Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Байдакова, Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 19–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:04:49

Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса

Н. В. Байдакова

Для интерполяционного процесса алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам m -симплекса для $m \geq 2$ найдена поточечная оценка снизу функции Лебега, аналогичная известной оценке для интерполяции на отрезке.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ – невырожденный m -симплекс, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ – барицентрические координаты точки симплекса (см., например, [1; гл. 2]), $u(\lambda) \in \Delta$ – точка симплекса с барицентрическими координатами λ . Введем множество мультииндексов

$$I = \{i \mid i \in \mathbb{Z}_+^{m+1}, |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{m+1} = n\}.$$

Пусть $\{a_i\}$ – узлы равномерной сетки на Δ , т.е. узлы, имеющие следующие барицентрические координаты:

$$a_i = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{m+1}}{n} \right), \quad i \in I. \quad (1)$$

Через $L_n^m(\lambda)$ будем обозначать функцию Лебега лагранжева процесса интерполяции функции $f \in C(\Delta)$ алгебраическими многочленами степени не выше n по совокупности переменных в узлах (1) (под степенью многочлена по совокупности переменных понимается наибольшая из степеней входящих в него мономов [2; § 51]), т.е. норму функционала в пространстве $C(\Delta)$, ставящего в соответствие каждой непрерывной функции f значение ее интерполяционного многочлена в точке $u(\lambda)$. Через L_n^m будем обозначать константу Лебега указанного интерполяционного процесса, т.е. норму оператора, действующего из $C(\Delta)$ в $C(\Delta)$, который каждой непрерывной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00347) и программы проектов исследований, выполняемых совместно в Уральском и Сибирском отделениях РАН (проект № 12-С-1-1018).

функции ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен. Известно, что $L_n^m = \max_{u(\lambda) \in \Delta} L_n^m(\lambda)$ (см., например, [3; гл. 5, § 1] или [4; гл. 3, § 1]).

Интерполяция по равномерным узлам часто используется в методе конечных элементов. Функция Лебега позволяет оценить отклонение полученного интерполяционного многочлена от истинного в точке, если значения функции в узлах интерполирования измерены с известной погрешностью. Кроме того, функция Лебега используется при исследовании поточечной сходимости интерполяционных процессов. Константа Лебега играет аналогичную роль при исследованиях влияния погрешности измерения значений функции и сходимости интерполяционных процессов в равномерной метрике (для более детального изучения данных вопросов в случае отрезка см., например, [3; гл. 5, § 1] или [4; гл. 3, § 1]; данные результаты без труда переносятся на случай m -симплекса).

Известно, что порядок роста констант Лебега по n в случае $m \geq 2$ совпадает [5] с одномерным случаем [6; § 3.2] и равен $O(2^n/(n \ln n))$.

Для функции Лебега в случае отрезка имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 [3; гл. 5, § 4, теорема 1]. *Для любого $x \in (0, 1)$, $x \neq 1/2$, найдется последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$, для которых выполняются неравенства*

$$L_{n_k}^1(x) \geq c(x) \frac{1}{\sqrt{n_k}} [\varphi(x)]^{n_k},$$

где $c(x) > 0$, $\varphi(x) = 2x^x(1-x)^{1-x} > 1$.

ТЕОРЕМА 2 (Рунк) [3; гл. 5, § 4, теорема 2]. *Для каждого $r > 0$ найдется такая постоянная A_r , что при $n \geq 2$*

$$\max_{|x-1/2| \leq r/\sqrt{n}} L_n^1(x) \leq A_r \ln n.$$

Отметим, что теоремы 1 и 2 формулируются в [3] для случая интерполяции на отрезке $[-1, 1]$ (соответственно $0 < |x| < 1$), поэтому там

$$\varphi(x) = (1+x)^{(1+x)/2}(1-x)^{(1-x)/2} > 1,$$

и максимум в теореме 2 берется по отрезку $[-r/\sqrt{n}, r/\sqrt{n}]$.

Промежуток $|x - 1/2| \leq r/\sqrt{n}$, о котором идет речь в теореме 2, стягивается в точку с ростом n , при этом число узлов интерполяции на этом промежутке – это $O(\sqrt{n})$, т.е. стремится к бесконечности. В частности, если число узлов на данном промежутке обозначить через k , то функция Лебега для всех точек промежутка будет оцениваться сверху величиной $C \ln k$, где C – некоторая положительная константа.

Введем множества последовательностей и функций одной переменной:

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha_n \mid \alpha_n > 0, \alpha_n \rightarrow \infty, \frac{\alpha_n}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right\},$$

$$\Psi = \left\{ \psi(\cdot) \mid \psi(\cdot) \in C[0, +\infty), \psi(t) > 0, \frac{\psi(t)}{a^t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ при любом } a > 1 \right\}.$$

Пусть $\mathcal{D}(\alpha_n)$ – множество невырожденных симплексов $\Delta' \subseteq \Delta \subset \mathbb{R}^m$, для которых

$$\min_s \left(\max_{u(\lambda) \in \Delta'} \lambda_s - \min_{u(\lambda) \in \Delta'} \lambda_s \right) \geq \frac{\alpha_n}{n},$$

где λ_s – барицентрическая координата точки $u(\lambda) \in \Delta'$ относительно вершин симплекса Δ , минимум берется по $s = 1, 2, \dots, m+1$.

В настоящей работе получен аналог теоремы 1 для m -симплекса ($m \geq 2$). Как следствие, доказано, что в случае m -симплекса при $m \geq 2$ нет аналога теоремы 2, если понимать его следующим образом: найдутся такие постоянная $C_m > 0$, последовательность $\beta_n \in \mathcal{A}$ и функция $\psi \in \Psi$, что при любом достаточно большом n найдется $\Delta' \in \mathcal{D}(\beta_n)$, что

$$\max_{u(\lambda) \in \Delta'} L_n^m(\lambda) \leq C_m \psi(\beta_n)$$

(в случае $m = 1$ согласно теореме 2 можно взять $\beta_n = \sqrt{n}$, $C_1 = 2A_{1/2}$, $\psi(t) = \ln t$).

2. Обозначения и предварительные сведения.

ЛЕММА 1 [3; гл. 5, § 4, лемма 2]. Для каждого $x \in (-1, 1)$ найдется такая последовательность натуральных чисел $n_k \rightarrow \infty$, что

$$\left| \sin \frac{\pi n_k}{2} (1 - x) \right| \geq \sin \frac{\pi |x|}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Сделаем замену $x = 2\lambda_0 - 1$. Тогда для каждого $\lambda_0 \in (0, 1)$ для той же последовательности чисел $n_k \rightarrow \infty$ неравенство (2) преобразуется к виду

$$|\sin \pi n_k \lambda_0| \geq |\cos \pi \lambda_0|. \quad (3)$$

ЛЕММА 2 [3; гл. 5, § 4, лемма 3]. Для любого натурального числа $m \geq 2$ и любого $\lambda_0 \in (0, 1/(m+1))$ выполняются неравенства

$$\varphi(\lambda_0) = 2\lambda_0^{\lambda_0} (1 - \lambda_0)^{1-\lambda_0} \geq 2 \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{m} \right)^{1/(m+1)} \geq \frac{2^{5/3}}{3} > 1, \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО воспроизводится для удобства читателя, поскольку в [3] лемма формулируется в несколько другом виде. Так как

$$(\ln \varphi(\lambda_0))' = \ln \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} < 0,$$

на $(0, 1/2)$, то функция $\varphi(\lambda_0)$ на $(0, 1/(m+1))$ убывает, откуда следует, что

$$\varphi(\lambda_0) \geq \varphi\left(\frac{1}{m+1}\right) \geq \varphi\left(\frac{1}{3}\right).$$

Подставляя $1/(m+1)$ и $1/3$ в φ , получаем соответствующие неравенства в (4).

Далее через $l_i(\lambda)$, $i \in I$, будем обозначать многочлены влияния, т.е. такие многочлены степени n по совокупности переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$, что если a_j , $j \in I$, — узел интерполяции (1), то

$$l_i(a_j) = \delta_i^j,$$

где $\delta_i^j = \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \dots \delta_{i_{m+1}}^{j_{m+1}}$, $\delta_{i_k}^{j_k}$ — символ Кронекера. Тогда (см., например, [3; гл. 5, § 1] или [4; гл. 3, § 1])

$$L_n^m(\lambda) = \sum_{i \in I} |l_i(\lambda)|. \quad (5)$$

Известно, что в точках, отличных от узлов интерполяции, многочлены влияния имеют следующий вид (см. [7] или [5]):

$$l_i(\lambda) = \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1) \cdots \Gamma(n\lambda_{m+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i_1 + 1) \cdots \Gamma(n\lambda_{m+1} - i_{m+1} + 1)} \cdot \frac{1}{i_1! i_2! \cdots i_{m+1}!}. \quad (6)$$

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА. Пусть $m \geq 2$, $u(\lambda) \in \Delta$, $\lambda_0 = \min_{s=1,2,\dots,m+1} \lambda_s \geq \alpha_n/n$, где $\alpha_n \in \mathcal{A}$, $c_m(\lambda_0)$ — положительная функция, зависящая только от λ_0 и m ; $\varphi(\lambda_0)$ — функция, определенная в теореме 1 (см. также (4)). Тогда найдется последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$, для которых выполняются неравенства

$$L_{n_k}^m(\lambda) \geq c_m(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+m/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу представления (5) для любого $i' \in I$ имеет место $L_n^m(\lambda) \geq |l_{i'}(\lambda)|$. Тогда, чтобы доказать теорему, достаточно указать для произвольной точки симплекса такое i' , для которого будет выполняться

$$L_{n_k}^m(\lambda) \geq |l_{i'}(\lambda)| \geq c_m(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+m/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k}. \quad (7)$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$ удовлетворяет условиям теоремы. Без ограничений общности можем считать, что $\lambda_{m+1} = \min_s \lambda_s$. Отметим, что $\alpha_n/n \leq \lambda_{m+1} \leq 1/(m+1)$. Выберем $i' = (i'_1, i'_2, \dots, i'_{m+1})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} i'_s &= \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{m+1})} + \varepsilon_s, & s &= 1, 2, \dots, m, \\ i'_{m+1} &= \frac{n}{2} + \varepsilon_{m+1}, & \varepsilon_{m+1} &= -\sum_{s=1}^m \varepsilon_s, \end{aligned} \quad (8)$$

где для $s = 1, 2, \dots, m$ числа $\varepsilon_s \in [0, 1)$ таковы, что $i'_s \in \mathbb{N}$. Докажем (7).

Используя (6) и формулу

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

т.е.

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(z) \sin \pi z}{\pi} = \frac{\Gamma(z+1) \sin \pi z}{\pi z},$$

преобразуем $l_{i'}$ к виду

$$l_{i'}(\lambda) = \frac{\Gamma(n\lambda_1 + 1) \cdots \Gamma(n\lambda_{m+1} + 1) \Gamma(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1} + 1)}{\Gamma(n\lambda_1 - i'_1 + 1) \cdots \Gamma(n\lambda_m - i'_m + 1) i'_1! i'_2! \cdots i'_{m+1}!} \cdot \frac{\sin \pi n \lambda_{m+1}}{\pi(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1})}. \quad (9)$$

Так как для любого s имеет место $n\lambda_s \geq n\lambda_{m+1} \geq \alpha_n$ то при указанном выборе i' аргументы всех Γ -функций в (9) (включая в их число все факториалы) стремятся к $+\infty$. Используя формулу Стирлинга для логарифма Γ -функции, получаем

$$\ln \left| l_{i'}(\lambda) \frac{\pi(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1})}{\sin \pi n \lambda_{m+1}} \right| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{s=1}^{m+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \sum_{s=1}^m (n\lambda_s - i'_s) \ln(n\lambda_s - i'_s) \\ &\quad + (i'_{m+1} - n\lambda_{m+1}) \ln(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1}) - \sum_{s=1}^{m+1} i'_s \ln i'_s, \\ \sigma_2 &= - \sum_{s=1}^{m+1} n\lambda_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+1} \ln n\lambda_s + \sum_{s=1}^m (n\lambda_s - i'_s) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \ln(n\lambda_s - i'_s) \\ &\quad - (i'_{m+1} - n\lambda_{m+1}) + \frac{1}{2} \ln(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1}) + \sum_{s=1}^{m+1} i'_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+1} \ln i'_s, \end{aligned}$$

$|\sigma_3|$ ограничен константой, не зависящей от n и от λ .

Договоримся далее писать $f_1(n, m, \lambda) \gtrsim f_2(n, m, \lambda)$, если для достаточно больших n найдется такое $\gamma(m)$, зависящее только от m (не обязательно положительное), что $f_1(n, m, \lambda) \geq f_2(n, m, \lambda) + \gamma(m)$. Оценим сумму σ_1 , подставив i'_s ($s = 1, 2, \dots, m+1$) и разбив ее на 7 слагаемых:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{s=1}^{m+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \sum_{s=1}^m \frac{n\lambda_s(1 - 2\lambda_{m+1})}{2(1 - \lambda_{m+1})} \ln \left(\frac{n\lambda_s(1 - 2\lambda_{m+1})}{2(1 - \lambda_{m+1})} - \varepsilon_s \right) \\ &\quad + \frac{n(1 - 2\lambda_{m+1})}{2} \ln \left(\frac{n(1 - 2\lambda_{m+1})}{2} + \varepsilon_{m+1} \right) \\ &\quad - \sum_{s=1}^m \frac{n\lambda_s}{2(1 - \lambda_{m+1})} \ln \left(\frac{n\lambda_s}{2(1 - \lambda_{m+1})} + \varepsilon_s \right) - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{m+1} \right) \\ &\quad + \sum_{s=1}^m \varepsilon_s \left(\ln \left(\frac{n\lambda_s(1 - 2\lambda_{m+1})}{2(1 - \lambda_{m+1})} - \varepsilon_s \right) - \ln \left(\frac{n\lambda_s}{2(1 - \lambda_{m+1})} + \varepsilon_s \right) \right) \\ &\quad + \varepsilon_{m+1} \left(\ln \left(\frac{n}{2} - n\lambda_{m+1} + \varepsilon_{m+1} \right) - \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{m+1} \right) \right). \end{aligned}$$

Во втором–пятом слагаемых все ε_s с точностью до знака " $\gtrsim$ " можно не учитывать. Покажем на примере пятого слагаемого:

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2} \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{m+1} \right) &= -\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2\varepsilon_{m+1}}{n} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \cdot \frac{2\varepsilon_{m+1}/n}{1 + 2\varepsilon_{m+1}\theta/n} \gtrsim -\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} \end{aligned}$$

(здесь $\theta \in (0, 1)$). Кроме того, шестое и седьмое слагаемые оцениваются константой, например

$$\varepsilon_{m+1} \left(\ln \left(\frac{n}{2} - n\lambda_{m+1} + \varepsilon_{m+1} \right) - \ln \left(\frac{n}{2} + \varepsilon_{m+1} \right) \right) = \varepsilon_{m+1} \ln \frac{1 - 2\lambda_{m+1} + 2\varepsilon_{m+1}/n}{1 + 2\varepsilon_{m+1}/n} \gtrsim 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\gtrsim \sum_{s=1}^{m+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2(1-\lambda_{m+1})} \sum_{s=1}^m \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s(1-2\lambda_{m+1})}{2(1-\lambda_{m+1})} \\ &\quad + \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2} \ln \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2} - \frac{n}{2(1-\lambda_{m+1})} \sum_{s=1}^m \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{m+1})} - \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} \\ &= \sum_{s=1}^{m+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2(1-\lambda_{m+1})} \sum_{s=1}^m \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{m+1})} \\ &\quad - \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2(1-\lambda_{m+1})} \ln(1-2\lambda_{m+1}) \sum_{s=1}^m \lambda_s + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln(1-2\lambda_{m+1}) \\ &\quad - n\lambda_{m+1} \ln \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2} - \frac{n}{2(1-\lambda_{m+1})} \sum_{s=1}^m \lambda_s \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{m+1})} - \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Сумма четвертого и восьмого слагаемых дает нуль. Складывая второе и седьмое слагаемые и заменяя $\sum_{s=1}^m \lambda_s$ на $(1-\lambda_{m+1})$ в третьем, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\gtrsim \sum_{s=1}^{m+1} n\lambda_s \ln n\lambda_s - n \left(\sum_{s=1}^m \lambda_s \ln n\lambda_s - \ln 2(1-\lambda_{m+1}) \sum_{s=1}^m \lambda_s \right) \\ &\quad - \frac{n}{2}(1-2\lambda_{m+1}) \ln(1-2\lambda_{m+1}) + \frac{n}{2} \ln(1-2\lambda_{m+1}) \\ &\quad - n\lambda_{m+1} \ln \frac{n}{2} - n\lambda_{m+1} \ln(1-2\lambda_{m+1}) \\ &= n\lambda_{m+1} \ln n\lambda_{m+1} + n(1-\lambda_{m+1}) \ln 2(1-\lambda_{m+1}) - n\lambda_{m+1} \ln \frac{n}{2} \\ &= n\lambda_{m+1} \ln 2\lambda_{m+1} + n(1-\lambda_{m+1}) \ln 2(1-\lambda_{m+1}) \\ &= n \ln 2^{\lambda_{m+1}} \lambda_{m+1}^{1-\lambda_{m+1}} 2^{1-\lambda_{m+1}} (1-\lambda_{m+1})^{1-\lambda_{m+1}} = n \ln 2^{\lambda_{m+1}} (1-\lambda_{m+1})^{1-\lambda_{m+1}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Перейдем к оценке σ_2 . Суммы первого и седьмого, третьего и пятого слагаемых равны нулю, так как $\sum_{s=1}^{m+1} \lambda_s = 1$ и $\sum_{s=1}^{m+1} i'_s = n$. Тогда

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+1} \ln n\lambda_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \ln(n\lambda_s - i'_s) + \frac{1}{2} \ln(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1}) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+1} \ln i'_s.$$

Далее подставляем (8). Так же, как и при оценке σ_1 , все ε_s с точностью до знака $\gtrsim$ можно не учитывать:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\gtrsim \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+1} \ln n\lambda_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \ln \frac{n\lambda_s(1-2\lambda_{m+1})}{2(1-\lambda_{m+1})} + \frac{1}{2} \ln \frac{n(1-2\lambda_{m+1})}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \ln \frac{n\lambda_s}{2(1-\lambda_{m+1})} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \ln 2(1 - \lambda_{m+1}) + \frac{1}{2} \ln n \lambda_{m+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \ln \frac{n \lambda_s (1 - 2\lambda_{m+1})}{2(1 - \lambda_{m+1})} \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - 2\lambda_{m+1}}{2} - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2 \\
&\gtrsim \frac{1}{2} \ln \alpha_n - \frac{m}{2} \ln n = \ln \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n^{m/2}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из (10)–(12), получаем

$$\ln \left| l_{i'}(\lambda) \frac{\pi(i'_{m+1} - n\lambda_{m+1})}{\sin \pi n \lambda_{m+1}} \right| \gtrsim \ln \frac{\sqrt{\alpha_n} (2\lambda_{m+1}^{\lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1})^{1-\lambda_{m+1}})^n}{n^{m/2}},$$

откуда следует

$$|l_{i'}(\lambda)| \geq C'_m \frac{\sqrt{\alpha_n} (\varphi(\lambda_{m+1}))^n}{n^{m/2} (i'_{m+1} - n\lambda_{m+1})} \cdot \frac{|\sin \pi n \lambda_{m+1}|}{\pi},$$

где положительное число C'_m зависит только от m . С учетом $i'_{m+1} - n\lambda_{m+1} \leq n$ получаем

$$|l_{i'}(\lambda)| \geq C_m \frac{\sqrt{\alpha_n} (\varphi(\lambda_{m+1}))^n}{n^{1+m/2}} \cdot \frac{|\sin \pi n \lambda_{m+1}|}{\pi}.$$

Полагая $\lambda_0 = \lambda_{m+1}$ и

$$c_m(\lambda_0) = C'_m |\cos \pi \lambda_0| / \pi, \tag{13}$$

принимая к рассмотрению только те $n = n_k$, для которых имеет место (3), получаем утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. *Каковы бы ни были постоянная $C_m > 0$, последовательность $\beta_n \in \mathcal{A}$, функция $\psi \in \Psi$ и натуральное число N , найдется натуральное число $n > N$ такое, что для любого $\Delta' \in \mathcal{D}(\beta_n)$ имеет место*

$$\max_{u(\lambda) \in \Delta'} L_n^m(\lambda) > C_m \psi(\beta_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выбраны некоторые $C_m > 0$, $\beta_n \in \mathcal{A}$, $\psi \in \Psi$. Пусть $\bar{\psi}(t) = \sup_{s \leq t} \psi(s)$. Отметим, что $\bar{\psi} \in \Psi$ и не убывает. Положим $\alpha_n = \ln \beta_n \in \mathcal{A}$. Тогда найдется $N' \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > N'$ для любого $\Delta' \in \mathcal{D}(\beta_n)$ найдется $u(\lambda) \in \Delta'$, для которого $\lambda_0 = \min_s \lambda_s \geq \alpha_n/n$. Согласно доказанной теореме из всех $n > N$ можно выделить бесконечную последовательность номеров n_k , для которых в указанной точке $u(\lambda)$ имеет место

$$L_{n_k}^m(\lambda) \geq c_m(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+m/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k}.$$

Применяя (4), (13) и то, что $\lambda_0 \leq 1/(m+1) \leq 1/3$, получаем

$$L_n^m(\lambda) \geq \frac{C'_m |\cos \pi \lambda_0|}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+m/2}} \left(\frac{2^{5/3}}{3} \right)^{n_k} \geq \frac{C'_m}{2\pi} \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+m/2}} \left(\frac{2^{5/3}}{3} \right)^{n_k} \frac{\psi(\beta_{n_k})}{\bar{\psi}(\beta_{n_k})} \geq C_m \psi(\beta_{n_k}),$$

начиная с некоторого k . Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Сьярле, *Метод конечных элементов для эллиптических задач*, Мир, М., 1980.
- [2] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Наука, М., 1971.
- [3] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1977.
- [4] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, М.–Л., 1949.
- [5] Н. В. Байдакова, “О порядке констант Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса”, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 814–831.
- [6] А. Х. Турецкий, *Теория интерполирования в задачах*, Высшэйшая школа, Минск, 1968.
- [7] R. A. Nicolaides, “On the class of finite elements generated by Lagrange interpolation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **9**:3 (1972), 435–445.

Н. В. Байдакова

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
E-mail: baidakova@imm.uran.ru

Поступило

27.10.2010