Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Веревкин, О матричном нильпотентном фильтре,
Матем. заметки, 2012, том 92, выпуск 2, 192–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:32:14

О матричном нильпотентном фильтре

А. Б. Верёвкин

В работе определены два семейства однородных идеалов алгебры многочленов, порожденных элементами степеней общей матрицы и ее операторными инвариантами. Изучаются комбинаторные характеристики указанных идеалов, подробно разобран случай второго порядка.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Пусть $M = (x_{ij})$ – квадратная матрица от n^2 коммутирующих переменных $X = \{x_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$. Рассмотрим ее степени $M^s = (f_{ij}^{(s)}(X))$, здесь $f_{ij}^{(s)}(X)$ – однородные полиномы от X общей степени s . В алгебре коммутативных многочленов $A = k[X]$ над полем k определим однородные идеалы

$$F^{(s)} = (f_{ij}^{(s)}(X) \mid i, j = 1, \dots, n), \quad F^{(0)} = A.$$

$\mathbb{Z}$ -Градуированные фактор-алгебры $A/F^{(s)}$ обозначим $B^{(s)}$.

ЛЕММА 1. *При $t > s$ имеется вложение идеалов $F^{(t)} \subsetneq F^{(s)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что элементы матрицы M^s лежат в $F^{(s)}$, следовательно, $M^s = 0$ в $B^{(s)}$. Если $t \geq s$, тогда $M^t = M^s \cdot M^{t-s} = 0 \cdot M^{t-s} = 0$ в $B^{(s)}$, поэтому элементы M^t и порожденный ими идеал $F^{(t)}$ лежат в $F^{(s)}$. В случае строгого неравенства в $F^{(s)}$ имеются элементы степени s , не входящие в $F^{(t)}$.

Эта лемма мотивирует основное определение работы:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Цепь идеалов

$$\dots \subset F^{(s+1)} \subset F^{(s)} \subset \dots \subset F^{(1)} \subset F^{(0)} = A$$

назовем *матричным нильпотентным фильтром* на алгебре $A = k[X]$.

Мы изучим комбинаторные свойства элементов построенного фильтра и его последовательных факторов, в том числе, алгебр $B^{(s)}$. Для этого будут использованы базисы Грёбнера идеалов (см. [1; 2.1–2.7, 3.3]; [2; гл. 2]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00209-а).

Для описания нильпотентного фильтра мы определим вспомогательные идеалы алгебры A :

$$G^{(s)} = (g^{(s-n+1)}(X), \dots, g^{(s-1)}(X), g^{(s)}(X)),$$

где $s \geq n-1$, а $g^{(r)}(X)$ – однородные полиномы от X общей степени r , являющиеся операторными инвариантами матрицы M и определяемые при $r \geq 0$ разложением

$$\sum_{r \geq 0} g^{(r)}(X) \cdot \theta^r := (\det(E - M \cdot \theta))^{-1};$$

отметим, что $g^{(0)}(X) = 1$, а $G^{(n-1)} = A$.

Полиномы $g^{(r)}(X)$ изучались в работе [3], там они обозначены K_{r+n-1} . Не удалось узнать, рассматривались ли ранее идеалы, аналогичные $G^{(s)}$.

В следующем пункте мы выясним свойства построенных идеалов в самом общем случае. Например, в лемме 3 будет показано, что $G^{(s)}$ задают фильтрацию на алгебре A , при больших s , сплетенную с нильпотентным фильтром $(F^{(s)})$.

Последний пункт посвящен малым размерностям $n = 1, 2, \dots$, и большинство утверждений там носят технический характер. Завершающими комбинаторными результатами работы являются описание рядов Гильберта подфакторов построенных фильтраций в теореме 9 и вычисление многочлена Гильберта алгебры $B^{(s)}$ в лемме 11.

Структурно-алгебраические и алгебро-геометрические вопросы заслуживают рассмотрения в отдельной работе, так же, как изучение аналогичных проблем в некоммутативном случае – здесь они затрагиваться не будут.

2. Общие результаты. Докажем некоторые общие свойства построенных ранее идеалов.

ЛЕММА 2. *Имеются следующие вложения идеалов алгебры A :*

- 1) $F^{(t+s)} \subseteq F^{(t)} \cdot F^{(s)}$ и, в частности, $F^{(s)} \subseteq (F^{(1)})^s$;
- 2) $\det M \cdot F^{(s)} \subseteq F^{(s+1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $M^{t+s} = M^t \cdot M^s$, поэтому элементы M^{t+s} выражаются через попарные произведения элементов M^t и M^s , откуда следует первое утверждение.

Матрица M – корень характеристического многочлена $\chi_M(\theta) = \det(M - \theta \cdot E_n)$, запишем равенство $\chi_M(M) \cdot M^s = 0$:

$$(-1)^n M^{n+s} + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} M \cdot M^{n-1+s} + \dots + \det M \cdot M^s = 0.$$

Матричные элементы первых n слагаемых левой части лежат в $F^{(s+1)}$, значит, элементы $\det M \cdot M^{(s)}$ тоже принадлежат $F^{(s+1)}$, что доказывает второе утверждение.

ЛЕММА 3. *При $s \geq n-1$ имеются вложения идеалов:*

- 1) $\det M \cdot G^{(s)} \subseteq G^{(s+n)}$;
- 2) $F^{(s)} \subseteq G^{(s)}$;
- 3) если $t \geq s$, то $G^{(t)} \subseteq G^{(s)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем коэффициенты при θ^{s+n} в равенстве

$$\det(E - M \cdot \theta) \cdot \sum_{s \geq 0} g^{(s)}(X) \cdot \theta^s = 1.$$

При $s \geq n - 1$ они имеют вид, задающий рекуррентную зависимость на $(g^{(s)}(X))$:

$$g^{(s+n)}(X) - \operatorname{tr} M \cdot g^{(s+n-1)}(X) + \dots + (-1)^n \det M \cdot g^{(s)}(X) = 0. \quad (1)$$

По определению первые n слагаемых левой части лежат в $G^{(s+n)}$, значит, и последнее слагаемое $\det(M) \cdot g^{(s)}(X)$ принадлежит $G^{(s+n)}$.

2) Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{s \geq 0} M^s \cdot \theta^s &= (E_n - M \cdot \theta)^{-1} = \frac{1}{\det(E - M \cdot \theta)} \cdot \widetilde{(E_n - M \cdot \theta)}^\top \\ &= \left(\sum_{t \geq 0} g^{(t)}(X) \cdot \theta^t \right) \cdot \widetilde{(E_n - M \cdot \theta)}^\top. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\widetilde{(E_n - M \cdot \theta)}$ означает матрицу, присоединенную к $(E_n - M \cdot \theta)$, состоящую из ее $((n-1) \times (n-1))$ -миноров, которые являются многочленами от θ (как и от X) степени не выше $n-1$. Поэтому наше утверждение следует из соотношений:

$$f_{ij}^{(s)}(X) = \left(\left(\sum_{t \geq 0} g^{(t)}(X) \cdot \theta^t \right) \cdot \widetilde{(E_n - M \cdot \theta)}_{ji} \right)_{\theta^s} \in (g^{(s-(n-1))}(X), \dots, g^{(s)}(X)) = G^{(s)}.$$

3) Рекурсия (1) влечет $g^{(s+n)}(X) \in G^{(s+n-1)}$, а по определению имеет место вложение

$$\{g^{(s+n-1)}(X), g^{(s+n-2)}(X), \dots, g^{(s+1)}(X)\} \subset G^{(s+n-1)}.$$

Поэтому для $s \geq 0$ выполняется $G^{(s+n)} \subset G^{(s+n-1)}$, и мы получаем вторую однородную фильтрацию на A , здесь $t > n$:

$$\dots \subset G^{(t+1)} \subset G^{(t)} \subset \dots \subset G^{(n)} \subset G^{(n-1)} = A.$$

3. Малые размерности. Более конкретные утверждения о построенных ранее фильтрациях удастся доказать при малых размерностях $n = 1, 2$.

Случай $n = 1$ очевиден: $F^{(s)} = G^{(s)} = (x^s)$, $B^{(s)} = k[x]/(x^s) = \langle 1, x, \dots, x^{s-1} \rangle_k$, а $\mathbb{Z}$ -градуированный A -модуль $F^{(s)}/F^{(s+1)}$ изоморфен $\langle x^s \rangle_k$.

Более сложен случай $n = 2$, который мы будем разбирать до конца этой работы. Примем более удобные обозначения:

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}, \quad \sum_{s \geq 0} g^{(s)}(X) \cdot \theta^s = (1 - (x + v) \cdot \theta + (x \cdot v - y \cdot z) \cdot \theta^2)^{-1}.$$

Идеалы $G^{(s)} = (g^{(s-1)}(X), g^{(s)}(X))$ при $s \geq 1$ заданы в алгебре $A = k[x, y, z, v]$.

ЛЕММА 4. В рассматриваемой ситуации имеются следующие формулы:

- 1) $g^{(s)}(X) = \sum_{t=\lceil s/2 \rceil}^s C_t^{s-t} \cdot (-\det M)^{s-t} (\operatorname{tr} M)^{2t-s};$
- 2) $F^{(s)} = (g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X) \cdot v, g^{(s-1)}(X) \cdot y, g^{(s-1)}(X) \cdot z, g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X) \cdot x);$
- 3) $M^{s+1} = g^{(s)}(X) \cdot M - g^{(s-1)}(X) \cdot \det M \cdot E_2.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскроем определение $(g^{(s)}(X), s \geq 0)$ при $n = 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{s \geq 0} g^{(s)}(X) \cdot \theta^s &= (1 - \theta(\operatorname{tr} M - \det M \cdot \theta))^{-1} = \sum_{t \geq 0} \theta^t (\operatorname{tr} M - \det M \cdot \theta)^t \\ &= \sum_{t \geq 0} \theta^t \sum_{u=0}^t C_t^u (-\det M)^u (\operatorname{tr} M)^{t-u} \theta^u = \sum_{t \geq 0} \sum_{u=0}^t \theta^{t+u} C_t^u (-\det M)^u (\operatorname{tr} M)^{t-u} \\ &= \sum_{s \geq 0} \theta^s \sum_{t=0}^s C_t^{s-t} (-\det M)^{s-t} (\operatorname{tr} M)^{2t-s}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом $C_t^{s-t} = 0$ при $2t < s$ получается первая формула.

Применительно к разбираемому случаю вернемся к равенству (2):

$$\begin{aligned} \sum_{s \geq 0} M^s \cdot \theta^s &= \left(\sum_{t \geq 0} g^{(t)}(X) \cdot \theta^t \right) \cdot \widetilde{(E_2 - M \cdot \theta)}^\top \\ &= \left(\sum_{t \geq 0} g^{(t)}(X) \cdot \theta^t \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \cdot \theta & y \cdot \theta \\ z \cdot \theta & 1 - x \cdot \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при θ^s при $s > 0$, получаем

$$\begin{aligned} M^s &= \begin{pmatrix} g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X) \cdot v & g^{(s-1)}(X) \cdot y \\ g^{(s-1)}(X) \cdot z & g^{(s)}(X) - g^{(s-1)}(X) \cdot x \end{pmatrix} \\ &= g^{(s)}(X) \cdot E_2 - g^{(s-1)}(X) \cdot \widetilde{M}^\top. \end{aligned}$$

Теперь из первого равенства следует вторая формула, а третья получается умножением предыдущих равенств на M .

ПРИМЕРЫ. Формула 1) из леммы 4 дает следующие равенства:

- $g^{(0)}(X) = 1$;
- $g^{(1)}(X) = \operatorname{tr} M = x + v$;
- $g^{(2)}(X) = -\det M + (\operatorname{tr} M)^2 = x^2 + xv + v^2 + yz$;
- $g^{(3)}(X) = -2 \det M \cdot \operatorname{tr} M + (\operatorname{tr} M)^3 = (x + v)(x^2 + v^2 + 2yz)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. При $s > 0$ из пункта 2) леммы 4 получаем

- 1) $\{g^{(s-1)}(X) \cdot y, g^{(s-1)}(X) \cdot z, g^{(s-1)}(X) \cdot (x - v)\} \subset F^{(s)}$;
- 2) $g^{(s-1)}(X) \cdot v \equiv g^{(s-1)}(X) \cdot x \equiv g^{(s)}(X) \pmod{F^{(s)}}$;
- 3) $G^{(s)}/F^{(s)} = A \cdot g^{(s-1)}(X)$.

ЛЕММА 6. При $s > 0, t \geq 0$ имеют место следующие сравнения:

- 1) $g^{(t+s-1)}(X) \equiv x^t \cdot g^{(s-1)}(X) \pmod{F^{(s)}}$;
- 2) $g^{(2s-1)}(X) \equiv 0 \pmod{F^{(s)}}$;
- 3) $x^s \cdot g^{(s-1)}(X) \equiv 0 \pmod{F^{(s)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \geq s > 0$, тогда $g^{(u)}(X) - x \cdot g^{(u-1)}(X) \in F^{(u)} \subset F^{(s)}$, следовательно,

$$g^{(u)}(X) \equiv x \cdot g^{(u-1)}(X) \pmod{F^{(s)}},$$

и первое сравнение вытекает из равенства

$$g^{(t+s-1)}(X) - x^t \cdot g^{(s-1)}(X) = \sum_{i=0}^{t-1} x^i \cdot (g^{(t+s-i-1)}(X) - x \cdot g^{(t+s-i-2)}(X)) \in F^{(s)}.$$

Элементы матрицы M^s лежат в $F^{(s)}$, следовательно, $\text{tr } M^s \in F^{(s)}$. Выразим матрицу $M^{2s} = (M^s)^2$ через полиномы $g^{(u)}(X)$:

$$\begin{pmatrix} (g^{(s)})^2 - 2g^{(s)}g^{(s-1)}v + (g^{(s-1)})^2(v^2 + yz) & \text{tr } M^s \cdot g^{(s-1)}y \\ \text{tr } M^s \cdot g^{(s-1)}z & t(g^{(s)})^2 - 2g^{(s)}g^{(s-1)}x + t(g^{(s-1)})^2(x^2 + yz) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в A выполняется равенство

$$\text{tr } M^s \cdot g^{(s-1)}(X) \cdot y = g^{(2s-1)}(X) \cdot y,$$

откуда вытекает второе сравнение:

$$g^{(2s-1)}(X) = \text{tr } M^s \cdot g^{(s-1)}(X) \in F^{(s)}.$$

Третье сравнение вытекает из предыдущих двух:

$$x^s \cdot g^{(s-1)}(X) \equiv g^{(2s-1)}(X) \equiv 0 \pmod{F^{(s)}}.$$

ТЕОРЕМА 7. A -модуль $G^{(s)}/F^{(s)}$, рассматриваемый как $\mathbb{Z}$ -градуированное пространство, изоморфен

$$\langle g^{(s-1)}(X), x \cdot g^{(s-1)}(X), \dots, x^{s-1} \cdot g^{(s-1)}(X) \rangle_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно пунктам 1), 2) леммы 6 для $P(x, y, z, v) \in k[x, y, z, v]$ имеем

$$P(x, y, z, v) \cdot g^{(s-1)}(X) \equiv P(x, 0, 0, x) \cdot g^{(s-1)}(X) \pmod{F^{(s)}}.$$

Учитывая пункт 3) следствия 5 и пункт 3) леммы 6, имеем

$$G^{(s)}/F^{(s)} = \{P(x) \cdot g^{(s-1)}(X), \deg P(x) < s\}.$$

Итак, для доказательства теоремы осталось показать, что $x^{s-1} \cdot g^{(s-1)}(X) \notin F^{(s)}$, или же по сравнению 1) из леммы 6 $g^{(2s-2)}(X) \notin F^{(s)}$.

Определим идеал

$$J = (z) \triangleleft A = k[x, y, z, v]: A/J \cong k[x, y, v].$$

Если $a \in A$, то $\bar{a} = a + J$ из A/J можно рассматривать как элемент $k[x, y, v]$, подставив $z = 0$.

Докажем, что

$$g^{(2s-2)}(X) + J = \overline{g^{(2s-2)}(X)} \not\subset F^{(s)} + J = \overline{F^{(s)}},$$

из чего будет следовать искомое. Имеем

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-v} & -y \\ 0 & x-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-v & y \\ 0 & \frac{1}{x-v} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-v} & -y \\ 0 & x-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^s & 0 \\ 0 & v^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-v & y \\ 0 & \frac{1}{x-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^s & y \cdot \frac{x^s - v^s}{x-v} \\ 0 & v^s \end{pmatrix}.$$

Из этих равенств определяются $\overline{f_{ij}^{(s)}}(X)$:

$$\overline{f_{11}^{(s)}}(X) = x^s, \quad \overline{f_{22}^{(s)}}(X) = v^s, \quad \overline{f_{12}^{(s)}}(X) = y \cdot \frac{x^s - v^s}{x-v}.$$

Зафиксируем порядок $y > x > v$ и докажем, что набор $\{\overline{f_{11}^{(s)}}(X), \overline{f_{22}^{(s)}}(X), \overline{f_{12}^{(s)}}(X)\}$ является базисом Грёбнера (см. [1; п. 2, с. 35–37], [2; гл. 2, с. 105]) идеала

$$\begin{aligned} \overline{F^{(s)}} \triangleleft k[x, y, v]: \overline{f_{12}^{(s)}}(X) &= y(x^{s-1} + vx^{s-2} + \dots + v^{s-2}x + v^{s-1}) \\ &= \underline{vx^{s-1}y} + vx^{s-2}y + \dots + v^{s-2}xy + v^{s-1}y. \end{aligned}$$

Старший моном $\overline{f_{12}^{(s)}}(X)$ равен $x^{s-1}y$ и при $s \geq 2$ имеет единственное зацепление $x \cdot x^{s-1}y = x^s \cdot y$ с x^s — старшим (и единственным) мономом $\overline{f_{11}^{(s)}}(X)$. Отсюда получается одна композиция, проведем ее редукцию:

$$\begin{aligned} x \cdot \overline{f_{12}^{(s)}}(X) - \overline{f_{11}^{(s)}}(X) \cdot y &= xy \frac{x^s - v^s}{x-v} - x^s y = y \frac{x^{s+1} - v^s x - x^{s+1} + vx^s}{x-v} \\ &= vxy \frac{x^{s-1} - v^{s-1}}{x-v} = vxy \cdot (x^{s-2} + vx^{s-3} + \dots + v^{s-3}x + v^{s-2}) \\ &= \underline{vx^{s-1}y} + v^2x^{s-2}y + \dots + v^{s-2}x^2y + v^{s-1}xy \xrightarrow{f_{12}} vxy \frac{x^{s-1} - v^{s-1}}{x-v} - v \cdot y \frac{x^s - v^s}{x-v} \\ &= \frac{vy}{x-v} (x^s - v^{s-1}x - x^s + v^s) = \frac{v^s y \cdot (v-x)}{x-v} = -\underline{v^s} \cdot y \xrightarrow{f_{22}} 0. \end{aligned}$$

Итак, единственная композиция набора $\{\overline{f_{11}^{(s)}}(X), \overline{f_{22}^{(s)}}(X), \overline{f_{12}^{(s)}}(X)\}$ редуцируется к нулю, и это множество является замкнутым относительно композиции редуцированным множеством — базисом Грёбнера идеала $\overline{F^{(s)}}$. Строго говоря, это рассуждение приспособлено к случаю $s \geq 4$, но несложно проверить, что при $s = 2$ или 3 результат подчиняется той же формуле.

При $s = 1$ зацеплений старших мономов нет, а поэтому нет и композиций, и указанное множество также является базисом Грёбнера.

Элементы $\overline{g^{(s)}}(X)$ определяются из соотношения

$$\sum_{s \geq 0} \overline{g^{(s)}}(X) \cdot \theta^s = \frac{1}{\det(E_2 - \overline{M} \cdot \theta)} = \frac{1}{(1-x\theta)(1-v\theta)} = \frac{1}{x-v} \left(\frac{x}{1-x\theta} - \frac{v}{1-v\theta} \right).$$

Откуда получаем выражения $\overline{g^{(s)}}(X) = (x^{s+1} - v^{s+1})/(x - v)$ и редукцию $\overline{g^{(2s-2)}}(X)$ к нормальному относительно базиса Грёбнера виду:

$$\begin{aligned}\overline{g^{(2s-2)}}(X) &= \frac{x^{2s-1} - v^{2s-1}}{x - v} \\ &= \underline{x^{2s-2}} + v\underline{x^{2s-3}} + \dots + v^{s-1}x^{s-1} + \dots + \underline{v^{2s-3}x} + \underline{v^{2s-2}} \\ &\xrightarrow{f_{11,22}} v^{s-1}x^{s-1} \neq 0.\end{aligned}$$

Это рассуждение корректно при $s \geq 3$; при $s = 2$

$$\overline{g^{(2s-2)}}(X) = x^2 + vx + v^2 \rightarrow vx \neq 0;$$

при $s = 1$

$$\overline{g^{(2s-2)}}(X) = 1 \neq 0.$$

Итак, всегда $\overline{g^{(2s-2)}}(X) \notin \overline{F^{(s)}}$, и теорема 7 доказана.

ТЕОРЕМА 8. *При $s \geq 1$ точна последовательность $\mathbb{Z}$ -градуированных A -модулей:*

$$0 \rightarrow A[-2s+1] \xrightarrow{\theta} A[-s] \oplus A[-s+1] \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow A/G^{(s)} \rightarrow 0,$$

где

$$\theta(a) = (a \cdot g^{(s-1)}(X), a \cdot g^{(s)}(X)), \quad \varphi((a', a'')) = a' \cdot g^{(s)}(X) - a'' \cdot g^{(s-1)}(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\varphi \circ \theta = 0$, и необходимо доказать лишь, что $\ker \varphi = \operatorname{Im} \theta$. Пусть $(a', a'') \in \ker \varphi$ такие, что

$$a' \cdot g^{(s)}(X) - a'' \cdot g^{(s-1)}(X) = 0.$$

Тогда $a' \cdot g^{(s)}(X)$ делится на $g^{(s-1)}(X)$. Обращаясь к рекуррентной зависимости (1) при $s \geq 2$, имеем

$$g^{(s)}(X) - \operatorname{tr} M \cdot g^{(s-1)}(X) + \det M \cdot g^{(s-2)}(X) = 0.$$

Получим, что $a' \cdot \det M \cdot g^{(s-2)}(X)$ делится на $g^{(s-1)}(X)$. Обращаясь к той же рекуррентной зависимости (1) при $s \geq 3$, получаем

$$g^{(s-1)}(X) - \operatorname{tr} M \cdot g^{(s-2)}(X) + \det M \cdot g^{(s-3)}(X) = 0.$$

Получим, что $a' \cdot (\det M)^2 \cdot g^{(s-3)}(X)$ делится на $g^{(s-1)}(X)$. Аналогично, индукцией по s можно показать, что

$$a' \cdot (\det M)^{s-1} \cdot g^{(0)}(X) = a' \cdot (\det M)^{s-1} \cdot g^{(s-1)}(X).$$

Согласно пункту 1) леммы 4 при $s \geq 2$ имеем равенство

$$\begin{aligned}g^{(s-1)}(X) &= \sum_{t=\lceil (s-1)/2 \rceil}^{s-1} C_t^{s-1-t} \cdot (-\det M)^{s-1-t} (\operatorname{tr} M)^{2t-s+1} \\ &= (\operatorname{tr} M)^{s-1} - \det M \sum_{t=\lceil (s-1)/2 \rceil}^{s-2} C_t^{s-1-t} \cdot (-\det M)^{s-2-t} (\operatorname{tr} M)^{2t-s+1}.\end{aligned}$$

Многочлен $\text{tr } M$ неприводим в $A = k[x, y, z, v]$, и $\det M \notin (\text{tr } M)$, следовательно, $\det M$ и $\text{tr } M$ взаимно просты. Поэтому $\det M$ не имеет общих множителей с $(\text{tr } M)^{s-1}$ и $g^{(s-1)}(X)$, а $g^{(s-1)}(X)$ не имеет общих множителей с $(\det M)^{s-1}$. Отсюда следует, что a' делится на $g^{(s-1)}(X)$, т.е. $a' = a \cdot g^{(s-1)}(X)$.

Тогда

$$a'' \cdot g^{(s-1)}(X) = a' \cdot g^{(s)}(X) = a \cdot g^{(s-1)}(X) \cdot g^{(s)}(X)$$

и $a'' = a \cdot g^{(s)}(X)$. Таким образом, получаем включение, доказывающее теорему 8:

$$(a', a'') = (a \cdot g^{(s-1)}(X), a \cdot g^{(s)}(X)) = \theta(a) \in \text{Im } \theta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [1; п. 3, с. 47–50], [2; гл. 9, п. 3, с. 574]). Если $V \cong \bigoplus_{m \geq 0} V_m$ — градуированное пространство над полем k , тогда его функция Гильберта h_V задается своими значениями $h_V(m) = \dim_k V_m$, а ряд Гильберта $\sum_{m \geq 0} \dim_k V_m \cdot t^m$ обозначается $V(t)$.

Если существует многочлен, значения которого совпадают с $h_V(m)$ при достаточном больших m , тогда он обозначается $P_V(m)$ и называется *многочленом Гильберта* пространства V .

ТЕОРЕМА 9. При $s \geq 1$ имеют следующие равенства:

- 1) $A/G^{(s)}(t) = \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4};$
- 2) $G^{(s)}/F^{(s)}(t) = \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{(1-t)};$
- 3) $B^{(s)}(t) = \frac{(1-t^{s-1})(1-t^s)}{(1-t)^4} + \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{1-t};$
- 4) $G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) = \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3};$
- 5) $F^{(s)}/F^{(s+1)}(t) = \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3} + t^{2s} + t^{2s-1} - t^{s-1}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $A(t) = (1-t)^{-4}$, из теоремы 8 получаем равенства

$$A/G^{(s)}(t) = A(t) \cdot (1 - (t^s + t^{s-1}) + t^{2s-1}) = \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4}.$$

2) из теоремы 7 следует

$$G^{(s)}/F^{(s)}(t) = t^{s-1} + t^s + \dots + t^{2s-2} = \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{(1-t)}.$$

3) Из 1) и 2) получаем равенства

$$B^{(s)}(t) = A/F^{(s)}(t) = A/G^{(s)}(t) + G^{(s)}/F^{(s)}(t) = \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4} + \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{1-t}.$$

4) Из 1) следует

$$\begin{aligned} G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) &= A/G^{(s+1)}(t) - A/G^{(s)}(t) = \frac{(1-t^{s+1})(1-t^s)}{(1-t)^4} - \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4} \\ &= \frac{(1-t^s)(t^{s-1}-t^{s+1})}{(1-t)^4} = \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3}. \end{aligned}$$

5) Из 3) и 4) получаем окончательные равенства теоремы 9:

$$\begin{aligned}
 F^{(s)}/F^{(s+1)}(t) &= B^{(s+1)}(t) - B^{(s)}(t) \\
 &= G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) + G^{(s+1)}/F^{(s+1)}(t) - G^{(s)}/F^{(s)}(t) \\
 &= \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3} + \frac{t^s(1-t^{s+1})}{1-t} - \frac{t^{s-1}(1-t^s)}{1-t} \\
 &= \frac{(1-t^s)(t^{s-1}+t^s)}{(1-t)^3} - t^{s-1} + t^{2s-1} + t^{2s}.
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. С фильтрациями $(G^{(s)}, s \geq 1)$ и $(F^{(s)}, s \geq 0)$ на A связаны два (би)градуированных пространства:

$$A_G := \bigoplus_{s \geq 1} G^{(s)}/G^{(s+1)}, \quad A_F := \bigoplus_{s \geq 0} F^{(s)}/F^{(s+1)}.$$

Несложно вывести, что их ряды Гильберта таковы:

$$\begin{aligned}
 A_G(t, z) &:= \sum_{s \geq 1} G^{(s)}/G^{(s+1)}(t) \cdot z^s = \frac{(1+t)z}{(1-t)^2(1-tz)(1-t^2z)}, \\
 A_F(t, z) &:= \sum_{s \geq 0} F^{(s)}/F^{(s+1)}(t) \cdot z^s = \frac{(1+t)z}{(1-t)^2(1-tz)(1-t^2z)} + \frac{1-z}{(1-tz)(1-t^2z)}.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 11. У алгебр $B^{(s)} = A/F^{(s)}$ и $A/G^{(s)}$ одинаковый полином Гильберта:

$$P_{B(s)}(m) = s(s-1)m - \frac{s(s-1)(2s-5)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно пунктам 2) и 3) теоремы 9 функции Гильберта этих алгебр совпадают при $m \geq 2s-1$, поэтому их многочлены Гильберта равны. Из пункта 1) теоремы 9 вытекают равенства

$$\begin{aligned}
 A/G^{(s)}(t) &= \frac{(1-t^s)(1-t^{s-1})}{(1-t)^4} = (1-t^{s-1}-t^s+t^{2s-1}) \cdot \sum_{m \geq 0} C_{-4}^m (-t)^m \\
 &= \sum_{m \geq 0} (-1)^m C_{-4}^m (t^m - t^{m+s-1} - t^{m+s} + t^{m+2s-1}) \\
 &= (\text{полином степени } 2s-2) \\
 &\quad + \sum_{m \geq 2s-1} t^m \cdot ((-1)^m C_{-4}^m - (-1)^{m-s+1} C_{-4}^{m-s+1} - (-1)^{m-s} C_{-4}^{m-s}) \\
 &\quad + \sum_{m \geq 2s-1} t^m \cdot (-1)^{m-2s+1} C_{-4}^{m-2s+1},
 \end{aligned}$$

здесь

$$C_{-4}^k = (-4)(-5) \cdots (-4-k+1) \frac{1}{k!} = (-1)^k C_{k+3}^3 = (-1)^k \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}.$$

Следовательно, при $m \geq 2s - 1$ получаем равенства, доказывающие лемму 11:

$$\begin{aligned} h_{B(s)}(m) &= C_{m+3}^3 - C_{m-s+4}^3 - C_{m-s+3}^3 + C_{m-2s+4}^3 \\ &= \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} - \frac{(m-s+4)(m-s+3)(m-s+2)}{6} \\ &\quad - \frac{(m-s+3)(m-s+2)(m-s+1)}{6} \\ &\quad + \frac{(m-2s+4)(m-2s+3)(m-2s+2)}{6} \\ &= s(s-1)m - \frac{s(s-1)(2s-5)}{2}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 12. Аналогично доказывается, что градуированные A -модули $G^{(s)}/G^{(s+1)}$ и $F^{(s)}/F^{(s+1)}$ имеют одинаковый полином Гильберта:

$$P(m) = 2sm - s(3s - 4).$$

Автор благодарит А. В. Кондратьева за его программу вычислений в градуированных ассоциативных алгебрах GRAAL (УлГУ–1998), с помощью которой были проверены предварительные гипотезы данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Уфнаровский, “Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре”, *Алгебра* – 6, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **57**, ВИНТИ, М., 1990, 5–177.
- [2] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О’Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры*, Мир, М., 2000.
- [3] Л. М. Шифнер, “О степени матрицы”, *Матем. сб.*, **42:3** (1935), 385–394.

А. Б. Верёвкин

Ульяновский государственный университет

E-mail: abverevkin@gmail.com

Поступило

09.12.2010

Исправленный вариант

19.05.2011