Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, Нули функций в весовых пространствах со смешанной нормой, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 279–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:23:00

Нули функций в весовых пространствах со смешанной нормой

Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов

В пространствах аналитических в единичном круге функций f со смешанной нормой и мерой, удовлетворяющей Δ_2 -условию, найдены неупрощаемые необходимые условия на подпоследовательности нулей $\{z_{n_k}(f)\}$ функций f в терминах подпоследовательностей номеров $\{n_k\}$. Они позволяют определить в пространствах со смешанной нормой подмножества функций с определенными экстремальными свойствами, которые дают ответы на ряд вопросов о нулевых множествах рассматриваемых пространств, в частности, весовых пространств Бергмана.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm8964

Введение. Пусть $A(\mathbb{D})$ – пространство аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций, $f(z) \in A(\mathbb{D})$,

$$\mathfrak{M}_0(f; r) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}, \quad 0 < r < 1,$$

$$\mathfrak{M}_p(f; r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < r < 1, \quad p \in (0, \infty),$$

$$\mathfrak{M}_\infty(f; r) = \max\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

dm – мера Лебега–Стилтьеса, порожденная неубывающей на $(0, 1]$ функцией $m(t)$, $m(+0) = 0$ (для определенности будем предполагать функцию $m(t)$ непрерывной слева).

Обозначим через $A_{q,m(t)}^p$, $q > 0$, $p \in [0, \infty]$, пространство функций $f \in A(\mathbb{D})$ таких, что

$$\left\{ \int_0^1 (\mathfrak{M}_p(f; 1-t))^q dm(t) \right\}^{1/q} < \infty.$$

Пространство $A_{q,m(t)}^p$ будем называть пространством со смешанной нормой и мерой dm . При $q = p \in (0, \infty)$ и

$$m(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

где $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на $(0, 1)$ функция, получим пространство Бергмана $A_{\varphi(t)}^p$ с весом $\varphi(t)$, которое при $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, принято обозначать через A_α^p (см., например, [1]). Если $m(t) = t^{\alpha+1}$, $\alpha > -1$, то для $A_{q,m(t)}^p$ используем обозначение $A_{q,\alpha}^p$.

В работе рассматривается распределение модулей нулей функций из пространств со смешанной нормой и с мерой dm , порожденной функцией $m(t)$, удовлетворяющей условию $m(2t) \leq cm(t)$, $t \in (0, 1/2]$, $c = \text{const} > 1$. Это целесообразно делать в рамках пространств

$$H_{q,\mu(t)}^p := A_{q,m(t)}^p, \quad \mu(t) := m(t)^{1/q},$$

поскольку при фиксированной функции $\mu(t)$ параметр q входит в основную формулировку (теорема 2) в наиболее удобном для получения дальнейших следствий виде.

Если $m(t)$ абсолютно непрерывна, то функция f по определению принадлежит $H_{q,\mu(t)}^p$, если

$$\left(\int_0^1 (\mathfrak{M}_p(f; 1-t)\mu(t))^q \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} \right)^{1/q} < \infty.$$

В частности, при $\mu(t) = t^\gamma$, $\gamma > 0$, функция f принадлежит $H_{q,\mu(t)}^p$, если

$$\int_0^1 (\mathfrak{M}_p(f; 1-t)t^\gamma)^q \frac{dt}{t} < \infty.$$

Таким образом, параметр q в определении пространства H_{q,t^γ}^p играет роль более “точной шкалы”, дополняющей шкалу, образованную параметром γ (функцией $\mu(t)$ в общем случае).

В рамках данной работы веса, более общие, чем степенные t^α , $\alpha > -1$, используются с целью охватить прежде всего случай сколь угодно медленного роста средних $\mathfrak{M}_p(f; r)$ при $r \rightarrow 1 - 0$. В этом направлении для пространств Бергмана результаты ранее были получены Бирюковым [2], а также авторами [3] (см. также [4]).

Пусть $\{z_n(f)\}_{n=1}^\infty$ – упорядоченная в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции $f \in A(\mathbb{D})$, причем каждый нуль участвует в последовательности столько раз, какова его кратность. Такую последовательность нулей будем обозначать через $Z(f)$ и называть *нулевым множеством* функции f .

Ниже найдены неулучшаемые необходимые условия на отклонения $1 - |z_n(f)|$ нулей $z_n(f)$ функций $f \in H_{q,\mu(t)}^p$ от границы круга $\mathbb{D}$ при ограничении на отклонения в виде неравенства $1 - |z_n(f)| \leq b(n)$, $n > n(f)$, где $b(\cdot)$ – некоторая заданная функция. Они выражаются через условия на подпоследовательности номеров $\{n_k\}$, для которых существуют такие функции $f \in H_{q,\mu(t)}^p$, что $1 - |z_{n_k}(f)| = b(n_k)$. На основании этого можно достаточно эффективно провести сравнение нулевых множеств пространств $H_{q,\mu(t)}^p$ при различных q и $\mu(t)$. При этом роль параметра p в распределении нулей функций f из $H_{q,\mu(t)}^p$ ($A_{q,m(t)}^p$) в результатах этой работы фактически не проявилась. Это дает формальный повод для аналогии с известным свойством нулевых множеств пространств Харди H^p . Здесь уместно отметить, что пространства Харди получаются как предельный случай пространств $A_{q,m(t)}^p = H_{q,\mu(t)}^p$ при $m(t) = t$ и $q \rightarrow \infty$. Пространства Харди могут быть рассмотрены и как предельный случай,

когда $m(t) = 0$ при $0 < t \leq \varepsilon$, $m(t) = 1$ при $\varepsilon < t \leq 1$, а $\varepsilon \rightarrow +0$. Сказанное, однако, не исключает того, что различие нулевых множеств пространств $H_{q,\mu(t)}^p$ по параметру p может проявиться на пути дальнейшего изучения их свойств.

Методы данной работы являются развитием методов работы [5], основанных на построении аналитических функций, у которых порядки средних геометрических $\mathfrak{M}_0(f; r)$ и средних арифметических $\mathfrak{M}_p(f; r)$, $p \in (0, \infty]$, при $r \rightarrow 1 - 0$ совпадают, а считающие функции нулей обладают специальными свойствами.

Историю вопроса можно найти в [3], [5], а также ниже в п. 3.

1. Функции, удовлетворяющие Δ_2 -условию. Пусть для положительной неубывающей на $(0, 1]$ функции $\mu(t)$, $\mu(+0) = 0$, существует такая постоянная $c > 1$, что для всех $t \in (0, 1/2]$ выполняется неравенство

$$\mu(2t) \leq c\mu(t).$$

В этом случае скажем, что функция $\mu(t)$, $t \in (0, 1]$, удовлетворяет Δ_2 -условию с постоянной c (будем писать при этом $\mu \in \Delta_2$). Если $\mu \in \Delta_2$, то положим

$$c_\mu = \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(2t)}{\mu(t)}.$$

Число $\rho_\mu = \log_2 c_\mu$ назовем Δ_2 -показателем функции μ . Если $\rho_\mu = 0$ ($c_\mu = 1$), то функцию $\mu(t)$ назовем *медленно убывающей* при $t \rightarrow 0$.

Отметим некоторые свойства положительных неубывающих на $(0, 1]$ функций $\mu(t) \in \Delta_2$.

Свойство 1. Если $\mu \in \Delta_2$, то для любого $\rho > \rho_\mu$ найдется такое $t_\rho \in (0, 1/2]$, что для всех $t \in (0, t_\rho]$ выполняется неравенство $\mu(2t) \leq c\mu(t)$ с постоянной $c = 2^\rho$ (очевидно, $t_\rho = 1/2$ при достаточно большом ρ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это свойство непосредственно следует из приведенных выше определений.

В следующих свойствах 2 и 3 параметры ρ , c , t_ρ те же, что и в свойстве 1.

Свойство 2. Если $\lambda > 1$, то $\mu(\lambda t) \leq c\lambda^\rho \mu(t)$ при $\lambda t \leq t_\rho/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\lambda \in (2^{l-1}, 2^l]$, $l \in \mathbb{N}$, то

$$2^l t \leq t_\rho, \quad \mu(\lambda t) \leq \mu(2^l t) \leq c^l \mu(t) \leq c^{1+\log_2 \lambda} \mu(t) = c\lambda^\rho \mu(t).$$

Свойство 3. Если $0 < \tau' < \tau'' \leq t_\rho/2$, то

$$\left(\frac{\tau'}{\tau''} \right)^\rho \leq c \frac{\mu(\tau')}{\mu(\tau'')}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $\tau'' = \lambda\tau'$, получим в силу свойства 2 неравенство $\mu(\tau'') = \mu(\lambda\tau') \leq c\lambda^\rho \mu(\tau')$, эквивалентное доказываемому.

Свойство 4. Имеет место оценка $\mu(t) \geq c(\mu)t^\rho$ при $t \in (0, 1/2]$, где $c(\mu)$ не зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $t_k = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, $t_{k+1} < t \leq t_k$, имеем

$$\mu(t) \geq \mu(2^{-k-1}) \geq \mu(1)t_{k+1}^\rho \geq \mu(1)2^{-\rho}t^\rho = \frac{\mu(1)}{c}t^\rho = c(\mu)t^\rho.$$

СВОЙСТВО 5. Для любого $\delta \in (0, 1/2]$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 (1-\tau)^{1/\delta} d\mu(\tau) \leq c(\mu)\mu(\delta),$$

где $c(\mu)$ не зависит от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывая это свойство, положим $\mu(t) = \mu(1)$ при $t > 1$, $k_0 = [\log_2(1/\delta)]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-\tau)^{1/\delta} d\mu(\tau) &= \int_0^\delta (1-\tau)^{1/\delta} d\mu(\tau) + \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{\delta \cdot 2^k}^{\delta \cdot 2^{k+1}} (1-\tau)^{1/\delta} d\mu(\tau) \\ &\quad + \int_{\delta \cdot 2^{k_0}}^1 (1-\tau)^{1/\delta} d\mu(\tau) \\ &\leq \mu(\delta) + \sum_{k=0}^{k_0} (1-\delta \cdot 2^k)^{1/\delta} (\mu(\delta \cdot 2^{k+1}) - \mu(\delta \cdot 2^k)) \\ &\leq \mu(\delta) + (c-1) \sum_{k=0}^{k_0} (1-\delta \cdot 2^k)^{1/\delta} \mu(\delta \cdot 2^k) \\ &\leq \mu(\delta) \left(1 + (c-1) \sum_{k=0}^{k_0} e^{-2^k} \cdot c^k \right) \leq c(\mu)\mu(\delta), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Легко проверяются также следующие свойства.

СВОЙСТВО 6. Любая функция $\mu(t)$ типа модуля непрерывности удовлетворяет Δ_2 -условию.

СВОЙСТВО 7. Если $m(t) \in \Delta_2$ и $\mu(t) \asymp m(t)$ при $t \rightarrow +0$, то $\mu(t) \in \Delta_2$.

СВОЙСТВО 8. Если $m(t) \in \Delta_2$, то и $\mu(t) = m(t)^\beta \in \Delta_2$ для любого $\beta > 0$, причем $\rho_\mu = \beta \rho_m$.

2. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1 (см. [5; лемма 1]). Пусть даны возрастающие последовательности положительных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, $r_k \rightarrow 1-0$. Определим на $[0, 1]$ функцию $n(r)$, положив $n(r) = 0$ при $0 \leq r \leq r_1$, $n(r) = n_k$ при $r_k < r \leq r_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Положим

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 \leq r < 1.$$

Тогда при каждом $k = 1, 2, \dots$ и любом $r \in (r_k, r_{k+1}]$ имеем

$$\exp N(r) = A_k \left(\frac{r}{r_k} \right)^{n_k}, \quad (1)$$

где

$$A_k = \prod_{j=1}^k \left(\frac{r_k}{r_j} \right)^{n_j - n_{j-1}}, \quad n_0 = 0.$$

ЛЕММА 2. Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k} \right)^{n_k - n_{k-1}} \right),$$

где $r_k = 1 - t_k$, $1/2 > t_1 > \dots > t_k \rightarrow 0$, $n_0 = 0$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$, $n_k - n_{k-1} \uparrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Тогда если $n_k t_{k+1} \leq a = \text{const}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-n_k t_k\} < \infty,$$

то существует такая величина $c = c(\sigma, a)$, зависящая лишь от σ и a , что при всех достаточно больших s выполняется неравенство

$$\mathfrak{M}_{\infty}(f; 1-t) \leq c \cdot \mathfrak{M}_0(f; 1-t), \quad t \in \left[2t_{s+1}, \frac{1}{2} t_s \right].$$

Это утверждение установлено в [5] (см. доказательство леммы 9, формулу (3.24)).

ЛЕММА 3. Пусть $m(t)$ – положительная неубывающая на $(0, 1]$ функция такая, что $m(+0) = 0$, $m(t) \in \Delta_2$, $q > 0$, $\mu(t) = m(t)^{1/q}$; $\varepsilon(t)$ – такая неубывающая на $(0, 1]$ функция, $\varepsilon(+0) = 0$, что

$$S(t) := \frac{\varepsilon(t)}{\mu(t)} \uparrow +\infty, \quad t \rightarrow +0. \quad (2)$$

Пусть также $\{\varkappa_k\}$ – последовательность действительных чисел такая, что

$$\sum |\varkappa_k| < \infty, \quad (3)$$

$\{n_k\}$ – последовательность номеров, $n_k \uparrow \infty$, $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{1}{n_k} \left(\log S\left(\frac{1}{n_k}\right) + \varkappa_k \right), \quad \frac{1}{2} > t_1 > \dots > t_k \rightarrow 0, \\ n(r) &= \begin{cases} 0, & 0 < r \leq 1 - t_1, \\ n_k, & 1 - t_k < r \leq 1 - t_{k+1}, \end{cases} \quad N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad r \in (0, 1), \\ \delta_k &= \varepsilon \left(\frac{1}{n_k} \right) \prod_{j=1}^{k-1} S\left(\frac{1}{n_j}\right), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда при сходимости ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} \log S\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad (5)$$

а также при условии

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) = O\left(\mu\left(\frac{1}{n_k}\right) \cdot L\left(S\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right)\right)\right), \quad (6)$$

где $L(\cdot)$ – любая медленно растущая в бесконечности функция, выполняется левое из неравенств

$$c_1 \cdot \delta_k^q \leq \int_{t_{k+1}}^{t_k} (\exp N(1-\tau))^q dm(\tau) \leq c_2 \cdot \delta_k^q, \quad (7)$$

а при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \log^2 S\left(\frac{1}{n_k}\right) < \infty \quad (8)$$

– правое из неравенств (7), где c_1 и c_2 положительны и не зависят от k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (5) влечет за собой условие (8), и поэтому при выполнении (5) и (6) верны оба неравенства в (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Поскольку $m(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то при некотором $\rho > 0$ выполняется неравенство (см. п. 1, свойство 4)

$$m(t) \geq c(m)t^\rho, \quad t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad c(m) > 0.$$

Тем самым,

$$\log S(t) \leq \frac{1}{q} \log \frac{\varepsilon(1)^q}{m(t)} \leq c(m, q) \log \frac{1}{t},$$

где $c(m, q)$ не зависит от t . Поэтому при достаточно быстром росте n_k , $k \rightarrow \infty$, ряды (5) и (8) сходятся, а $t_k \downarrow 0$ (см. (4)). Выполняется также и условие (6) (поскольку $\varepsilon(t)/L(S(t)) \downarrow 0$ при $t \rightarrow +0$).

Заметим еще, что (8) следует из ограниченности общего члена ряда (5), поскольку в случае такой ограниченности последовательность $\{n_k\}$ растет быстрее геометрической прогрессии.

В силу леммы 1

$$\exp N(1-\tau) = (1-\tau)^{n_k} \prod_{j=1}^k (1-t_j)^{-\nu_j}, \quad \tau \in (t_{k+1}, t_k], \quad \nu_j = n_j - n_{j-1}, \quad n_0 = 0 \quad (9)$$

(см. (1)). Неравенства (7) с учетом (9) принимают вид

$$c_1 \delta_k^q \leq \int_{t_{k+1}}^{t_k} (1-\tau)^{n_k q} dm(\tau) \cdot \prod_{j=1}^k (1-t_j)^{-\nu_j q} \leq c_2 \delta_k^q. \quad (10)$$

Покажем, что при некоторых положительных c_3 и c_4 , не зависящих от k ,

$$c_3 \prod_{j=1}^k S_j \leq \prod_{j=1}^k (1-t_j)^{-\nu_j} \leq c_4 \prod_{j=1}^k S_j, \quad S_j = S\left(\frac{1}{n_j}\right), \quad (11)$$

где левое неравенство имеет место при сходимости ряда (5), а правое – при условии (8).

Поскольку

$$\log \frac{1}{1-t_j} = t_j + O(t_j^2) = \frac{1}{n_j} \left(\log S_j + \varkappa_j + O\left(\frac{\log^2 S_j}{n_j}\right) \right), \quad j \rightarrow \infty,$$

то

$$\begin{aligned} (n_j - n_{j-1}) \log \frac{1}{1-t_j} &= \left(1 - \frac{n_{j-1}}{n_j}\right) \left(\log S_j + \varkappa_j + O\left(\frac{\log^2 S_j}{n_j}\right)\right) \\ &= \log S_j - \frac{n_{j-1}}{n_j} \log S_j + O\left(\varkappa_j + \frac{\log^2 S_j}{n_j}\right), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда при условии (3) и сходимости ряда (5) выполняется левое из неравенств

$$\sum_{j=1}^k \log S_j + \log c_3 \leq \sum_{j=1}^k \nu_j \log \frac{1}{1-t_j} \leq \sum_{j=1}^k \log S_j + \log c_4, \quad (12)$$

а при условиях (3) и (8) – правое из этих неравенств. Из (12) следует (11).

Далее, в силу свойства 5 из п. 1

$$\int_{t_{k+1}}^{t_k} (1-\tau)^{n_k q} dm(\tau) \leq c(m) m\left(\frac{1}{n_k q}\right) \leq c(m) \cdot c(q) m\left(\frac{1}{n_k}\right) = c_1(m, q) \mu\left(\frac{1}{n_k}\right)^q. \quad (13)$$

С другой стороны, при достаточно больших k $1/n_k < t_k$, так что

$$\int_{t_{k+1}}^{t_k} (1-\tau)^{n_k q} dm(\tau) \geq 3^{-q} \int_{t_{k+1}}^{1/n_k} dm(\tau) = 3^{-q} \left(m\left(\frac{1}{n_k}\right) - m(t_{k+1})\right). \quad (14)$$

Пусть C – постоянная, с которой функция $m(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, $\rho = \log_2 C$. В силу свойства 2 из п. 1

$$m(t_{k+1}) = m\left((\log S_{k+1} + \varkappa_{k+1}) \frac{1}{n_{k+1}}\right) \leq C(\log S_{k+1} + \varkappa_{k+1})^\rho m\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right), \quad (15)$$

а в силу (6)

$$\mu\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) = O\left(\mu\left(\frac{1}{n_k}\right) \frac{L(S_{k+1})}{S_{k+1}}\right),$$

т.е.

$$m\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) = O\left(m\left(\frac{1}{n_k}\right) \left(\frac{L(S_{k+1})}{S_{k+1}}\right)^q\right). \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что

$$m(t_{k+1}) = o\left(m\left(\frac{1}{n_k}\right)\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Отсюда и из (14) получим

$$\int_{t_{k+1}}^{t_k} (1-\tau)^{n_k q} dm(\tau) \geq c_2(m, q) \mu\left(\frac{1}{n_k}\right)^q. \quad (18)$$

Из (18) (соответственно из (13)) и левого (соответственно правого) из неравенств (11) следует левое (соответственно правое) из неравенств (10). Поскольку неравенства (10) эквивалентны неравенствам (7), то лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функция $m(t)$ в лемме 3 обладает тем свойством, что для любой бесконечно малой при $t \rightarrow +0$ функции $\gamma(t) > 0$ имеет место соотношение

$$m(\gamma(t)t) = o(m(t)) \quad \text{при } t \rightarrow +0, \quad (19)$$

то условие (6) является лишним. В этом случае из сходимости ряда (5) следует, что

$$n_k t_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \left(\log S \left(\frac{1}{n_{k+1}} \right) + \kappa_{k+1} \right) = o(1),$$

так что $t_{k+1} = o(1/n_k)$, $m(t_{k+1}) = o(m(1/n_k))$ (ср. с (17)). Однако соотношение (19) не охватывает случая всех медленно убывающих при $t \rightarrow +0$ функций $m(t)$ (например, $m(t) = 1/\log(e/t)$). Для справедливости в этом случае левого из неравенств (7) необходимо, чтобы последовательность $\{n_k\}$ росла достаточно быстро. Такой рост и обеспечивает условие (6).

3. Основные результаты. Следствия. Пусть, как и выше, $\mu(t)$ и $\varepsilon(t)$ – положительные неубывающие на $(0, 1]$ функции, $\mu(+0) = \varepsilon(+0) = 0$, $S(t) \uparrow \infty$, $t \rightarrow +0$ (см. (2)).

Для определенности функцию $\varepsilon(t)$, так же, как и функцию $\mu(t)$, будем считать непрерывной слева.

Пусть $q > 0$, $m(t) = \mu(t)^q$, $0 \leq p \leq \infty$, $A_{q, \mu(t), \varepsilon(t)}^p$ – множество функций $f \in A_{q, m(t)}^p$ таких, что

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{1}{n} \log S \left(\frac{1}{n} \right)$$

для достаточно больших n , $n > n(f)$.

Положим

$$H_{q, \mu(t), \varepsilon(t)}^p := A_{q, m(t), \varepsilon(t)}^p.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q > 0$, $p \in [0, +\infty]$, $m(t)$ – произвольная положительная неубывающая на $(0, 1]$ функция, $m(+0) = 0$. Тогда для любой функции $f \in A_{q, m(t)}^p$ найдется такая положительная неубывающая функция

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t; f), \quad \varepsilon(+0) = 0, \quad \frac{\varepsilon(t)}{m(t)^{1/q}} \uparrow \infty, \quad t \rightarrow +0,$$

что $f \in A_{q, m(t), \varepsilon(t)}^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем, что $f(0) = 1$. В силу формулы Йенсена

$$\mathfrak{M}_0(f; r) = \exp \int_0^r \frac{n(t; f)}{t} dt = \prod_{k=1}^{n(r; f)} \frac{r}{|z_k(f)|}, \quad (20)$$

где $n(t; f)$ – число нулей $z_k(f)$, попавших в круг $|z| < t$. Положим $r_1 = |z_1(f)|$,

$$\pi(r; f) = \begin{cases} 0, & 0 < r \leq r_1, \\ \prod_{k=1}^{[1/(1-r)]} \frac{1}{|z_k(f)|}, & r_1 < r < 1. \end{cases}$$

Заменив в правой части равенства (20) $n(r; f)$ на $[1/(1-r)]$, получим при $r_1 < r < 1$

$$\pi(r; f) \leq r^{-[1/(1-r)]} \mathfrak{M}_0(f; r) \leq \max\{r_1^{-1}, 4\} \mathfrak{M}_0(f; r) = c_1 \mathfrak{M}_0(f; r). \quad (21)$$

Из (21) и условия $f \in A_{q, m(t)}^p$ следует, что

$$\int_0^1 \pi(1-t; f)^q dm(t) \leq c_1^q \int_0^1 \mathfrak{M}_0(f; 1-t)^q dm(t) =: I < \infty,$$

так что

$$\int_0^t \pi(1-\tau; f)^q dm(\tau) =: \eta(t) \downarrow 0, \quad t \rightarrow +0.$$

Отсюда и из убывания с ростом τ функции $\pi(1-\tau; f)$ следует неравенство

$$\pi(1-t; f)^q \int_0^t dm(\tau) \leq \eta(t).$$

Поэтому

$$\pi(1-t; f) \leq \left(\frac{\eta(t)}{m(t)} \right)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon(t)}{m(t)^{1/q}}, \quad \varepsilon(t) \downarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

где функцию $\varepsilon(t)$ всегда можно взять удовлетворяющей условию (2). Положив здесь $t = 1/n$, получим

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \leq \frac{\varepsilon(1/n)}{m(1/n)^{1/q}},$$

откуда

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{1}{n} \log \frac{\varepsilon(1/n)}{m(1/n)^{1/q}}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mu(t)$ и $\varepsilon(t)$ – положительные неубывающие непрерывные слева на $(0, 1]$ функции, $\mu(+0) = \varepsilon(+0) = 0$,

$$S(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\mu(t)} \uparrow \infty, \quad t \log S(t) \downarrow 0, \quad t \rightarrow +0, \quad (22)$$

$\mu(t) \in \Delta_2$, ρ_μ – Δ_2 -показатель функции $\mu(t)$, и пусть

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\log S(t)}{\log \log(1/\mu(t))} > \max\{1, \rho_\mu\}. \quad (23)$$

Пусть также $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, $\mu_k = \mu(1/n_k)$, $\varepsilon_k = \varepsilon(1/n_k)$, $S_k = \varepsilon_k/\mu_k = S(1/n_k)$,

$$\delta_k = \varepsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} S_j, \quad (24)$$

причем

$$\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \equiv \frac{\varepsilon_k}{\mu_{k-1}} = O(L(S_k)), \quad k \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где $L(t)$ – произвольная медленно растущая при $t \rightarrow +\infty$ функция.

Тогда если сходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \delta_k^q, \quad q > 0, \quad (26)$$

то в $H_{q,\mu(t),\varepsilon(t)}^{\infty}$ есть функция f такая, что при всех достаточно больших k

$$1 - |z_{n_k}(f)| = \frac{1}{n_k} \log S\left(\frac{1}{n_k}\right). \quad (27)$$

Если же ряд (26) расходится, то в $H_{q,\mu(t)}^0$ нет функции f такой, что при всех достаточно больших k

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq \frac{1}{n_k} \left(\log S\left(\frac{1}{n_k}\right) - \eta_k \right), \quad (28)$$

где $\{\eta_k\}$ – произвольная последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, прежде всего, такое следствие из условия (25):

$$\mu_k = O\left(\frac{L(S_k)}{S_k} \mu_{k-1}\right) = o(\mu_{k-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (29)$$

В силу (23) при некотором $\varepsilon > 0$ и достаточно малых t

$$S(t) \geq \left(\log \frac{1}{\mu(t)} \right)^{\bar{\rho}+2\varepsilon}, \quad \bar{\rho} := \max\{1, \rho_{\mu}\}. \quad (30)$$

Положив

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\bar{\rho} + \varepsilon}{\bar{\rho} + 2\varepsilon} \quad \left(< \frac{1}{\bar{\rho}} \leq 1 \right), \quad (31)$$

получим из (30):

$$S(t)^{-\lambda} \leq \left(\log \frac{1}{\mu(t)} \right)^{-(\bar{\rho}+\varepsilon)/\bar{\rho}} \quad (32)$$

при достаточно малых t . Нетрудно видеть, что из (32) и (29) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k^{-\lambda} < \infty. \quad (33)$$

Действительно, в силу (29) последовательность μ_k стремится к нулю быстрее, чем последовательность e^{-k} , так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \frac{1}{\mu_k} \right)^{-(\bar{\rho}+\varepsilon)/\bar{\rho}} < \infty.$$

Отсюда и из (32), с учетом того, что $S_k = S(\tau_k)$, $\mu_k = \mu(\tau_k)$, $\tau_k = 1/n_k$, получим (33).

Выберем число ρ , $\rho > \bar{\rho}$, так, чтобы выполнялось неравенство $\lambda < 1/\rho$ (см. (31)). По свойству 2 (см. п. 1) при достаточно больших k имеем

$$\frac{\tau_k}{\tau_{k-1}} \leq \left(C \frac{\mu_k}{\mu_{k-1}} \right)^{1/\rho}, \quad k \geq k_0, \quad C = \text{const} > 0.$$

Умножив обе части этого неравенства на $\log S_k$, получим

$$b_k := \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}} \log S_k \leq \left(C \frac{\varepsilon_k}{\mu_{k-1}} \right)^{1/\rho} \frac{\log S_k}{S_k^{1/\rho}}.$$

Отсюда и из (25) следует, что

$$b_k = O\left(L(S_k)^{1/\rho} \frac{\log S_k}{S_k^{1/\rho}}\right) = O(S_k^{-\lambda}), \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{\rho}.$$

Поэтому (см. (33))

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} \log S_k < \infty. \quad (34)$$

Определим функцию $n(r)$ равенством

$$n(1-t) = n_k, \quad t \in [t_{k+1}, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

где

$$t_k = \frac{1}{n_k} (\log S_k + \varkappa_k), \quad \sum |\varkappa_k| < \infty. \quad (36)$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/2 > t_1 > t_2 > \dots$. Для функции f , определенной в лемме 2, имеем $n(r; f) = n(r)$. При этом последовательность $\{n_k\}$ при всех достаточно больших k удовлетворяет всем условиям, указанным в лемме 2:

$$n_k - n_{k-1} \uparrow \infty, \quad (37)$$

$$n_{k-1} t_k \leq a = \text{const}, \quad (38)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-n_k t_k\} < \infty. \quad (39)$$

Действительно, условия (37) и (38) следуют из (34) и определения t_k (см. (36)). Условие (39) – из (33), поскольку

$$\exp\{n_k t_k\} \sim \exp\{\log S_k + \varkappa_k\} \sim S_k, \quad k \rightarrow \infty.$$

В силу леммы 2 при всех достаточно больших s

$$\mathfrak{M}_{\infty}(f; 1-t) \leq c \mathfrak{M}_0(f; 1-t), \quad t \in \left[2t_{s+1}, \frac{1}{2}t_s\right]. \quad (40)$$

Положим $m(t) = \mu(t)^q$, тогда $m(t) \in \Delta_2$ (см. свойство 8 из п. 1).

При доказательстве леммы 3 было получено соотношение (17). При этом использовалось лишь Δ_2 -свойство функции $m(t)$ и условие (6), которое в теореме 2 записано в виде (25). Из (17) очевидно следует, что $m(t_{s+1}) = o(m(t_s))$ при $s \rightarrow \infty$. Отсюда с учетом Δ_2 -свойства функции $m(t)$ получим неравенство

$$\int_{t_s/2}^{2t_s} dm(t) \leq c(m) \int_{2t_{s+1}}^{t_s/2} dm(t),$$

где $c(m)$ не зависит от s , а с учетом убывания функции $\mathfrak{M}_\infty(f; 1-t)$, $t \in (0, 1]$, — неравенство

$$\int_{2t_{s+1}}^{2t_s} (\mathfrak{M}_\infty(f; 1-t))^q dm(t) \leq (1 + c(m)) \int_{2t_{s+1}}^{t_s/2} (\mathfrak{M}_\infty(f; 1-t))^q dm(t).$$

Отсюда и из (40) получим при всех достаточно больших s , $s \geq l$, неравенства

$$\int_{2t_{s+1}}^{2t_s} (\mathfrak{M}_\infty(f; 1-t))^q dm(t) \leq c_1(m) \int_{2t_{s+1}}^{t_s/2} (\mathfrak{M}_0(f; 1-t))^q dm(t),$$

где $c_1(m) = c \cdot (1 + c(m))$. Суммируя эти неравенства по s от l до произвольного натурального $h > l$ и учитывая, что $f(0) = 1$, $\mathfrak{M}_0(f; r) = \exp N(r; f)$, $0 < r < 1$, получаем

$$\int_{2t_h}^{2t_l} \mathfrak{M}_\infty(f; 1-t)^q dm(t) \leq c_1(m) \int_{2t_h}^{2t_l} (\exp N(1-t; f))^q dm(t), \quad (41)$$

где

$$N(r, f) = N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 < r < 1.$$

Воспользуемся леммой 3. При ее доказательстве было отмечено, что условие (8) следует из ограниченности общего члена ряда (5), тем самым, в силу (34) выполняется. В силу правого из неравенств (7) из (41) получим

$$\int_0^{2t_l} \mathfrak{M}_\infty(f; 1-t)^q dm(t) \leq c_1(m) \cdot c_2 \sum_{k=l-1}^{\infty} \delta_k^q.$$

Итак, если ряд (26) сходится, то функция f принадлежит пространству $H_{q, \mu(t)}^\infty$.

Согласно определению (35), (36) считающей функции $n(r; f) = n(r)$ и в случае $\varkappa_k \equiv 0$ имеем

$$1 - |z_{n_k}(f)| = \frac{1}{n_k} \log S_k.$$

В этом случае при $n_k < n \leq n_{k+1}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - |z_n(f)| = 1 - |z_{n_{k+1}}(f)| = t_{k+1} = \frac{1}{n_{k+1}} \log S \left(\frac{1}{n_{k+1}} \right) \leq \frac{1}{n} \log S \left(\frac{1}{n} \right)$$

(учли то, что по условию функция $t \log S(t)$ растет в правой полукрестности нуля).

Итак, $f \in H_{q,\mu(t),\varepsilon(t)}^\infty$.

С другой стороны, пусть для функции $f \in A(\mathbb{D})$ при всех достаточно больших k , $k > k^*$, выполняется неравенство

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq t_k, \quad \text{где} \quad t_k = \frac{1}{n_k}(\log S_k - \eta_k).$$

Тогда $n(1 - t; f) \geq n_k$, $t \in [t_{k+1}, t_k)$, $k > k^*$, так что $n(r; f) \geq n(r)$, $r \in (r^*, 1)$. Поэтому

$$N(r; f) = \int_{r_1}^r \frac{n(t; f)}{t} dt \geq \int_{r^*}^r \frac{n(t)}{t} dt = N(r). \quad (42)$$

Поскольку условие сходимости ряда (5) и условие (6) леммы 3 выполняются (см. (34) и (25)), то выполняется левое из неравенств (7). Отсюда и из (42) получим при всех достаточно больших k

$$\int_{t_{k+1}}^{t_k} (\exp N(1 - \tau; f))^q dm(\tau) \geq c_1 \delta_k^q.$$

Поэтому из расходимости ряда (26) следует расходимость интеграла

$$\int_0^{t_1} (\exp N(1 - \tau; f))^q dm(\tau),$$

что в силу формулы Йенсена означает, что $f \notin H_{q,\mu(t)}^0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формулы (24) и (25) показывают, что если функции $\mu(t)$, $\varepsilon(t)$ фиксированы, номера $n_1, \dots, n_{k-1}$ уже заданы, то свобода в выборе следующего номера n_k (при сходимости ряда (26)) тем больше, чем быстрее растет функция $L(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Соответственно, тем шире множество последовательностей $\{n_k\}$, для которых выполняется равенство (27). В то же время принятое ограничение сверху на рост функции $L(t)$ (L – медленно растущая функция) задает посредством условия (25) необходимую разреженность последовательности $\{n_k\}$, гарантирующую выполнение условия (34) и справедливость второй части теоремы. Из доказательства этой части теоремы видно также, что для ее справедливости достаточно условий (2), (34) и (25).

Второй части теоремы 2 придадим теперь следующую форму.

ЛЕММА 4. Пусть приняты обозначения теоремы 2 и выполняются условия (2), (34) и (25). Если $f \in H_{q,\mu(t)}^0$, $\eta_k \geq 0$, $\sum \eta_k < \infty$ и имеет место неравенство (28), то ряд (26) сходится.

Приведем некоторые следствия из доказанных утверждений. Всюду ниже в этом пункте приняты обозначения теоремы 2.

Пусть $\mathcal{N}(\mu, \varepsilon, q)$ – множество последовательностей $\{n_k\}$ таких, что

$$\sum \delta_k^q < \infty, \quad \sum \delta_k^{q'} = \infty \quad \text{для всех} \quad q' < q.$$

Функцию $f \in H_{q,\mu(t),\varepsilon(t)}^p$ назовем *экстремалью* в $H_{q,\mu(t),\varepsilon(t)}^p$, если существует такая последовательность $\{n_k\} \in \mathcal{N}(\mu, \varepsilon, q)$, что

$$1 - |z_{n_k}(f)| = \frac{1}{n_k} \log S\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу первой части теоремы 2 условия (22), (34) и (25) являются достаточными для существования экстремалей при любых $p \in [0, \infty]$ и $q > 0$.

Функцию $f \in H_{q,\mu(t)}^p$ назовем *пограничной в пространстве* $H_{q,\mu(t)}^p$, если при некоторой функции $\varepsilon(t)$ и некоторой последовательности $\{n_k\} \in \mathcal{N}(\mu, \varepsilon, q)$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| n_k (1 - |z_{n_k}(f)|) - \log S\left(\frac{1}{n_k}\right) \right| < \infty.$$

Очевидно, что всякая функция f , являющаяся экстремалью в $H_{q,\mu(t),\varepsilon(t)}^p$, является пограничной в $H_{q,\mu(t)}^p$.

Через $Z(H)$ ниже обозначается нулевое множество функционального класса $H \subset A(\mathbb{D})$, т.е. $Z(H) = \{Z(f) : f \in H\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая пограничная в $H_{q,\mu(t)}^p$ функция f при условиях (2), (34) и (25) обладает следующими свойствами:

- 1) $f \notin \bigcup_{q' < q} H_{q',\mu(t)}^0 =: H_{q^-, \mu(t)}^0$;
- 2) нулевое множество $Z(f)$ функции f не может содержаться в нулевом множестве $Z(g)$ ни одной из функций $g \in H_{q^-, \mu(t)}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть для некоторой функции $\varepsilon(t)$ и некоторой последовательности $\{n_k\} \in \mathcal{N}(\mu, \varepsilon, q)$

$$1 - |z_{n_k}(f)| = \frac{1}{n_k} \left(\log S\left(\frac{1}{n_k}\right) + \eta_k \right), \quad \sum |\eta_k| < \infty.$$

Если $f \in H_{q',\mu(t)}^0$, где $q' < q$, то по лемме 4 выполняется неравенство

$$\sum \delta_k^{q'} < \infty,$$

что противоречит определению функции f как пограничной функции в $H_{q,\mu(t)}^0$.

2) Не ограничивая общности, считаем, что $f(0) = g(0) = 1$. Если $Z(f) \subseteq Z(g)$, то $N(r; f) \leq N(r; g)$ и согласно формуле Йенсена $\mathfrak{M}_0(f; r) \leq \mathfrak{M}_0(g; r)$. Поэтому если $g \in H_{q',\mu(t)}^0$, где $q' < q$, то $f \in H_{q',\mu(t)}^0$, что противоречит утверждению 1).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет при достаточно малых t условию

$$\varepsilon(t) \geq \mu(t) \left(\log \frac{1}{\mu(t)} \right)^\theta, \quad \text{где } \theta > \max\{1, \rho_\mu\},$$

то

$$Z(H_{q,\mu(t),\varepsilon(t)}^\infty) \not\subseteq Z(H_{q^-, \mu(t)}^0).$$

В частности, если $p_i \in [0, \infty]$, $q_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2$, и $q_1 \neq q_2$, то

$$Z(H_{q_1,\mu(t)}^{p_1}) \neq Z(H_{q_2,\mu(t)}^{p_2}), \quad (43)$$

$$Z(A_{q_1,m_1(t)}^{p_1}) \neq Z(A_{q_2,m_2(t)}^{p_2}) \quad (44)$$

при $m_1(t)^{1/q_1} = m_2(t)^{1/q_2}$. Для пространств со степенным весом имеем

$$Z(A_{q_1,\alpha_1}^{p_1}) \neq Z(A_{q_2,\alpha_2}^{p_2})$$

при $(\alpha_1 + 1)/q_1 = (\alpha_2 + 1)/q_2$, $q_1 \neq q_2$, $\alpha_i > -1$, $p_i \in [0, \infty]$, $i = 1, 2$;

$$Z(A_{\alpha_1}^{p_1}) \neq Z(A_{\alpha_2}^{p_2}) \quad (45)$$

при $(\alpha_1 + 1)/p_1 = (\alpha_2 + 1)/p_2$, $p_1 \neq p_2$, $\alpha_i > -1$, $p_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2$.

Отметим, что при $(\alpha_1 + 1)/p_1 \neq (\alpha_2 + 1)/p_2$ неравенство (45) установлено Горовицем в 1974 г. в работе [6]. Там же (п. (6.9)) указывается, что в случае $(\alpha_1 + 1)/p_1 = (\alpha_2 + 1)/p_2$, $p_1 \neq p_2$, остается открытым вопрос: допускают ли пространства $A_{\alpha_1}^{p_1}$ и $A_{\alpha_2}^{p_2}$ одинаковые нулевые множества? Об этой задаче упоминается и в монографии [7] (см. п. 4.9). Заметим еще, что ограничение $\alpha \geq 0$, присутствовавшее в формулировках работы [6], Седлецкий [8], [9] заменил на $\alpha > -1$.

Соотношения (43) и (44) можно несколько обобщить, рассмотрев “эквивалентные” меры $d\mu_1$ и $d\mu_2$: будем писать $d\mu_1 \asymp d\mu_2$, если существуют такие положительные величины c_1 , c_2 и $t_0 < 1$, что для любых $t', t'' \in (0, t_0]$, $t' < t''$, выполняются неравенства

$$c_1(\mu_2(t'') - \mu_2(t')) \leq \mu_1(t'') - \mu_1(t') \leq c_2(\mu_2(t'') - \mu_2(t')).$$

Очевидно, что если $d\mu_1 \asymp d\mu_2$, то $H_{q, \mu_1(t)}^p = H_{q, \mu_2(t)}^p$, $p \in [0, \infty]$, $q \in (0, \infty)$. Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3. При любых $q_i \in (0, \infty)$ таких, что $q_1 \neq q_2$, и любых $p_i \in [0, \infty]$, $i = 1, 2$, имеем

$$Z(H_{q_1, \mu_1(t)}^{p_1}) \neq Z(H_{q_2, \mu_2(t)}^{p_2}), \quad (46)$$

если $d\mu_1(t) \asymp d\mu_2(t)$;

$$Z(A_{q_1, m_1(t)}^{p_1}) \neq Z(A_{q_2, m_2(t)}^{p_2}),$$

если $dm_1(t)^{1/q_1} \asymp dm_2(t)^{1/q_2}$.

Следующее утверждение дополняет следствие 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. При любых $q_i \in (0, \infty)$, $p_i \in [0, \infty]$, $i = 1, 2$, имеем

$$Z(H_{q_1, \mu_1(t)}^{p_1}) \not\subseteq Z(H_{q_2, \mu_2(t)}^{p_2}),$$

если $\mu_1(t) = o(\mu_2(t))$, $t \rightarrow 0$;

$$Z(A_{q_1, m_1(t)}^{p_1}) \not\subseteq Z(A_{q_2, m_2(t)}^{p_2}),$$

если $m_1(t)^{1/q_1} = o(m_2(t)^{1/q_2})$, $t \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 для каждой функции $f \in H_{q_2, \mu_2(t)}^{p_2}$ при всех достаточно больших n ($n > n(f)$) выполняется неравенство

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{1}{n} \log \frac{1}{\mu_2(1/n)}. \quad (47)$$

По условию $\mu_1(t) = \varepsilon(t)\mu_2(t)$, где $\varepsilon(t) \geq 0$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Пусть $\varepsilon_1(t)$ — такая функция, что $\varepsilon_1(t) \geq \sqrt{\varepsilon(t)}$, $\varepsilon_1(t) \downarrow 0$, $\varepsilon_1(t)/\mu_1(t) \uparrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Тогда согласно

теореме 2 существуют последовательность номеров $\{n_k\}$, $n_k \uparrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, и функция $f_1 \in H_{q_1, \mu_1(t)}^{p_1}$ такие, что при всех достаточно больших k

$$1 - |z_{n_k}(f_1)| = \frac{1}{n_k} \log \frac{\varepsilon_1(1/n_k)}{\mu_1(1/n_k)} > \frac{1}{n_k} \log \frac{1}{\mu_2(1/n_k)},$$

что противоречит (47). Следствие доказано.

Обратим внимание на то, что в следствии 4 не исключается случай $q_1 = q_2$ и что при $p_i = q_i$, $m_i(t) = t^{\alpha_i+1}$, $i = 1, 2$, получается упоминавшийся выше результат Горовица о нулевых множествах пространств A_α^p .

В связи с доказанным возникают, например, такие вопросы. Каковы при $q_1 \neq q_2$ те условия на пару $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, при которых не выполняется соотношение (46)? Остается ли это соотношение справедливым при $q_1 = q_2$, $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ и каких-либо p_1 и p_2 ?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Шведенко, “Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре”, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, **23**, ВИНТИ, М., 1985, 3–124.
- [2] Л. Н. Бирюков, “Распределение нулей функций из классов $A_{p,-1,l}$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 5, 13–20.
- [3] Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, “О распределении нулей функций из пространств Бергмана с весом”, *Матем. заметки*, **86:1** (2009), 95–109.
- [4] Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, “Письмо в редакцию”, *Матем. заметки*, **94:2** (2013), 317–320.
- [5] А. А. Долгобородов, “О нулях функций из пространств Бергмана и некоторых близких к ним пространств”, *Матем. заметки*, **88:2** (2010), 201–216.
- [6] С. Horowitz, “Zeros of functions in the Bergman spaces”, *Duke Math. J.*, **41:4** (1974), 693–710.
- [7] Н. Hedenmalm, В. Korenblum, К. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Grad. Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [8] А. М. Седлецкий, “О проблеме Мюнца–Саса”, *Матем. заметки*, **39:1** (1986), 97–107.
- [9] А. М. Седлецкий, “О нулях аналитических функций классов A_α^p ”, *Актуальные вопросы теории функций*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1987, 24–29.

Е. А. Севастьянов

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: sevastianov.e.a@mail.ru

Поступило

18.10.2010

Исправленный вариант

02.09.2012

А. А. Долгобородов

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: kzander@mail.ru