в нашем случае, когда выполнено тождество (2.1), идеал I_g будет двусторонним. Действительно, возьмем $a \in I_g$ и $b \in A$. Так как I_g – правый идеал, то $ab \in I_g$ и для любых элементов $z_1, z_2, \dots, z_m$ из алгебры A будет выполнено равенство

$$abg(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = 0.$$

Из линеаризации тождества (2.1) получаем равенства

$$abg(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = -bag(Z_1, Z_2, \dots, Z_m).$$

Поэтому для любых элементов $z_1, z_2, \dots, z_m$ из алгебры A элемент $bag(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ равен 0, поэтому по определению множества I_g получаем, что $ba \in I_g$, т.е. I_g является также и левосторонним идеалом алгебры A .

Рассмотрим фактор-алгебру $B = A/I_g$. Из тождества (2.1) следует, что $y^2 \in I_g$ для любого $y \in A$, т.е. в алгебре B выполнено тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$. Поэтому алгебра B является не только левонильпотентной, но и просто нильпотентной алгеброй Ли, в которой выполнено тождество $z_1 z_2 z_3 z_4 \equiv 0$. Таким образом, для любых элементов из алгебры A произведение $z_1 z_2 z_3 z_4$ принадлежит идеалу I_g , поэтому в алгебре A выполняется следующее тождество, имеющее необходимый вид:

$$z_1 z_2 z_3 z_4 g(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \equiv 0.$$

Заметим, что данное тождество по-прежнему не выполняется в многообразии $\tilde{H}^k$. Действительно, если сделать вместо образующих ту же самую подстановку элементов алгебры $\tilde{H}^k$, вместо z_1 подставить элемент f , а вместо z_2, z_3, z_4 подставить элемент s , то в качестве результата получим тот же ненулевой элемент $\tilde{h}$.

Пусть теперь в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество степени один или два. Хорошо известно, что в этом случае в многообразии выполнено тождество коммутативности или антикоммутативности, поэтому оно будет не только левонильпотентным, но и просто нильпотентным.

Доказательство леммы теперь следует из строения S_{n-1} -модулей $Q_n^{(n)}$. Лемма 1 доказана.

В пространстве $P_n(\mathbf{V})$ обозначим подпространство, порожденное произведениями, у которых на первом левом месте расположена образующая x_n , через $Q_n^{(n)}(\mathbf{V})$. Тогда

$$\chi(Q_n^{(n)}(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^{(Q)} \chi_\lambda \quad (2.2)$$

– характер S_{n-1} -модуля $Q_n^{(n)}(\mathbf{V})$, причем так как $\mathbf{V} \subset {}_3\mathbf{N}$, имеем оценку $m_\lambda^{(Q)} \leq 1$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Тогда характер (2.2) лежит в некотором крюке, т.е. существуют такие натуральные числа p, q , что если $\lambda_{p+1} > q$, то $m_\lambda^{(Q)} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 разобьем на шаги и проведем его аналогично доказательству предложения 8.3 статьи [7]. Сначала докажем, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество вида $g_\lambda \equiv 0$, в котором диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\lambda \vdash (n-1)$, имеет четную длину всех столбцов. Далее покажем, что если длину одного из самых коротких столбцов увеличить на два, то получим тождество, которое является следствием исходного. Используя эту возможность, легко понять, что в многообразии выполнено тождество, соответствующее некоторой прямоугольной диаграмме Юнга. Последний шаг – это доказательство, что, “приклеивая” к прямоугольной диаграмме Юнга “ногу” и “руку”, получаем диаграммы, которые также соответствуют тождествам многообразия $\mathbf{V}$.

Шаг 1. Получение тождества специального вида. Покажем, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество вида $g_\lambda \equiv 0$, в котором диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\lambda \vdash (n-1)$ имеет четную длину всех столбцов, т.е. имеет вид

$$\lambda = (\alpha_1^{2n_1}, \alpha_2^{2n_2}, \dots, \alpha_k^{2n_k}).$$

Действительно, пусть в $\mathbf{V}$ выполнено тождество вида

$$x_0 St_{\mu_1}^{\nu_1} St_{\mu_2}^{\nu_2} \dots St_{\mu_m}^{\nu_m} \equiv 0, \quad (2.3)$$

где $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_m \in \mathbb{N}$, $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$. Доказательство проведем методом математической индукции по количеству k нечетных элементов множества $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$. Если $k = 0$, то получаем требуемое. Предположим, что утверждение верно в случае, когда число нечетных элементов в $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ меньше k . Докажем, что тогда оно верно и для k .

Пусть μ_s – наибольшее из нечетных чисел среди $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$. Тогда это тождество имеет степень $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s$ по переменной x_s .

Характеристика поля предполагается равной нулю, поэтому тождество (2.3) эквивалентно тождеству

$$x_0 \widetilde{St}_{\mu_1}^{\nu_1} \widetilde{St}_{\mu_2}^{\nu_2} \dots \widetilde{St}_{\mu_m}^{\nu_m} \equiv 0. \quad (2.4)$$

Заменим в тождестве (2.4) образующую x_s на сумму $u + v$ и возьмем компоненту первой степени по v . После замены $u = x_s$, $v = x_1 x_2$ в полученной сумме слагаемые, содержащие $x_1 x_2$, в произведениях пар образующих становятся равными нулю в силу тождества (1.4). Пользуясь тем, что в алгебре ${}_3\mathbf{N}$ выполнено тождество $x(yz)t \equiv xt(yz)$, получаем, что левая часть тождества (2.4) равна

$$\nu_s x_0 \widetilde{St}_{\mu_1}^{\nu_1} \widetilde{St}_{\mu_2}^{\nu_2} \dots \widetilde{St}_{\mu_s}^{\nu_s-1} \widetilde{St}_{\mu_{s-1}} \dots \widetilde{St}_{\mu_m}^{\nu_m} (x_1 x_2).$$

Значит, в $\mathbf{V}$ выполнено тождество

$$x_0 St_{\mu_1}^{\nu_1} St_{\mu_2}^{\nu_2} \dots St_{\mu_s}^{\nu_s-1} St_{\mu_{s-1}} \dots St_{\mu_m}^{\nu_m} St_2 \equiv 0,$$

которому соответствует диаграмма Юнга, содержащая $k - 1$ столбцов нечетной длины, а значит, для него выполнено предположение индукции, и доказательство завершено.

Таким образом, будем предполагать, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество вида $g_\lambda \equiv 0$, где $\lambda \vdash 2m$, $\lambda' = (\alpha_1^{\beta_1}, \alpha_2^{\beta_2}, \dots, \alpha_s^{\beta_s})$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s \in 2\mathbb{N}$, а

$$g_\lambda = x_{2m+1} St_{\alpha_1}^{\beta_1} St_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots St_{\alpha_s}^{\beta_s}.$$

Шаг 2. Увеличение длины одного из самых коротких столбцов диаграммы Юнга на два. Пусть ϕ_j – подстановка z_1 вместо x_j и $\phi_j^{(i)}$ – подстановка x_i вместо x_j , при этом остальные буквы неизменны. Например,

$$\phi_2^{(4)}(St_2) = \phi_2^{(4)}(St_2(X_1, X_2)) = St_2(X_1, X_4).$$

Рассмотрим j -ю строку диаграммы λ , т.е. $j \in \{1, \dots, \alpha_1\}$. Проведем частичную линеаризацию g_λ относительно x_j , произведя сначала замену $x_j \rightarrow x_j + z_1$, и возьмем однородную компоненту первой степени по z_1 . Обозначим результат данного процесса как $g_\lambda^{(j)}$. Заметим, что $g_\lambda^{(j)}$ зависит от строки j .

Для строк $j = 1, \dots, \alpha_s$ получим

$$g_\lambda^{(j)} = g_\lambda \sum_{i=1}^s \beta_i \frac{\phi_j(St_{\alpha_i})}{St_{\alpha_i}}.$$

Для строк $j = \alpha_s + 1, \dots, \alpha_{s-1}$ получим

$$g_\lambda^{(j)} = g_\lambda \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i \frac{\phi_j(St_{\alpha_i})}{St_{\alpha_i}},$$

и так далее. Таким образом, для последних строк $j = \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_1$ получим

$$g_\lambda^{(j)} = g_\lambda \beta_1 \frac{\phi_j(St_{\alpha_1})}{St_{\alpha_1}}.$$

Заметим, что дроби мы ввели и используем исключительно для упрощения обозначений.

Наша цель доказать, что мы можем добавить две клетки в специальное место диаграммы. Заметим, что если $\alpha_{s-1} > \alpha_s$, то $\alpha_{s-1} \geq \alpha_s + 2$.

Вследствие того, что g_λ является тождеством в $\mathbf{V}$, выражение

$$\beta_s g_\lambda[Z_1, Z_2] - \sum_{j=1}^{\alpha_s} g_\lambda^{(j)}[X_j, Z_2] \quad (2.5)$$

также является тождеством в $\mathbf{V}$.

Произведем замену $z_1 = x_{\alpha_s+1}$, $z_2 = x_{\alpha_s+2}$ и $x_{2m+1} = x_{2m+3}$. Заметим, что для $k = 1, \dots, s-1$ выполнено $\phi_j^{(\alpha_s+1)}(St_{\alpha_k}) = 0$, так как после подстановки буква x_{α_s+1} встретится дважды в стандартном многочлене, который мы альтернировали. Таким образом, действие $\phi_j^{(\alpha_s+1)}$ может быть ограничено только последним сомножителем $St_{\alpha_s}^{\beta_s}$. Другими словами, когда $z_1 = x_{\alpha_s+1}$, имеем

$$g_\lambda^{(j)}[X_j, X_{\alpha_s+2}] = \beta_s x_{2m+3} St_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots St_{\alpha_{s-1}}^{\beta_{s-1}} St_{\alpha_s}^{\beta_s-1} (\phi_j^{(\alpha_s+1)}(St_{\alpha_s}))[X_j, X_{\alpha_s+2}].$$

Пользуясь (2.5) получаем, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет следующему тождеству:

$$\beta_s x_{2m+3} St_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots St_{\alpha_s}^{\beta_s-1} \left(St_{\alpha_s}[X_{\alpha_s+1}, X_{\alpha_s+2}] - \sum_{j=1}^{\alpha_s} \phi_j^{(\alpha_s+1)}(St_{\alpha_s})[X_j, X_{\alpha_s+2}] \right) \equiv 0.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что выражение, заключенное во внутренние скобки, равно St_{α_s+2} . Таким образом, в $\mathbf{V}$ выполнено тождество $g_\mu \equiv 0$, где диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\mu \vdash 2m+2$, получается приклеиванием к левому из самых коротких столбцов диаграммы λ двух клеток.

Понятно, что “приклеивание” таким образом столбиков высоты два позволяет получить прямоугольную диаграмму Юнга.

Шаг 3. Возможность “приклеивания” “руки” и “ноги”. Предположим теперь, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $g_\lambda \equiv 0$, где последняя строка разбиения λ длины q , а последний столбец длины $2r$. Покажем, что приклеив к диаграмме Юнга λ произвольную “ногу” ширины не более q и произвольную “руку” высоты не более $2r$, получим такую диаграмму μ , что соответствующее тождество $g_\mu \equiv 0$ выполняется в $\mathbf{V}$.

Пусть

$$\lambda = (p^{2r}, \lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_{2(r+s)}, q^{2l})$$

– разбиение $2m$ со столбцами четной длины, а

$$\mu = (p + \alpha_1, \dots, p + \alpha_{2r}, \lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_{2(r+s)}, q^{2l}, \mu_{2(r+s+l)+1}, \mu_{2(r+s+l)+2}, \dots)$$

– разбиение N . Тогда тождество $g_\mu \equiv 0$ является следствием тождества $g_\lambda \equiv 0$.

Доказательство этого утверждения проведем в два этапа. Сначала приклеим “ногу”. Пусть

$$\nu = (p^{2r}, \lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_{2(r+s)}, q^{2l}, \mu_{2(r+s+l)+1}, \mu_{2(r+s+l)+2}, \dots)$$

– разбиение M . Покажем, что тождество $g_\nu \equiv 0$ следует из тождества $g_\lambda \equiv 0$.

Пусть $T = T_\lambda$ – стандартная таблица Юнга, в которой числа $1, 2, \dots$ записаны последовательно в первый столбец, во второй и так далее. Пусть $e_T = R_T C_T$ обозначает соответствующий квази-идемпотент в KS_{2m} . Так как $R_T C_T R_T C_T = \gamma R_T C_T$, где $\gamma \neq 0$, делаем вывод, что $C_T R_T C_T$ – ненулевой элемент в KS_{2m} . Обозначим соответствующий полилинейный элемент свободной алгебры многообразия ${}_3\mathbf{N}$

$$\tilde{g}_\lambda = x_{2m+1} \tilde{f}_\lambda = x_{2m+1} C_T R_T C_T ([X_1, X_2] \cdots [X_{2m-1}, X_{2m}]).$$

Понятно, что этот элемент кососимметричен относительно каждого множества образующих, индексы которых записаны в один и тот же столбец таблицы T_λ . Заметим также, что тождества $g_\lambda \equiv 0$ и $\tilde{g}_\lambda \equiv 0$ эквивалентны. Переобозначим для удобства образующие и будем считать, что $\tilde{f}_\lambda = \tilde{f}_\lambda(X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m)$.

Пусть $t = r + s + l$, тогда $2t$ – длина первых q столбцов диаграммы λ . По построению $\tilde{g}_\lambda$ кососимметричен относительно каждого из следующих q множеств образующих:

$$A_i = \{x_{(i-1)t+1}, y_{(i-1)t+1}, \dots, x_{it}, y_{it}\}, \quad \text{где } i = 1, \dots, q.$$

Более того, $\tilde{g}_\lambda$ кососимметричен относительно каждого из следующих множеств образующих: A_i , где $i = q + 1, \dots, p$. Заметим, что $|A_i| = \lambda'_i$ – длина i -го столбца диаграммы λ .

Пусть $\tau \vdash M - 2m$ – “нога”, т.е.

$$\tau = (\mu_{2(r+s+l)+1}, \mu_{2(r+s+l)+2}, \dots).$$

В частности, $\tau_1 = q$.

Построим полилинейный элемент

$$\tilde{f}_\tau = \tilde{f}_\tau(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}, \dots, Z^{(1)}, \dots, X_q^{(q)}, Y_q^{(q)}, \dots, Z^{(q)}),$$

где $Z^{(i)} = X_{k+1}^{(i)}$, если $\tau'_i = 2k + 1$, или $Z^{(i)} = Y_k^{(i)}$, если $\tau'_i = 2k$. Значит, $\tilde{f}_\tau$ кососимметричен относительно каждого из следующих множеств образующих:

$$B_i = \{X_1^{(i)}, Y_1^{(i)}, \dots, Z^{(i)}\}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Отметим, что $|B_i| = \tau'_i$ – длина i -го столбца диаграммы τ .

Рассмотрим элемент $x_{M+1} \tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau$ и в нем произведем альтернирование по каждому из q множеств образующих:

$$C_i = A_i \cup B_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Заметим, что это альтернирование соответствует первым q столбцам диаграммы ν . Формально это означает следующее: возьмем множество $C_i = A_i \cup B_i$, пусть $S(C_i)$ будет симметрической группой на этом множестве. Обозначим $C_{\lambda,\mu} = S(C_1) \times \cdots \times S(C_q)$,

$$C_{\lambda,\mu}^- = \sum_{\pi \in C_{\lambda,\mu}} (-1)^\pi \pi,$$

и рассмотрим $C_{\lambda,\mu}^-(x_{M+1} \tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau)$.

По построению тождество $C_{\lambda,\mu}^-(x_{M+1} \tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau) \equiv 0$ является следствием тождества $g_\lambda \equiv 0$. Заметим, что полученный элемент не равен нулю в пространстве $Q_{M+1}^{(M+1)}$. Для доказательства этого достаточно подставить вместо образующих следующие элементы алгебры $\tilde{H}^M$:

$$\begin{aligned} x_{M+1} &= f, \quad f \in T_M, \quad x_i = b_i, \quad y_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j^{(r)} &= b_{m+k_1+\dots+k_{r-1}+j}, \quad y_j^{(r)} = a_{m+k_1+\dots+k_{r-1}+j}, \quad j = 1, \dots, k_r, \quad r = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

причем $\tau'_s = 2k_s$ или $\tau'_s = 2k_s - 1$ в зависимости от четности длины s -го столбца диаграммы τ .

Исследуем разложение на неприводимые подмодули ненулевого модуля, порожденного элементом $C_{\lambda,\mu}^-(x_{M+1} \tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau)$ в пространстве $Q_{M+1}^{(M+1)}$. По правилу Литтлвуда–Ричардсона диаграммы Юнга, соответствующие этим неприводимым модулям должны содержать диаграммы λ и τ . Учитывая кососимметризации, получаем, что единственной такой диаграммой является диаграмма ν , что завершает первый этап доказательства.

Теперь приклеим “руку” τ к диаграмме ν . Пусть $\tau = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2r})$, и так как $f_\mu = f_\nu \cdot f_\tau$, то получаем, что тождество $g_\mu \equiv 0$ следует из тождества $g_\nu \equiv 0$.

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Отметим, что S_n -модуль $P_n(\mathbf{V})$ индуцирован с S_{n-1} -модуля $Q_n^{(n)}(\mathbf{V})$. Так как характер (2.2) S_{n-1} -модуля $Q_n^{(n)}(\mathbf{V})$ расположен в некотором крюке, то такое же утверждение верно и для характера (1.3). Пусть крюк имеет высоту и ширину равную d ; другими словами, если $\mu_{d+1} > d$, то кратность m_μ в сумме (1.3) равна нулю.

Так как согласно результатам статьи [4] кратность для многообразия ${}_3\tilde{\mathbf{N}}$ равна числу угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга, то получаем, что не зависимо от числа n для кратностей в сумме (1.3) выполняются неравенства $m_\lambda \leq 2d$. Число различных диаграмм Юнга, расположенных в таком крюке, не превосходит числа n^{2d} , а, как хорошо известно, размерности соответствующих неприводимых модулей ограничены экспоненциальной функцией $(2d)^n$. В итоге получаем, что для кодлин и коразмерностей выполняются неравенства

$$l_n(\mathbf{V}) < 2d \cdot n^{2d}, \quad c_n(\mathbf{V}) < 2d \cdot n^{2d} \cdot (2d)^n.$$

Таким образом, многообразие $\mathbf{V}$ имеет рост не выше экспоненциального, рост его кодлин не выше полиномиального, а кратности ограничены константой, не зависящей от числа n .

Теорема доказана.

Отметим в заключение, что полученные результаты аналогичны результатам статьи [8], т.е. по своим свойствам многообразие алгебр Лейбница ${}_3\mathbf{N}$ похоже на многообразие алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$, которое определяется тождеством $(x_1x_2x_3)(x_4x_5x_6) \equiv 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [2] A. Giambruno, M. V. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr., **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [3] А. М. Блох, “Об одном обобщении понятия алгебры Ли”, *Докл. АН СССР*, **18**:3 (1965), 471–473.
- [4] L. E. Abanina, S. P. Mishchenko, “The variety of Leibniz algebras defined by the identity $x(y(zx)) \equiv 0$ ”, *Serdica Math. J.*, **29**:3 (2003), 291–300.
- [5] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Math. Appl., **2**, Addison-Wesley Publ., Reading, MA, 1976.
- [6] P. J. Higgins, “Lie rings satisfying the Engel condition”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50**:1 (1954), 8–15.
- [7] S. P. Mishchenko, V. M. Petrogradsky, A. Regev, “Poisson PI algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359**:10 (2007), 4669–4694.
- [8] М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, “Новое экстремальное свойство многообразия алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 15–18.

С. П. Мищенко

Ульяновский государственный университет

E-mail: mishchenkosp@mail.ru

Поступило

15.11.2010

Исправленный вариант

26.09.2013

Ю. Ю. Фролова

Ульяновский государственный университет

E-mail: yuyufrolova@mail.ru