Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина, Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 643–661

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:31:51

Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений

А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина

Результаты статьи получены для функций из однородных пространств функций, определенных на локально компактной абелевой группе. Вводится понятие спектра Берлинга функций, существенного спектра функций. Если непрерывный унитарный характер является существенной точкой спектра функции, то он является s -пределом линейных комбинаций сдвигов рассматриваемой функции. Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности функции и рассматриваются свойства таких функций. Для параболического уравнения с начальной функцией из однородного пространства доказано, что слабое решение как функция первого аргумента является медленно меняющейся на бесконечности функцией.

Библиография: 26 названий.

1. Введение. Пусть G – локально компактная абелева группа, $\widehat{G}$ – двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G . Через $L^p(G, E)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру и суммируемых (относительно меры Хаара) со степенью $p \in [1, \infty)$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на группе G , и принимающих свои значения в банаховом пространстве E . Нормы в этих пространствах имеют вид

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(s)\|_E^p ds \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \operatorname{vrai} \sup_{g \in G} \|x(g)\|_E, \quad p = \infty.$$

Если $E = \mathbb{C}$, то символ E в обозначениях этих пространств будет опускаться. Отметим, что $L^1(G) = L^1(G, \mathbb{C})$ является коммутативной банаховой алгеброй со сверткой функций в качестве умножения. Через

$$\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\gamma) = \int_G f(g) \gamma(-g) dg, \quad \gamma \in \widehat{G},$$

обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Рассматриваются подпространства $C_b(G, E)$, $C_{b,u}(G, E)$, $AP(G, E)$ пространства $L^\infty(G, E)$ соответственно непрерывных, равномерно непрерывных и почти периодических функций Бора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00276).

Через $S^p(G, E)$, где $p \in [1, \infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [1]–[3] измеримых локально суммируемых функций, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in G} \left(\int_V \|x(s+g)\|_E^p dg \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

где V – некоторая компактная окрестность нуля группы G . Отметим, что пространство $S^p(G, E)$ не зависит от выбора V и соответствующие нормы эквивалентны. Для компактной группы G имеет место равенство $S^p(G, E) = L^p(G, E)$. Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [2]–[5].

Основные результаты статьи получены для классов функций из следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(G, E)$ функций, определенных на группе G , со значениями в комплексном банаховом пространстве E , называется *однородным пространством функций*, если выполнены следующие условия:

- 1) пространство $\mathcal{F}(G, E)$ содержит $C_{b,u}(G, E)$ и содержится в $S^1(G, E)$, причем вложения

$$C_{b,u}(G, E) \subset \mathcal{F}(G, E) \subset S^1(G, E) \quad (1)$$

инъективны и непрерывны (инъективность означает инъективность оператора вложения);

- 2) в $\mathcal{F}(G, E)$ определена и ограничена группа $S(g)$, $g \in G$, операторов сдвигов функций

$$(S(g)x)(s) = x(s+g), \quad s, g \in G, \quad x \in \mathcal{F}(G, E);$$

- 3) для любых функций $f \in L^1(G)$, $x \in \mathcal{F}(G, E)$ их свертка

$$(f * x)(g) = \int_G f(\tau)x(g-\tau) d\tau = \int_G f(\tau)(S(-\tau)x)(g) d\tau \quad (2)$$

принадлежит $\mathcal{F}(G, E)$ и $\|f * x\| \leq \|f\|_1 \|x\|$;

- 4) $\varphi x \in \mathcal{F}(G, E)$ для любой $x \in \mathcal{F}(G, E)$ и любой функции $\varphi \in C_b(G)$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi$, причем $\|\varphi x\| \leq \|\varphi\|_\infty \|x\|$ и отображение $g \mapsto \varphi S(g)x: G \rightarrow \mathcal{F}(G, E)$ непрерывно.

Ясно, что банаховы пространства $C_{b,u}(G, E)$, $C_b(G, E)$, $S^p(G, E)$, $p \in [1, \infty)$, являются однородными пространствами.

Если $E = \mathbb{C}$, то $\mathcal{F}(G, E)$ будет обозначаться $\mathcal{F}(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Существует предкомпактное измеримое множество V из группы G и дискретная подгруппа $\mathbb{J}$ из G такие, что выполнены условия:

- 1) $(V + g_1) \cap (V + g_2) = \emptyset$ для любых $g_1 \neq g_2$ из $\mathbb{J}$;
- 2) $\bigcup_{g \in \mathbb{J}} (V + g) = G$.

Условия этого предположения выполнены для всякой компактно-порожденной локально компактной абелевой группы G ввиду ее изоморфности группе $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{K}$ – компактная группа. Все основные результаты статьи получены для группы G вида $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$. Предполагается, что $V = [0, 1)^k \times$

$\{0\}^m \times \mathbb{K}$ и $\mathbb{J} = \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m \times \{0\}$. При этом считается, что $\mu(V) = 1$ для меры Хаара μ на G .

Результаты статьи получены для функций из однородных пространств функций, определенных на локально компактной абелевой группе. Вводится понятие спектра Берлинга функций (векторов из банахова модуля), существенного спектра функций (векторов). Основным результатом статьи является теорема 3, в которой установлено, что если непрерывный унитарный характер (экспонента, если группа совпадает с группой вещественных чисел $\mathbb{R}$) является существенной точкой спектра функции (см. определение 9), то характер является s -пределом (см. определение 6) линейных комбинаций сдвигов рассматриваемой функции. Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности функции и рассматриваются свойства таких функций. Для параболического уравнения с начальной функцией из однородного пространства, имеющей существенный спектр, доказано, что множество s -предельных траекторий слабого решения непусто. Кроме того, доказано, что слабое решение как функция первого аргумента является медленно меняющейся на бесконечности функцией. Отметим, что при доказательстве соответствующих утверждений о стабилизации решения существенно используются методы доказательства теоремы Берлинга.

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Будем считать, что X является невырожденным банаховым $L^1(G)$ -модулем (см. [6] и [7]), структура которого ассоциирована с некоторым изометрическим ограниченным представлением $T: G \rightarrow \text{End } X$. Это означает, что выполнены два свойства из следующего предположения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для банахова $L^1(G)$ -модуля X выполнены свойства:*

- 1) *из равенства $fx = 0$ для любой $f \in L^1(G)$, следует, что вектор $x \in X$ нулевой (свойство невырожденности банахова модуля X);*
- 2) *для всех $f \in L^1(G)$, $x \in X$, $g \in G$, имеют место следующие равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на X с представлением $T: G \rightarrow \text{End } X$):*

$$T(g)(fx) = (S(g)f)x = f(T(g)x).$$

Если $T: G \rightarrow \text{End } X$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_G f(g)T(-g)x dg, \quad f \in L^1(G), \quad x \in X,$$

определяет на X структуру банахова $L^1(G)$ -модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С каждым (невырожденным) банаховым $L^1(G)$ -модулем X ассоциировано единственное представление $T: G \rightarrow \text{End } X$ [7]. Чтобы подчеркнуть этот факт, будет иногда использоваться обозначение (X, T) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор x из банахова $L^1(G)$ -модуля (X, T) назовем T -непрерывным, если функция $\varphi_x: G \rightarrow X$, $\varphi_x(g) = T(g)x$, $g \in G$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на G).

Совокупность всех T -непрерывных векторов из банахова $L^1(G)$ -модуля X обозначим через X_c или (X_c, T) . Из определения легко следует, что X_c – замкнутый подмодуль из X , причем представление T сильно непрерывно на нем.

Любое однородное пространство $\mathcal{F}(G, E)$ является банаховым $L^1(G)$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (2), и эта структура ассоциирована с представлением группой сдвигов функций $S: G \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(G, E)$. Через $\mathcal{F}_c(G, E)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(G, E)$ вида

$$\{x \in \mathcal{F}(G, E) : \text{функция } g \rightarrow S(g)x: G \rightarrow \mathcal{F}(G, E) \text{ непрерывна}\}.$$

Подпространства S -непрерывных векторов для $L^p(G, E)$, $p \in [1, \infty)$, $C_{b,u}(G, E)$ совпадают с самими пространствами, причем $(C_b(G, E))_c = C_{b,u}(G, E)$, $(L^\infty(G, E))_c = C_{b,u}(G, E)$. Невырожденность $L^1(G)$ -модуля $\mathcal{F}(G, E)$ следует из свойства 1 определения 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор x из банахова $L^1(G)$ -модуля (X, T) называется *почти периодическим вектором*, если $x \in X_c$ и множество $\{T(g)x, g \in G\}$ (орбита вектора x) предкомпактно в X .

Множество $AP X$ почти периодических векторов из X образует замкнутый подмодуль из X . Если $X = \mathcal{F}(G, E)$ – однородное пространство, то множество почти периодических функций обозначим $AP \mathcal{F}(G, E)$. Оно совпадает с множеством равномерных почти периодических функций Бора $AP(G, E)$, если $\mathcal{F}(G, E) = C_b(G, E)$. Для $\mathcal{F}(G, E) = S^p(G, E)$ подмодуль $AP S^p(G, E)$ состоит из почти периодических функций Степанова (см. [1], [2]). Систематически используется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Спектром Берлинга* вектора x из банахова $L^1(G)$ -модуля (X, T) называется множество $\Lambda(x) = \Lambda(x, T)$ характеров из группы $\hat{G}$, являющееся дополнением к множеству

$$\{\gamma \in \hat{G} : \text{существует } f \in L^1(G) \text{ такая, что } \hat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ и } fx = 0\},$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda(x) = \{\gamma \in \hat{G} : fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L^1(G) \text{ с } \hat{f}(\gamma) \neq 0\}.$$

Для случая $G = \mathbb{R}$ в статье [8] было дано следующее понятие спектра функций из $L^\infty(\mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Спектром функции* $x \in L^\infty(\mathbb{R})$ называется множество $\Lambda(x)$, состоящее из таких чисел $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, для которых функция (характер) $e_{\lambda_0}(t) = \exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$, содержится в L^1 -замкнутом подпространстве, порожденном сдвигами функции x .

Заметим, что определение 4 эквивалентно определению 5 для функций из $L^\infty(\mathbb{R})$.

Имеют место следующие свойства спектра векторов из банахова пространства X (см. [6], [7], [9]).

ТЕОРЕМА 1. Для любых $f \in L^1(G)$ и $x \in (X, T)$ справедливы свойства:

- 1) $\Lambda(x)$ – замкнутое подмножество из $\hat{G}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

- 2) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;
- 3) $\widehat{fx} = 0$, если $(\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $\widehat{fx} = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;
- 4) $\Lambda(x) = \{\gamma_0\}$ – однотоочечное множество из $\widehat{G}$ тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет равенствам $T(g)x = \gamma_0(g)x$, $g \in G$, и $x \neq 0$.

ПРИМЕР 1. Если $y \in AP(\mathbb{R})$ и имеет ряд Фурье вида $y(t) \sim \sum_{k \geq 1} \beta_k e^{i\mu_k t}$, где $\beta_k \neq 0$ и $\mu_k \in \mathbb{R}$, то $\Lambda(y)$ совпадает с замыканием множества $\{\mu_k, k \geq 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть Ω – некоторое направленное множество. Направленность функций (x_α) , $\alpha \in \Omega$, из однородного пространства $\mathcal{F}(G, E)$ называется *с-сходящейся* к функции $x_0 \in \mathcal{F}(G, E)$, если она ограничена и $\lim_\alpha \|\varphi(x_\alpha - x_0)\| = 0$, для любой функции $\varphi \in C_{b,u}(G, E)$ с компактным носителем. Если, к тому же, $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = \|x_0\|$, то направленность (x_α) называется *узко сходящейся* к x_0 (см. [10]).

Следующим результатом в спектральном синтезе был оригинальный и действительно поразительный результат Берлинга (цитата из [11; гл. 10, § 40]).

ТЕОРЕМА 2 (Берлинг [8]). Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ и $x \neq 0$. Тогда существует число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и последовательность (x_n) линейных комбинаций сдвигов функции x , которая узко сходится к функции (характеру) e_{λ_0} .

В статье [10] Кусис установил ошибочность работы Годемана [12], в которой была предпринята попытка доказать теорему Берлинга для функций из $L^\infty(\mathbb{R})$, а также заметил, что она перестает быть верной для функций из $C_b(\mathbb{R})$, и указал схему построения соответствующего примера. Обобщение теоремы Берлинга на функционалы из сопряженных пространств к некоторым классам полупростых коммутативных банаховых алгебр было получено Домаром [13]. Одним из основных результатов данной работы является доказательство теоремы Берлинга, полученное для функций из однородных пространств, имеющих непустой существенный спектр (см. определение 9). Для формулировки и доказательства теоремы Берлинга понадобятся ряд определений (см. [6], [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть Ω – некоторое направленное множество и $\gamma \in \widehat{G}$. Ограниченная направленность (f_α) , $\alpha \in \Omega$, функций из алгебры $L^1(G)$ называется γ -направленностью, если выполнены условия:

- 1) $\widehat{f}_\alpha(\gamma) = 1$ для всех $\alpha \in \Omega$;
- 2) $\lim_\alpha f_\alpha * f = 0$ для любой функции $f \in L^1(G)$ с $\widehat{f}(\gamma) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Направленность (f_α) , $\alpha \in \Omega$, функций из алгебры $L^1(G)$ называется *инвариантным интегралом*, если:

- 1) $\widehat{f}_\alpha(0) = 1$ и $f_\alpha \geq 0$ для всех $\alpha \in \Omega$;
- 2) $\lim_\alpha \int_G |f_\alpha(g + u) - f_\alpha(g)| dg = 0$ для любого $u \in G$.

Из [7; замечание 4.7] следует, что каждый инвариантный интеграл является 0-направленностью. Отметим, что если (f_α) – 0-направленность из алгебры $L^1(G)$, то (γf_α) – γ -направленность для любого $\gamma \in \widehat{G}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}(0) = 1$, $f \geq 0$ и $\Omega = (0, \infty)$ – направленное по убыванию чисел множество. Тогда $f_\alpha(u) = \alpha^n f(\alpha u)$, $\alpha \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^n$, является

инвариантным интегралом. Действительно, условие 1) определения 8 следует из равенств

$$\widehat{f}_\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^n f(\alpha x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) dt = 1.$$

Условие 2) также выполнено, поскольку

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |(S(u)f_\alpha - f_\alpha)(s)| ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\alpha u + s) - f(s)| ds = \|S(\alpha u)f - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Характер $\gamma_0 \in \widehat{G}$ назовем *существенным спектром* $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ вектора x из банахова $L^1(G)$ -модуля (X, T) , если существует γ_0 -направленность (f_α) из алгебры $L^1(G)$, для которой выполнено условие

$$\overline{\lim}_\alpha \|f_\alpha x\| > 0. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть x – ненулевой вектор из $L^1(G)$ -модуля (X, T) . Характер γ_0 из $\Lambda(x)$ назовем *эргодической точкой* вектора x (используется обозначение $\Lambda_{\text{erg}}(x)$), если для некоторой γ_0 -направленности (f_α) из алгебры $L^1(G)$ существует

$$\lim_\alpha f_\alpha x = x_0 \in X.$$

Если при этом $x_0 \neq 0$, то γ_0 назовем *дискретным спектром* $\Lambda_d(x)$ вектора x .

Для x_0 выполняется свойство $T(g)x_0 = \gamma_0(g)x_0$, $\forall g \in G$. В случае $x_0 = 0$ характер γ_0 назовем *непрерывным спектром* $\Lambda_c(x)$ вектора x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из [6; теорема 2.2.7] следует, что предел в (3) не зависит от выбора γ_0 -направленности (f_α) , причем если он существует для некоторой γ_0 -направленности, то он существует для любых других γ_0 -направленностей. Следовательно, определение дискретного и непрерывного спектра корректно, а знак неравенства (3) не зависит от выбора γ_0 -направленности (f_α) .

Также из определения 10 следует, что для γ -направленности (f_α) свойство $\gamma \in \Lambda_{\text{erg}}(x) \cup (\widehat{G} \setminus \Lambda(x))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lim_\alpha f_\alpha x$ существует хотя бы для одной, и, значит, для всех γ -направленностей.

Следующая теорема является одним из основных результатов данной статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{K}$ – компактная группа, и пусть функция x принадлежит однородному пространству $\mathcal{F}(G)$, а характер $\gamma_0 \in \widehat{G}$ принадлежит существенному спектру $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ функции x .

Тогда существует направленность (x_α) , составленная из линейных комбинаций сдвигов функции x , которая с-сходится к характеру γ_0 .

2. Доказательство теоремы 3. Будем считать, что $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{K}$ – компактная группа, причем $k + m \geq 1$. Таким образом, выполнены условия предложения 1, где $V = [0, 1)^k \times \{0\}^m \times \mathbb{K}$ и $\mathbb{J} = \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m \times \{0\}$, причем $\mu(V) = 1$ для меры Хаара μ на G .

Введем в рассмотрение банахову алгебру $L^{1,\infty}(G)$ следующим образом. Пусть $L^1_{\text{loc}}(G)$ – линейное пространство (классов) локально суммируемых на G комплексных функций. Каждой функции $x \in L^1_{\text{loc}}(G)$ поставим в соответствие последовательность (x_n) , $n \in \mathbb{J}$, где $x_n(s) = x(s+n)$, $s \in V$, $n \in \mathbb{J}$. Банахова алгебра $L^{1,\infty}(G)$ состоит из функций $x \in L^1_{\text{loc}}(G)$, для которых $x_n \in L^\infty(G)$, а сама последовательность (x_n) обладает свойством

$$\|x\|_{1,\infty} = \sum_{n \in \mathbb{J}} \|x_n\|_\infty < \infty, \quad \text{где} \quad \|x_n\|_\infty = \sup_{s \in V} |x(s+n)|, \quad n \in \mathbb{J},$$

причем величина $\|x\|_{1,\infty}$ считается нормой функции $x \in L^{1,\infty}(G)$. Операцию умножения в $L^{1,\infty}(G)$ определим сверткой функций. Через $L^{1,\infty}_c(G)$ обозначим замкнутую подалгебру непрерывных функций из $L^{1,\infty}(G)$. Для $G = \mathbb{R}$ алгебра $L^{1,\infty}_c(\mathbb{R})$ рассматривалась Винером [14]. При этом использовалось обозначение M_1 и норма $\|x\| = \sum_{n \in \mathbb{J}} \max_{g \in V+n} |x(g)|$. Заметим, что имеет место оценка

$$\|x * y\|_{1,\infty} \leq C \|x\|_{1,\infty} \|y\|_{1,\infty}, \quad x, y \in L^{1,\infty}_c(G), \quad C \geq 1.$$

Для доказательства теоремы 3 потребуются следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть (f_α) , $\alpha \in \Omega$, – некоторое семейство функций из $L^{1,\infty}_c(G)$, причем $\sup_\alpha \|f_\alpha\|_{1,\infty} < \infty$. Тогда для любой функции $x \in \mathcal{F}(G)$ семейство (x_α) , $\alpha \in \Omega$, где $x_\alpha = f_\alpha * x$, принадлежит пространству $C_{b,u}(G)$ и является равномерно ограниченным в $C_{b,u}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $t \in G$, $\alpha \in \Omega$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |(f_\alpha * x)(t)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{J}} \int_{V+n} |f_\alpha(s)| |x(t-s)| ds \leq \sum_{n \in \mathbb{J}} \sup_{\tau \in V} |f_\alpha(\tau+n)| \int_V |x(t-n-s)| ds \\ &\leq \sup_{g \in G} \int_V |x(g-s)| ds \sum_{n \in \mathbb{J}} \sup_{\tau \in V} |f_\alpha(\tau+n)| \leq \|x\|_{S^1} \|f_\alpha\|_{1,\infty}. \end{aligned}$$

Из непрерывности вложения $\mathcal{F}(G) \subset S^1(G)$ (см. свойство 1 определения 1) и равномерной ограниченности семейства (f_α) в $L^{1,\infty}(G)$ следует равномерная ограниченность семейства (x_α) , $\alpha \in \Omega$, в $C_{b,u}(G)$. Аналогично доказывается, что для любых $t \in G$, $h \in G$, $\alpha \in \Omega$ выполнено

$$|(S(h)x_\alpha - x_\alpha)(t)| \leq \|x\|_{S^1} \|S(h)f_\alpha - f_\alpha\|_{1,\infty}.$$

Поскольку $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(h)f_\alpha - f_\alpha\|_{1,\infty} = 0$ для любого $\alpha \in \Omega$ и $\|x\|_{S^1} < \infty$, функция x_α равномерно непрерывна.

ЛЕММА 2. Если некоторая направленность функций (x_γ) из $C_{b,u}(G)$ с-сходится к некоторой функции $x_0 \in C_{b,u}(G)$, то для любой функции $f \in L^1(G)$ направленность $(f * x_\gamma)$ с-сходится к $f * x_0$ в пространстве $C_{b,u}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности в $C_{b,u}(G)$ направленности функций (x_γ) и плотности в $L^1(G)$ функций с компактным носителем можно считать, что $f \in$

$L^1(G)$ имеет компактный носитель K . Тогда утверждение леммы будет следовать из оценки

$$\begin{aligned} |(f * x_\gamma)(g) - (f * x_0)(g)| &= \left| \int_K f(\tau)(x_\gamma(g - \tau) - x_0(g - \tau)) d\tau \right| \\ &\leq \|f\|_1 \max_{\tau \in K} |x_\gamma(g - \tau) - x_0(g - \tau)|, \quad g \in G. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим направленное множество $\Omega = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m$ со следующим отношением порядка: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k+m}) \prec \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k+m})$, если $\alpha_i \leq \beta_i$, для всех $i = 1, 2, \dots, k + m$, и направленность $(f_\alpha, \alpha \in \Omega)$ из алгебры $L^{1,\infty}(G)$ вида

$$f_\alpha = \frac{1}{\mu(\Omega_\alpha)} \mathbf{1}_{\Omega_\alpha}, \quad \alpha \in \Omega,$$

где $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha^1 \times \Omega_\alpha^2 \times \mathbb{K}$ и $\Omega_\alpha^1 = [0, \alpha_1) \times \dots \times [0, \alpha_k)$, $\Omega_\alpha^2 = \{0, \dots, \alpha_{k+1}\} \times \dots \times \{0, \dots, \alpha_{k+m}\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+m}) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m = \Omega$. Непосредственно из определения этой направленности следует, что она обладает свойствами:

- 1) является инвариантным интегралом;
- 2) $f_\alpha \in L^{1,\infty}(G)$, $\alpha \in \Omega$, и $\sup_\alpha \|f_\alpha\|_{1,\infty} < \infty$.

При этом учитывается, что $\mu(\Omega_\alpha) = \alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+m} \mu(\mathbb{K})$.

Перейдем к непосредственному ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 3. Пусть (f_α) – 0-направленность из примера 3 и $f \in L^1(G)$ – непрерывная функция со свойствами: $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset V$, $\hat{f}(0) = 1$. Тогда $f \in L_c^{1,\infty}(G)$ и $\|f\|_{1,\infty} = \max_{g \in G} |f(g)|$. Рассмотрим направленность функций $g_\alpha = f * f_\alpha$, $\alpha \in G$. Из отмеченных свойств функции f следует, что семейство (g_α) является ограниченной 0-направленностью непрерывных функций, причем она обладает свойствами:

- 1) $\hat{g}_\alpha(0) = 1$, $\alpha \in \Omega$;
- 2) $\|g_\alpha\|_{1,\infty} \leq \|f\|_{1,\infty} \|f_\alpha\|_{1,\infty}$, $\alpha \in \Omega$;
- 3) $g_\alpha \in L_c^{1,\infty}(G)$, $\alpha \in \Omega$.

Пусть $x \in \mathcal{F}(G)$ и $\gamma_0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x)$. Если необходимо, рассматривая функцию $x\gamma_0^{-1}$, для которой $0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x\gamma_0^{-1})$, без ограничения общности будем считать, что $\gamma_0 = 0$. Рассмотрим семейство функций $x_\alpha = g_\alpha * x$, $\alpha \in \Omega$. В силу леммы 1 и отмеченного выше свойства 3) это семейство функций принадлежит пространству $C_{b,u}(G)$ и равномерно ограничено в нем. Поскольку

$$S(h)x_\alpha - x_\alpha = S(h)(g_\alpha * x) - g_\alpha * x = (S(h)f - f) * f_\alpha * x, \quad \alpha \in \Omega, \quad h \in G,$$

то

$$\|S(h)x_\alpha - x_\alpha\|_\infty \leq \|S(h)f - f\|_{1,\infty} \|f_\alpha\|_{1,\infty} \|x\|_{S^1(G)}, \quad h \in G,$$

и, следовательно, семейство (x_α) равномерно непрерывно в $C_{b,u}(G)$.

Из условия $0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x)$ и непрерывности вложения $C_{b,u}(G)$ в $\mathcal{F}(G)$ получаем существование постоянной $C > 0$ и последовательности (t_n) из G , $n \in \mathbb{N}$, такой, что $|x_{\alpha_n}(t_n)| \geq C/2 > 0$. При этом, без ограничения общности можно считать, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\alpha_n}(t_n) = C_0 \neq 0$. Положим

$$y_n(t) = \frac{f_{\alpha_n}(t + t_n)}{x_{\alpha_n}(t_n)}, \quad t \in G, \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = y_n * x = \frac{S(t_n)x_{\alpha_n}}{x_{\alpha_n}(t_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

из $C_{b,u}(G)$, которая обладает свойствами:

- 1) $x_n(0) = (y_n * x)(0) = 1$;
- 2) $\|x_n\|_\infty \leq 2\|x\|_{S^1}/C$;
- 3) семейство функций $(x_n, n \in \mathbb{N})$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, из теоремы Арцелла–Асколи (см. [15]) следует существование подпоследовательности последовательности (x_n) , которая s -сходится в $C_{b,u}(G)$ к некоторой ненулевой функции $x_0 \in C_{b,u}(G)$ со свойством $x_0(0) = 1$. Без ограничения общности далее считается, что сама последовательность (x_n) s -сходится к x_0 . В силу инъективности и непрерывности включения (1) из определения 1 получаем, что x_0 – ненулевой элемент и в пространстве $\mathcal{F}(G)$.

Покажем, что x_0 совпадает с функцией $\mathbf{1}(\tau) = 1, \tau \in G$. Для любого $\gamma \neq 0$ из G выберем такую функцию $f_0 \in L^1(G)$, чтобы $\widehat{f_0}(\gamma) \neq 0$, $\text{supp } \widehat{f_0}$ – компакт и $0 \notin \text{supp } \widehat{f_0}$. Тогда функция f_0 принадлежит подпространству $C_0(G)$, а из леммы 2 получаем, что последовательность $(f_0 * x_n)$ s -сходится в $C_{b,u}(G)$ к функции $f_0 * x_0$. Из определения 0-направленности следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_0 * f_{\alpha_n}\|_1 = 0$, поэтому и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_0 * y_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S(t_n)(f_0 * f_{\alpha_n})\|_1 = 0.$$

Следовательно, $f_0 * x_0 = 0$, т.е. $\gamma \notin \Lambda(x_0)$. Итак, $\Lambda(x_0) = \{0\}$, поэтому $x_0 = \mathbf{1}$ в силу свойства 4 теоремы 1.

Осталось доказать, что $\mathbf{1}$ есть s -предел в $\mathcal{F}(G)$ линейных комбинаций сдвигов функции x . Пусть φ – производная функция из $C_b(G)$ с компактным носителем. По доказанному, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(y_n * x - \mathbf{1})\|_\infty = 0$, и, в силу свойства 1 определения 1, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(y_n * x - \mathbf{1})\| = 0$. Функция $\varphi(y_n * x)$ представима в виде

$$\varphi(t)(y_n * x)(t) = \int_G \varphi(t)y_n(s)x(t-s)ds = \left(\int_G \Phi_n(s)ds \right)(t), \quad t \in G,$$

где $\Phi_n: G \rightarrow \mathcal{F}(G)$ – непрерывная суммируемая функция (см. свойство 4 определения 1) вида $\Phi_n(s) = y_n(s)\varphi S(-s)x \in \mathcal{F}(G)$, $s \in G$. Поэтому функция $\varphi(y_n * x) \in \mathcal{F}(G)$, $n \geq 1$, принадлежит замыканию конечных линейных комбинаций сдвигов функции Φ_n . Таким образом, по любому $\varepsilon > 0$ можно указать элементы $t_1, \dots, t_l \in G$ и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\left\| \varphi \left(\sum_{k=1}^l \alpha_k y_n(t_k) S(-t_k) x - \mathbf{1} \right) \right\| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $\mathbf{1}$ является s -пределом в $\mathcal{F}(G)$ линейных комбинаций сдвигов функции x .

Отметим, что доказанная теорема 3 верна для функций $x \in \mathcal{F}(G, E)$, существенное множество значений которых предкомпактно в E .

3. Медленно меняющиеся на бесконечности функции. Пусть $\mathcal{F}(G, E)$ – однородное пространство функций, определенных на локально компактной абелевой группе G , со значениями в банаховом пространстве E . Через $\mathcal{F}_0(G, E)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(G, E)$, содержащее все функции φx , $x \in \mathcal{F}(G, E)$, $\varphi \in C_b(G)$, $\text{supp } \varphi$ – компакт. Таким образом, для $\mathcal{F}(G, E) = C_b(G, E)$ подпространство $\mathcal{F}_0(G, E)$ совпадает с подпространством $C_0(G, E)$ из $C_b(G, E)$ функций, исчезающих на бесконечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Функция $x \in \mathcal{F}_c(G, E)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности функцией*, если для каждого $\alpha \in G$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_0(G, E)$.

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathcal{F}(G, E)$ будем обозначать через $\mathcal{F}_{sl}(G, E)$. Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{sl}(G, E)$ является замкнутым подпространством из $\mathcal{F}(G, E)$, инвариантным относительно оператора сдвига на любой элемент группы G .

Функцию x , принадлежащую банахову пространству $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$ равномерно непрерывных на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функций со значениями в банаховом пространстве E , назовем *медленно меняющейся на бесконечности*, если $S(t)x - x$ принадлежит

$$C_0(\mathbb{R}_+, E) = \left\{ x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E) : \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = 0 \right\}$$

для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Множество $C_{sl}(\mathbb{R}_+, E)$ медленно меняющихся на бесконечности функций совпадает с множеством стационарных на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, E)$, определенных в монографии [16; гл. 3, §6]. Примером медленно меняющейся функции из $C_{b,u}(\mathbb{R})$ является функция $x(t) = \sin(\ln(|t| + 1))$, $t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в статьях Пака [17; с. 123] и Караматы [18] положительная непрерывная функция $L: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называлась *слабо колеблющейся*, если при любом $\lambda > 0$ выполнено $L(\lambda x)/L(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Например, функции $\ln^\nu(x)$, $\ln \ln^\nu(x)$, $\dots$, где $\nu \in \mathbb{R}$, являются таковыми. Слабо колеблющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов (см. [19]), в теории вероятности [20], а также в теории целых функций [21]. Слабо колеблющиеся функции составляют часть класса регулярно растущих функций, которые впервые в 1925 г. ввел в рассмотрение Шмидт [22]. Можно доказать, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Если функция $L \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ является слабо колеблющейся, то функция $f(t) = \ln L(e^t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}_+)$.

Верно и обратное. Если $f \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$, то функция $L(t) = e^{f(\ln t)}$, $t \in \mathbb{R}_+$, является слабо колеблющейся функцией.

Далее через $(e_\alpha, \alpha \in \Omega)$, где Ω – некоторое направленное множество, обозначим ограниченную аппроксимативную единицу (ОАЕ) в алгебре $L^1(G)$, для которой $\hat{e}_\alpha(0) = 1$, $\alpha \in \Omega$. Отметим следующий результат.

ЛЕММА 3 [7]. Функция $x \in \mathcal{F}(G, E)$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_c(G, E)$ (S -непрерывных векторов) тогда и только тогда, когда $\lim_\alpha e_\alpha * x = x$.

ЛЕММА 4. Для того чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(G, E)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl}(G, E)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in \mathcal{F}_0(G, E)$ для любой функции $f \in L^1(G)$, удовлетворяющей условию $\hat{f}(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Рассмотрим сначала функцию $f \in L^1(\mathbb{G})$ вида $f = S(\alpha)g - g$, где $g \in L^1(G)$, $\alpha \in G$. Эта функция обладает свойством $\widehat{f}(0) = 0$. По тауберовой теореме Винера [14] множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(G) : \widehat{f}(0) = 0\}$ и поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функции f рассматриваемого вида. Пусть $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G, E)$. Ввиду того, что $S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_0(G, E)$, получаем

$$f * x = (S(\alpha)g - g) * x = g * (S(\alpha)x - x) \in \mathcal{F}_0(G, E).$$

Достаточность. Пусть τ – произвольный элемент группы G и (e_α) – ОАЕ из алгебры $L^1(G)$. Поскольку

$$e_\alpha * (S(\tau)x - x) = (S(\tau)e_\alpha - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$$

и $\widehat{f}_\alpha(0) = 0$, то $e_\alpha * (S(\tau)x - x) \in \mathcal{F}_0(G, E)$. Из включения $\mathcal{F}_0(G, E) \subset \mathcal{F}_c(G, E)$ (см. свойство 4 определения 1) следует, что

$$S(\tau)x - x = \lim_{\alpha} e_\alpha * (S(\tau)x - x) \in \mathcal{F}_0(G, E).$$

ЛЕММА 5. Для того чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(G, E)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{\text{sl}}(G, E)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathcal{F}_0(G, E)$ для любой функции $f \in L^1(G)$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G, E)$. Поскольку $\mathcal{F}_0(G, E) \subset \mathcal{F}_c(G, E)$ (см. свойство 4 определения 1), из леммы 3 следует, что

$$\lim_{\alpha} e_\alpha * (x - f * x) = x - f * x. \quad (4)$$

Функцию $y_\alpha = e_\alpha * (x - f * x)$ представим в виде $y_\alpha = (e_\alpha * f - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$. Так как $\widehat{f}_\alpha(0) = \widehat{e}_\alpha(0)\widehat{f}(0) - \widehat{e}_\alpha(0) = 0$, то $f * x \in C_0(G, E)$, согласно лемме 4. Теперь необходимость условия следует из (4).

Достаточность. Пусть $x \in \mathcal{F}_c(G, E)$ и $x - f * x \in \mathcal{F}_0(G, E)$ для любой функции $f \in L^1(G, E)$ с $\widehat{f}(0) = 1$. Тогда

$$f * (S(\tau)x - x) = (S(\tau)f - f) * x = ((S(\tau)f) * x - x) + (x - f * x) \in \mathcal{F}_0(G, E)$$

для любого $\tau \in G$. При этом учитывалось, что $\widehat{S(\tau)f}(0) = 1$. Поскольку $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$, $\alpha \in \Omega$, то $\lim_{\alpha} e_\alpha * (S(\tau)x - x) = S(\tau)x - x \in \mathcal{F}_0(G, E)$, т.е. $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G, E)$.

ТЕОРЕМА 5. Если $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G, E)$, то множество $\Lambda(x) \setminus \{0\}$ содержится в непрерывном спектре функции x и $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subset \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \neq \gamma_0 \in \Lambda(x)$. Рассмотрим функцию $f \in L^1(G)$, для которой $\gamma_0 \notin \text{supp } \widehat{f}$ и $\widehat{f}(0) = 1$. Тогда $x_0 = x - f * x \in \mathcal{F}_0(G, E)$. Следовательно, для любой γ_0 -направленности (f_α) из $L^1(G)$ получаем

$$0 = \lim_{\alpha} f_\alpha * x_0 = \lim_{\alpha} (f_\alpha * x - f_\alpha * f * x) = \lim_{\alpha} f_\alpha * x.$$

В следующей теореме рассматривается оператор свертки

$$S(f) \in \text{End } \mathcal{F}(G), \quad S(f)x = f * x, \quad x \in \mathcal{F}(G),$$

с функцией $f \in L^1(G)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in L^{1,\infty}(G)$ и $\text{supp } \hat{f}$ — компакт из $\hat{G}$. Тогда $S(f)\mathcal{F}(G) = S(f)C_b(G) = S(f)C_{b,u}(G)$. В частности, образ $\text{Im } S(f)$ оператора $S(f)$ не зависит от выбора однородного пространства, в котором он определен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C_b(G, E) \subset \mathcal{F}(G, E)$, включение $S(f)C_b(G, E) \subset S(f)\mathcal{F}(G, E)$ очевидно. Так как $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ и $\text{supp } \hat{f}$ компакт, то $f \in L_c^{1,\infty}(G)$. Следовательно, $S(f)x = f * x \in C_{b,u}(G)$ для любой $x \in \mathcal{F}(G)$ (см. лемму 1). Осталось установить равенство $f * x = f * y$ для некоторой функции $y \in C_{b,u}(G)$. Для этого рассмотрим функцию $\varphi \in L_c^{1,\infty}(G)$ со свойством $\hat{\varphi} = 1$ в некоторой окрестности компакта $\text{supp } \hat{f}$. Тогда (см. свойство 3 теоремы 1)

$$f * x = \varphi * f * x = f * (\varphi * x) = f * y,$$

где $y = \varphi * x \in C_{b,u}(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого компакта Γ из $\hat{G}$ имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \{x \in \mathcal{F}(G) : \Lambda(x) \subset \Gamma\} = \{x \in C_{b,u}(G) : \Lambda(x) \subset \Gamma\}.$$

Подпространство $\mathcal{F}(G)$ называют *спектральным подпространством* (см. [4]).

ТЕОРЕМА 7. Если $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G)$, то существует функция $x_0 \in C_{\text{sl}}(G)$ такая, что $x - x_0 \in \mathcal{F}_0(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5 $y_0 = x - f * x \in \mathcal{F}_0(G)$ для функции $f \in L^{1,\infty}(G) \cap C_0(G)$ такой, что $\hat{f}(0) = 1$. Следовательно, $x_0 = f * x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G) \cap C_{b,u}(G)$. Осталось установить, что функция x_0 принадлежит пространству $C_{\text{sl}}(G)$. Для этого, используя лемму 4, рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in L^1(G)$, для которой $\hat{\varphi}(0) = 0$. Тогда

$$\varphi * x_0 = \varphi * f * x = f * (\varphi * x).$$

Из леммы 4 следует, что $y_0 = \varphi * x \in \mathcal{F}_0(G)$. Для завершения доказательства нужно установить, что $f * y_0 \in C_0(G)$. Поскольку $y_0 \in \mathcal{F}_0(G)$, то $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, где $y_n \in L^1(G)$, $n \geq 1$, имеет компактный (существенный) носитель. Тогда $f * y_n = y_n * f \in C_0(G)$, $n \geq 1$ (как свертка суммируемой функции y_n и функции $f \in C_0(G)$). Поскольку $f * y_0 - f * y_n = f * (y_0 - y_n) \in C_{b,u}(G)$ и

$$\|f * y_0 - f * y_n\| \leq \|f\|_{1,\infty} \|y_0 - y_n\|_{S^1(G)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то $f * y_0 \in C_0(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(G)$ и любой функции $f \in L^{1,\infty}(G) \cap C_0(G)$ с $\hat{f}(0) = 1$ функция $f * x$ принадлежит $C_{\text{sl}}(G)$ и $x - f * x \in \mathcal{F}_0(G)$. Если $G = \mathbb{R}^n$, то для $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}}(\mathbb{R}^n)$ найдется целая ограниченная функция $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $y - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение следствия вытекает из доказательства теоремы 7. Если $G = \mathbb{R}^n$, то для любой компактной окрестности U нуля из $\mathbb{R}^n$ выберем бесконечно дифференцируемую функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ со свойствами: $\text{supp } \hat{f} \subset U$ и $\hat{f}(0) = 1$. Тогда функция $f * x$ будет ограниченной целой функцией экспоненциального типа, причем $|f(z)| \leq C \exp(\sigma(|z|))$, $z \in \mathbb{C}$, если $G = \mathbb{R}$ и $U \subset [-\sigma; \sigma]$.

Рассмотрим фактор-пространство $X = \mathcal{F}_c(G)/\mathcal{F}_0(G)$. Обозначим класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in \mathcal{F}_c(G)$, через $\tilde{x}$, т.е. $\tilde{x} = x + \mathcal{F}_0(G)$. Заметим, что в X действует сильно непрерывная изометрическая группа $\tilde{S}: G \rightarrow \text{End } X$, $\tilde{S}(g)\tilde{x} = \widehat{S(g)x}$, $x \in \mathcal{F}_c(G)$, $g \in G$. Фактор-пространство X наделяется структурой банахова $L^1(G)$ -модуля по формуле

$$f * \tilde{x} = \widetilde{f * x}, \quad f \in L^1(G), \quad x \in \mathcal{F}_c(G).$$

ТЕОРЕМА 8. *Функция $x \in \mathcal{F}_c(G)$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_{\text{sl}}(G)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\tilde{x}) = \Lambda(\tilde{x}, \tilde{S}) \subset \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что функция $x \in \mathcal{F}_c(G)$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_{\text{sl}}(G)$ тогда и только тогда, когда $f * x \in \mathcal{F}_0(G)$ для любой функции $f \in L^1(G)$ с $\hat{f}(0) = 0$. Следовательно, $x \in \mathcal{F}_c(G)$ тогда и только тогда, когда $f * \tilde{x} = 0$ для любой $f \in L^1(G)$ с $\hat{f}(0) = 0$. Теперь непосредственно из определения 4 спектра Берлинга следует, что $x \in \mathcal{F}_c(G)$ в точности тогда, когда $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$.

4. Приложение к стабилизации решений параболических уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией x_0 из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \Delta x, \\ x(0, s) = x_0(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5)$$

где $(\Delta x)(s) = \sum_{i=1}^n \partial^2 x / \partial s_i^2$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$. Через A обозначим ее инфинитезимальный генератор (оператор Лапласа) с областью определения $D(A) = \{g * x : x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)\}$, являющейся множеством значений оператора свертки с функцией $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\hat{g}(\mu) = -\frac{1}{|\mu|^2 + 1}, \quad \mu \in \mathbb{R}^n.$$

Резольвента $R(\cdot, A): \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ оператора A определяется формулой

$$R(\lambda, A)x = g_\lambda * x,$$

где $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ имеет преобразование Фурье $\hat{g}_\lambda(\mu) = (-|\mu|^2 - \lambda)^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $C_{b,u}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, то функции e_μ , $e_\mu(s) = \exp i(\mu, s)$, $s, \mu \in \mathbb{R}^n$, где $(\mu, s) = \sum_{i=1}^n \mu_i s_i$ для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, принадлежат $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, причем $e_\mu \in D(A)$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $Ae_\mu = -|\mu|^2 e_\mu$. Таким образом, множество $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ содержится в спектре $\sigma(A)$ оператора A .

Классические решения этого дифференциального уравнения описывает полугруппа операторов $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ вида

$$(U(t)x)(s) = (f_t * x)(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n),$$

где $f_t(s) = 1/(2\sqrt{\pi t})^n e^{-|s|^2/(4t)}$, $t > 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $|s|^2 = \sum_{i=1}^n |s_i|^2$.

Таким образом, каждый оператор $U(t)$, $t > 0$, есть оператор свертки с функцией $f_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$, которая представима в виде

$$f_t(s) = \frac{1}{(2\sqrt{t})^n} f\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right), \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f(s) = 1/\sqrt{\pi^n} e^{-|s|^2}$.

Функцию $x(t, s) = (U(t)x_0)(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, назовем *слабым решением* задачи (5). Будем говорить, что оно *стабилизируется на бесконечности*, если существует функция $x_\infty \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \cdot) - x_\infty\| = 0$. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = C_b(\mathbb{R}^n)$, то используется термин “равномерно стабилизируется на бесконечности” (см. [23]–[26]). В статье [23] доказывается, что для $x_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ равномерная стабилизация решения задачи (5) имеет место тогда и только тогда, когда у функции x_0 существует равномерное среднее (т.е. существует равномерный предел направленности $(f_\alpha * x)$, где (f_α) – инвариантный интеграл, определяемый в примере 3). В свою очередь, существование равномерного предельного среднего эквивалентно свойству $0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x_0)$. Объяснению этого факта служат свойства семейства $(f_t, t > 0)$ из алгебры $L^1(\mathbb{R}^n)$, приводимые в лемме 6. В данном случае $\Omega = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Через $\mathbb{R}_+^\downarrow$ обозначено множество Ω , направленное по убыванию чисел, а через $\mathbb{R}_+^\uparrow$ – множество Ω , направленное по возрастанию чисел. Отметим, что в статьях [24]–[26] получены результаты о стабилизации решений параболических уравнений в условиях существования среднего (не обязательно равномерного) у начальной функции.

ЛЕММА 6. Семейство функций $(f_t, t > 0)$ обладает свойствами:

- 1) $(f_t, t \in \mathbb{R}_+^\downarrow)$ – ОАЕ из алгебры $L^1(\mathbb{R}^n)$, причем $\|f_t\|_1 = 1$, $t \in \mathbb{R}_+^\downarrow$;
- 2) $(f_t, t \in \mathbb{R}_+^\uparrow)$ – инвариантный интеграл;
- 3) $f_t \in L_c^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$, $\sup_{t \geq 1} \|f_t\|_{1,\infty} < \infty$, $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \geq 2} \|S(h)f_t - f_t\|_{1,\infty} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $\hat{f}_t(\lambda) = \exp(-t|\lambda|^2)$, $t \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и, следовательно, $\hat{f}_t(0) = 1$ для всех $t \in \Omega$. Поскольку $G = \mathbb{R}^n$, то $V = [0, 1]^n$. Для произвольной функции x из алгебры $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = 1/(2\sqrt{t})$, $t \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (f_\alpha * x)(s) - x(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^n f(\alpha\tau)(x(s - \tau) - x(s)) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \varepsilon V} \alpha^n f(\alpha\tau)(x(s - \tau) - x(s)) d\tau + \int_{\varepsilon V} f(u) \left(S\left(-\frac{u}{\alpha}\right)x - x \right)(s) du. \end{aligned}$$

Из этих равенств получаем оценки

$$\|f_\alpha * x - x\|_1 \leq 2\|x\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus \varepsilon V} \alpha^n f(\alpha\tau) d\tau + \|f\|_1 \left\| S\left(-\frac{u}{\alpha}\right)x - x \right\|_1.$$

Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \varepsilon V} \alpha^n f(\alpha\tau) d\tau = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \|f_\alpha * x - x\|_1 = 0.$$

Докажем свойство 2, т.е. осталось установить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(u)f_t - f_t\|_1 = 0$ для любого $u \in \mathbb{R}^n$. Этот факт следует из сильной непрерывности группы операторов $S(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, в алгебре $L^1(\mathbb{R}^n)$ и следующих равенств:

$$\begin{aligned} \|S(u)f_t - f_t\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{t})^n} \left| f\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}(s+u)\right) - f\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}s\right) \right| ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(\tau + \frac{1}{2\sqrt{t}}u\right) - f(\tau) \right| d\tau = \left\| S\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}u\right)f - f \right\|_1, \quad t \in \mathbb{R}_+^\uparrow. \end{aligned}$$

Докажем свойство 3. Вначале установим, что $\sup_{t \geq 1} \|f_t\|_{1,\infty} < \infty$. Пусть $V_k = k(V - V)$, $k \geq 1$, $\mathbb{J}_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : m + V \subset V_k\}$, $\mathbb{J}'_k = \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{J}_k$ и k_1 — число точек в $\mathbb{J}_1$. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{1,\infty} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \max_{s \in m+V} |f_t(s)| = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \exp\left(-\min_{\tau \in V} \frac{|m+\tau|^2}{4t}\right) \\ &< \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \left(\sum_{m \in \mathbb{J}_1} \exp\left(-\min_{\tau \in V} \frac{|m+\tau|^2}{4t}\right) + \sum_{m \in \mathbb{J}'_1} \exp\left(-\min_{\tau \in V} \frac{|m+\tau|^2}{4t}\right) \right) \\ &< \frac{k_1}{(2\sqrt{\pi t})^n} + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|s|^2/(4t)} ds \\ &= \frac{k_1}{(2\sqrt{\pi t})^n} + \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\tau|^2} d\tau, \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

Осталось установить предельное соотношение из свойства 3. Поскольку

$$S(h)f_t - f_t = (S(h)f_1 - f_1) * f_{t-1}, \quad t \geq 2, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

и как только установлено $\sup_{t \geq 2} \|f_{t-1}\|_{1,\infty} < \infty$, достаточно доказать, что выполнено $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(h)f_1 - f_1\|_{1,\infty} = 0$. Равенство следует из оценки

$$\begin{aligned} \|S(h)f_1 - f_1\|_{1,\infty} &\leq \frac{C}{(2\sqrt{\pi})^n} \left(\sum_{m \in \mathbb{J}_k} \max_{s \in m+V} |e^{-|s+h|^2/4} - e^{-|s|^2/4}| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \in \mathbb{J}'_k} \max_{s \in m+V} |e^{-|s+h|^2/4} - e^{-|s|^2/4}| \right), \end{aligned}$$

$k \geq 1$, $h \in V - V$, где C — некоторая постоянная. При этом учитывается оценка второго слагаемого в правой части этого равенства величиной

$$2^{n+1} \sum_{m \in \mathbb{J}'_k} \int_{m+V} e^{-|s|^2} ds = 2^{n+1} \int_{W_k} e^{-|s|^2} ds, \quad \text{где } W_k = \bigcup_{m \in \mathbb{J}'_k} (m+V).$$

Эта величина достаточно мала при больших $k \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 9. Для того чтобы полугруппа операторов $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ была сильно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяло условию $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие сильной непрерывности полугруппы U эквивалентно выполнению условия $\lim_{t \rightarrow 0+} f_t * x_0 = x_0$ для любой функции $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Из свойства 1 леммы 6 следует, что $(f_t, t \in \mathbb{R}_+^\downarrow)$ – ОАЕ в алгебре $L^1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому применима лемма 4.3 из [7], из которой следует, что

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) = \left\{ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : \lim_{t \rightarrow 0+} f_t * x = x \right\}.$$

ТЕОРЕМА 10. Слабое решение $x(t, s), t \geq 0, s \in \mathbb{R}^n$, задачи Коши (5) стабилизируется на бесконечности тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x_0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Lambda(x_0)). \quad (6)$$

Если $x_0 \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (6), то $\tilde{x}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)x_0$ есть постоянная функция на $\mathbb{R}^n$, являющаяся пределом в $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ выпуклых линейных комбинаций сдвигов функции x_0 . При этом $\tilde{x}_0 \equiv 0$, если $0 \notin \Lambda(x) \cup (\Lambda_{\text{erg}}(x_0) \setminus \Lambda_d(x_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось (см. замечание 2), свойство $0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x_0)$ не зависит от выбора 0-направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R}^n)$ из определения 10. В силу свойства 2 леммы 6 семейство $(f_t, t \in \mathbb{R}_+^\uparrow)$ – инвариантный интеграл, поэтому $0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x_0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Lambda(x_0))$ тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_t * x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)x_0 = \tilde{x}_0.$$

Поскольку

$$S(h)\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (S(h)f_t - f_t) * x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} f_t * (S(h) - I)x_0 = 0$$

(используется свойство инвариантности интеграла) для любого $h \in \mathbb{R}^n$; следовательно, $\tilde{x}_0 \equiv \text{const}$. Равенство $\tilde{x}_0 = 0$ при условии $0 \notin \Lambda(x) \cup (\Lambda_{\text{erg}}(x_0) \setminus \Lambda_d(x_0))$ следует из определения множеств $\Lambda_{\text{erg}}(x_0)$, $\Lambda_d(x_0)$ и замечания 2.

Утверждение теоремы о том, что постоянная функция $\tilde{x}_0$ есть предел выпуклых линейных комбинаций сдвигов функции x_0 , следует из представления

$$U(t)x_0 = f_t * x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(\tau)S(-\tau)x_0 d\tau, \quad t > 0,$$

где подынтегральная функция $\tau \mapsto f_t(\tau)S(-\tau)x_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ непрерывна и абсолютно суммируема. При этом используются свойства: $f_t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(\tau) d\tau = 1$, при любом $t > 0$.

Следующая теорема получена при условии, что $0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x_0)$, где x_0 – начальная функция задачи (5). Это означает, что может отсутствовать предел $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} f_t * x_0$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. В ее формулировке используется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Для заданной функции $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ символом $C \text{Lim}(x_0)$ обозначим совокупность функций

$\{y_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : \text{существует последовательность } (t_n) \text{ из } \mathbb{R}_+ \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$
и последовательность функций $U(t_n)x_0 = f_{t_n} * x_0, t \geq 1$,
с-сходится к функции $y_0\}$.

ТЕОРЕМА 11. Если $0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x_0)$ для начальной функции $x_0 \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ задачи (5), то множество $C\text{Lim}(x_0)$ не пусто, состоит из постоянных функций, лежащих в выпуклой линейной оболочке множества $S(\tau)x_0$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, из $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство функций $(f_t * x_0, t \geq 2)$. Из свойства 3 леммы 6 и доказательства леммы 1 следует, что они принадлежат подпространству $C_{b,u}(\mathbb{R}^n)$, равномерно ограничены в нем, причем

$$\sup_{t \geq 2} \|f_t * x_0\|_{\infty} \leq \sup_{t \geq 2} \|f_t\|_{1,\infty} \|x_0\|_{S^1} < \infty.$$

Равностепенная непрерывность этого семейства следует из свойства 3 леммы 6. При этом имеет место оценка

$$\|f_{t+h} * x_0 - f_t * x_0\|_{\infty} \leq \|S(h)f_t - f_t\|_{1,\infty} \|x_0\|_{S^1}, \quad t \geq 2, \quad h \in V - V.$$

Следовательно, как и при доказательстве теоремы 3, появляется возможность применения теоремы Арцела–Асколи [15]. Поскольку $0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x_0)$, существует последовательность (t_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ такая, что $\inf_{n \geq 1} \|f_{t_n} * x_0\| > 0$. Следовательно, ввиду непрерывности вложения $C_{b,u}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, получаем, что существует последовательность (s_n) из $\mathbb{R}^n$, для которой $(f_{t_n} * x_0)(s_n) = \beta_n$, $n \geq 1$ и $C_0 = \inf_{n \geq 1} |\beta_n| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность функций $x_n = f_{t_n} * x_0$, $n \geq 1$, из $C_{b,u}(\mathbb{R}^n)$ с-сходится к некоторой ненулевой функции $y_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, последовательность (x_n) с-сходится к y_0 и в $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ (это следует из свойства 4 определения 1).

Докажем, что y_0 – постоянная функция. Для этого рассмотрим любой ненулевой элемент $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\widehat{G}$ изоморфна $\mathbb{R}^n$) и функцию $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, для которой $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $\widehat{f}(0) = 0$. Тогда в силу леммы 2 последовательность $(f * x_n)$ с-сходится к $f * y_0$ в $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $(f_t, t \in \mathbb{R}_+^1)$ – инвариантный интеграл, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * f_{t_n}\|_1 = 0$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * x_n\| = 0$ и, следовательно, $f * y_0 = 0$. Значит, $\Lambda(y_0) = \{0\}$ и поэтому $S(h)y_0 = y_0$ для любого $h \in \mathbb{R}^n$ (см. свойство 4 теоремы 1). Таким образом, y_0 – постоянная функция.

Для любой функции $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ через $[x_0]$ обозначим множество функций вида

$$\{z_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : z_0 = \beta S(\alpha)x_0 \text{ для некоторых } 0 \neq \beta \in \mathbb{C} \text{ и } \alpha \in \mathbb{R}^n\}.$$

ТЕОРЕМА 12. Если $0 \in \Lambda_{\text{ess}}(x_0)$ для начальной функции $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ задачи (5), то множество $C\text{Lim}([x_0])$ содержит ненулевую постоянную функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вернемся к доказательству теоремы 3, где построена с-сходящаяся в $C_{b,u}(\mathbb{R}^n)$ последовательность функций $x_k = f_{t_k} * x_0$, $k \geq 1$. Отметим, что эта последовательность не может сходиться в $C_{b,u}(\mathbb{R}^n)$ к нулевой функции. Более того, (x_k) не может содержать и подпоследовательность, сходящуюся к нулевой функции. Поскольку $\inf_{k \geq 1} \|x_k\|_{\infty} > 0$, найдется последовательность (s_k) из $\mathbb{R}^n$ такая, что $|x_k(s_k)| \geq C_0 > 0$, $k \geq 1$.

В заключение изучим структуру слабых решений задачи (5) с начальной функцией из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющего условию $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Оно, в силу теоремы 9, обеспечивает сильную непрерывность полугруппы операторов $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

В следующей теореме слабое решение $x(t, s)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}^n$, задачи Коши (5) с $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, рассматривается как функция первого аргумента со значениями в $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, т.е. рассматривается функция

$$\tilde{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \quad (\tilde{x}(t))(s) = x(t, s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad s \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

ТЕОРЕМА 13. Каждое слабое решение $\tilde{x}$ задачи Коши (5) с $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ является медленно меняющейся на бесконечности функцией (элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}(\mathbb{R}^n))$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из представления рассматриваемого слабого решения в виде

$$x(t, s) = (U(t)x_0)(s) = (f_t * x_0)(s), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

следует, что функция $\tilde{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$. Ее производная представима в виде

$$\tilde{x}'(t)(s) = (\dot{U}(t)x_0)(s) = (g_t * x_0)(s), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

где $g_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} g_t(s) &= -n(2\sqrt{\pi}t)^{-n-1}2\sqrt{\pi}e^{-|s|^2/(4t)} + (2\sqrt{\pi}t)^{-n}|s|^2\frac{1}{4t^2}e^{-|s|^2/(4t)} \\ &= -\frac{n}{t}f_t(s) + \frac{1}{t(2\sqrt{\pi}t)^n}g\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеет вид $g(s) = |s|^2e^{-|s|^2}$, $s \in \mathbb{R}^n$. Значит, функция $\tilde{x}: \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируема, причем $\|U'(t)\| \leq \text{const}/t$, $t > 0$. Из этой оценки следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}'(t)\| = 0$. Теперь из представления $\tilde{x}(t+h) - \tilde{x}(t) = \int_t^{t+h} \tilde{x}'(\tau) d\tau$ получаем, что $S(h)\tilde{x} - \tilde{x} \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}(\mathbb{R}^n))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, ГИТТЛ, М., 1953.
- [2] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, МГУ, М., 1978.
- [3] А. В. Костин, В. А. Костин, *К теории функциональных пространств Степанова*, Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 2007.
- [4] А. Г. Баскаков, "Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73:2** (2009), 3–68.
- [5] А. Г. Баскаков, "О состояниях обратимости и условиях фредгольмовости линейных дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами", *Матем. сб.* (в печати).
- [6] А. Г. Баскаков, "Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов", *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151.
- [7] А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, "Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:3** (2005), 3–54.

- [8] A. Beurling, “Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l’axe réel”, *Acta Math.*, **77**:1 (1945), 127–136.
- [9] А. Г. Баскаков, *Гармонический анализ линейных операторов*, Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 1987.
- [10] P. Koosis, “On the spectral analysis of bounded functions”, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 121–128.
- [11] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах*, Наука, М., 1975.
- [12] S. Godement, “Théorèmes taubériens et théorie spectrale”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **64** (1947), 119–138.
- [13] Y. Domar, “Some results on narrow spectral analysis”, *Math. Scand.*, **20** (1967), 5–18.
- [14] Н. Винер, *Интеграл Фурье и некоторые его приложения*, Физматлит, М., 1963.
- [15] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория*, ИЛ, М., 1966.
- [16] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [17] И. Н. Пак, “О суммах тригонометрических рядов”, *УМН*, **35**:2 (1980), 91–144.
- [18] M. Karamata, “Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux”, *Bull. Soc. Math. France*, **61** (1933), 55–62.
- [19] G. H. Hardy, “A theorem concerning trigonometrical series”, *J. London Math. Soc.*, **3** (1928), 12–13.
- [20] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [21] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [22] M. R. Schmidt, “Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen”, *Math. Z.*, **22**:1 (1925), 89–152.
- [23] В. Д. Репников, “О равномерной стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений”, *ДАН СССР*, **157**:3 (1964), 532–535.
- [24] В. В. Жиков, “О стабилизации решений параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **104**:4 (1977), 597–616.
- [25] В. Н. Денисов, В. В. Жиков, “О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений”, *Матем. заметки*, **37**:6 (1985), 834–850.
- [26] В. Н. Денисов, “О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени”, *УМН*, **60**:4 (2005), 145–212.

А. Г. Баскаков

Воронежский государственный университет

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Поступило

28.10.2010

Исправленный вариант

08.06.2011

Н. С. Калужина

Воронежский государственный университет