Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Антонов, Т. Г. Ножкина, О конечных группах с относительно большими централизаторами инвариантных подгрупп, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 643–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:30:54

О конечных группах с относительно большими централизаторами инвариантных подгрупп

В. А. Антонов, Т. Г. Ножкина

В работе исследуются конечные группы G , у которых любая инвариантная подгруппа A обладает свойством $|G : AC_G(A)|$ делит фиксированное простое число p .

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm8966

Если A – это произвольная подгруппа группы G , то $N_G(A) \geq A \cdot C_G(A)$, а фактор-группа $N_G(A)/A \cdot C_G(A)$ изоморфна подгруппе из $\text{Out}(G)$, т.е. индекс $|N_G(A) : A \cdot C_G(A)|$ равен порядку группы внешних автоморфизмов подгруппы A , индуцированных группой G .

В предлагаемой работе исследуется строение конечных групп G , в которых для любой инвариантной подгруппы A выполняется условие

$$|G : A \cdot C(A)| \quad \text{делит} \quad p, \quad (1)$$

где p – фиксированное для данной группы нечетное простое число. Для разрешимых групп получено полное описание таких групп.

В дальнейшем через $C(A)$ будем обозначать централизатор A во всей группе G , т.е. $C(A) = C_G(A)$.

Условимся (p, n) -группой называть такую конечную p -группу G , обладающую абелевой максимальной подгруппой T , у которой фактор-группа $G/Z(G)$ является группой максимального класса n .

ЛЕММА 1. Если $G = T \cdot \langle a \rangle$ является (p, n) -группой, то

- если $H \triangleleft G$, то либо $H \leq T$, либо $|G : H \cdot Z(G)| \leq p$;
- для любой подгруппы $A \leq G$ индекс $|N(A) : A \cdot C(A)|$ делит p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $H \not\leq T$, то можно считать, что $a \in H$. Тогда $G' = [a, T] \leq H$. Так как $G/Z(G)$ – группа максимального класса, то

$$|G/Z(G) : G' \cdot Z(G)/Z(G)| = p^2.$$

Учитывая, что $a \notin G' \cdot Z(G)$, получаем $|G : H \cdot Z(G)| \leq p$.

б) Пусть $A \leq G$. Если $A \leq T$, то $|G : A \cdot C(A)| \leq |G : T| = p$. Если же $A \not\leq T$, то снова можно считать, что $a \in A$. Так как $G/Z(G) = T/Z(G)\lambda(\langle a \rangle Z(G)/Z(G))$ является группой максимального класса, то

$$|N_{G/Z(G)}(A \cdot Z(G)/Z(G)) : A \cdot Z(G)/Z(G)| \leq p.$$

Но тогда и $|N(A) : A \cdot Z(G)| \leq p$.

В дальнейшем неоднократно будет использоваться следующее, достаточно очевидное утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть G – группа, в которой условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы A , $H \triangleleft G$. Тогда и в фактор-группе G/H условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A/H \triangleleft G/H$. Тогда имеем $A \triangleleft G$ и, следовательно, $|G : A \cdot C(A)|$ делит p . Остается заметить, что $C(A) \cdot H/H \leq C_{G/H}(A/H)$.

ТЕОРЕМА 1. В конечной нильпотентной группе G в том и только том случае условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы A , когда $G = H \times P$, подгруппа H абелева, а силовская p -подгруппа P группы G либо абелева, либо является (p, n) -группой для некоторого числа n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $G = H \times P$, где P – силовская p -подгруппа группы G . Если A – инвариантная максимальная абелева подгруппа группы G , то

$$A = (A \cap H) \times (A \cap P) \quad \text{и} \quad A = C(A) = C_H(A \cap H) \times C_P(A \cap P).$$

В частности, $A \cap H$ и $A \cap P$ – инвариантные в группе G максимальные абелевы подгруппы групп H и P , соответственно. Из условия (1) и взаимной простоты чисел $|H|$ и p следует, что

$$H = N_H(A \cap H) = (A \cap H) \cdot C_H(A \cap H) = A \cap H,$$

т.е. подгруппа H абелева.

Так как $C_P(A \cap P) = A \cap P$, то индекс $|P : A \cap P|$ должен делить p . Но тогда подгруппа P либо абелева, либо обладает максимальной абелевой подгруппой $A \cap P$ индекса p . Рассмотрим второй случай. Для простоты будем считать, что $G = P$ и $A \cap P = A$.

Пусть $G = A \cdot \langle x \rangle$, $x^p \in A$. Тогда $C(x) = \langle x \rangle \cdot Z(G)$ является максимальной абелевой подгруппой группы G . Если степень нильпотентности группы G равна двум, то $C(x)$ – инвариантная максимальная абелева подгруппа группы G . По доказанному должно выполняться равенство $|G : C(H)| = p$. Но тогда $|G/Z(G)| = p^2$ и G является $(p, 1)$ -группой.

Предположим теперь, что степень нильпотентности группы G больше двух, и $\gamma_i(G)$ – i -й член нижнего центрального ряда группы G . Обозначим через K минимальную нормальную подгруппу группы G , содержащую элемент x . Тогда $C(K) = Z(G)$, и из условия (1) следует, что $|G : K \cdot Z(G)| = p$. Так как подгруппа $G' \cdot \langle x \rangle$ инвариантна в G , то $H \leq G' \cdot \langle x \rangle$ и, следовательно, $|G : G' \cdot Z(G)| = p^2$. Из $A > G' \cdot Z(G)$

следует, что $A = \langle a \rangle \cdot (G' \cdot Z(G))$, где $a^p \in G' \cdot Z(G)$. Тогда $G' = [A, x] = \langle [a, x] \rangle \cdot \gamma_3(G)$ и из $[a, x]^p = [a^p, x] \pmod{\gamma_3(G)}$ следует, что $|G' : \gamma_3(G)| = p$. Если $\gamma_3(G) \neq 1$, то полагая $\gamma_2(G) = \langle b \rangle \cdot \gamma_3(G)$, аналогично получим $|\gamma_3(G) : \gamma_4(G)| = p$. Продолжая этот процесс, получим $|\gamma_i(G) : \gamma_{i+1}(G)| = p$ для любого $i = 2, 3, \dots, n$, где n – ступень нильпотентности фактор-группы $G/Z(G)$. Отсюда следует, что $G/Z(G)$ – группа максимального класса n , т.е. G является (p, n) -группой.

Достаточность следует из пункта б) леммы 1.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию ненильпотентных разрешимых групп, в которых условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы A . Докажем сначала следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = Q\lambda\langle x \rangle$, где Q – неабелева силовская q -подгруппа группы G , $|x| = p$, и элемент x действует на Q нетривиально. В группе G в том и только том случае для любой инвариантной в группе G подгруппы $A \leq Q$ выполняется равенство $A \cdot C_Q(A) = Q$, когда Q является центральным произведением таких подгрупп Q_i , $i = 1, 2, \dots, t$, что $Q_i/Z(Q)$ является минимальной x -допустимой подгруппой группы $Q/Z(Q)$, и если $f_i(x)$ – минимальный многочлен линейного оператора x пространства $Q_i/Z(Q)$ и $i \neq j$, то либо $f_i(x) \neq f_j(x)$, либо для любого $a_i \in Q_i \setminus Z(Q)$ выполняются равенства $[a_i, Q_i] = Q'_i = Q'_j$, и если $[a_i, b_i] = [a_j, b_j]$ для некоторых $a_i, b_i \in Q_i$ и $a_j, b_j \in Q_j$, то $[a_i, b_i^x] = [a_j, b_j^x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Условимся через $\overline{M}$ обозначать образ подмножества M группы G при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу $G/Z(Q)$.

Если A – абелева инвариантная в группе G подгруппа из Q , то из $Q = A \cdot C_Q(A) = C_Q(A)$ следует, что $A \leq Z(Q)$. Пусть $\overline{Q}_1$ – минимальная инвариантная в $\overline{G}$ подгруппа из $\overline{Q}$. Так как $Z(Q_1)$ абелева и инвариантна в G , то $Z(Q_1) = Z(Q)$, т.е. $Q_1 \cap C_Q(Q_1) = Z(Q)$. Из равенства $Q = Q_1 \cdot C_Q(Q_1)$ следует, что $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \times \overline{C_Q(Q_1)}$. Если $C_Q(Q_1) > Z(Q)$, то выбирая в качестве Q_2 минимальную инвариантную в группе $\overline{G}$ подгруппу из $C_Q(Q_1)$, получим

$$\overline{Q} = \overline{Q}_1 \times \overline{Q}_2 \times \overline{C_Q(Q_1 Q_2)}.$$

Продолжая этот процесс, получаем $Q = \prod_{i=1}^m Q_i$, где $[Q_i, Q_j] = 1$ при $i \neq j$, и $\overline{Q}_i$ – минимальная инвариантная в группе $\overline{G}$ подгруппа из $\overline{Q}$.

Из абелевости $\overline{Q}_i$ следует, что ступень нильпотентности группы Q равна двум. Но тогда любая подгруппа группы Q , содержащая $Z(Q)$, инвариантна в Q , т.е. каждая из групп $\overline{Q}_i$ является минимальной x -допустимой подгруппой группы $\overline{Q}$. Это означает, в частности, что $|\overline{Q}_i| = q^n$, где n – показатель числа q по модулю p .

Рассмотрим множители $\overline{Q}_i$ как n -мерные линейные пространства над полем $GF(q)$, а элемент x как линейный оператор этих пространств. Обозначим через $f_i(x)$ минимальный многочлен оператора x в пространстве $\overline{Q}_i$. Предположим, что $f_i(x) = f_j(x)$. Тогда для любого $c \in Q_i Q_j \setminus Z(Q)$ подгруппа $\langle \overline{c} \rangle^{(x)}$ является минимальной инвариантной в группе $\overline{G}$ подгруппой из $\overline{Q}$. Пусть $a_i \in Q_i \setminus Z(Q)$ и $a_j \in Q_j \setminus Z(Q)$. Положим $\overline{A} = \langle \overline{a_i a_j} \rangle^{(x)}$. Так как $A \triangleleft G$, то $A \cdot C_Q(A) = Q$ и, следовательно, $Q_i Q_j = A \cdot C_{Q_i Q_j}(A)$. Отметим, что если $c \in C(A) \cap Q_i$, то из $c \in C(Q_j)$ следует, что $c \in$

$C(\langle a_i \rangle^{(x)}) = Z(Q)$. Поэтому

$$C_{Q_i Q_j}(A) \cap Q_i = C_{Q_i Q_j}(A) \cap Q_j = Z(Q) \quad \text{и} \quad |\overline{C_{Q_i Q_j}(A)}| = |\overline{Q_i}| = |\overline{Q_j}| = q^n.$$

Но тогда

$$\overline{C_{Q_i Q_j}(A)} = \{\bar{a}_{ik} \bar{a}_{jk} \mid k = 1, 2, \dots, q^n\},$$

где $\{\bar{a}_{lk} \mid k = 1, 2, \dots, q^n\} = \overline{Q_l}$ для $l = i, j$.

Так как $[a_i a_j, a_{ik} a_{jk}] = 1$, то $[a_i, a_{ik}] = [a_{jk}, a_j]$, и из произвольности числа $k = 1, 2, \dots, q^n$ получаем $[a_i, Q_i] = [a_j, Q_j]$. Но тогда из произвольности элементов a_i и a_j следует, что

$$[Q_i, Q_i] = [a_j, Q_j] = [a_i, Q_i] = [Q_j, Q_j].$$

Если a_i, b_i, a_j, b_j такие элементы из Q_i и Q_j , соответственно, что $[a_i, b_i] = [a_j, b_j]$, то $[a_i a_j, b_i b_j^{-1}] = 1$ и из инвариантности $C(A)$, где $\bar{A} = \langle \bar{a}_i \bar{a}_j \rangle^{(x)}$ следует, что $(b_i b_j^{-1})^x \in C(a_i a_j)$. Отсюда $[a_i, b_i^x] = [a_j, b_j^x]$.

Достаточность. Пусть $Q = H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_r$, где H_j – произведение всех Q_i с одинаковым множителем $f_j(x)$, и A – инвариантная в группе G подгруппа из Q . Так как $A \cdot C_Q(A) = (A \cdot Z(Q)) \cdot C_Q(A \cdot Z(Q))$, можно считать, что $A \geq Z(Q)$. Выберем $a \in A \setminus Z(Q)$. Тогда $\bar{a} = \prod_{j=1}^r \bar{a}_j$, где $\bar{a}_j \in \overline{H_j}$. Предположим, что $\bar{a}_k \neq 1$ для некоторого k . И пусть $f(x) = \prod_{j \neq k} f_j(x)$. Тогда $\bar{a}_j^{f(x)} = 1$ для всех $j \neq k$, и $\bar{a}_k^{f(x)} \neq 1$. Так как A и H_k инвариантны в группе G , то

$$\bar{a}_k^{f(x)} = \bar{a}^{f(x)} \in \bar{A} \cap \overline{H_k}.$$

Но тогда и $a_k \in A \cap H_k$.

Из произвольности числа k и элемента $a \in A \setminus Z(Q)$ следует, что $A = \prod_{j=1}^r (A \cap H_j)$. Так как

$$C_Q(A \cap H_j) = C_{H_j}(A \cap H_j) \cdot \prod_{k \neq j} H_k,$$

для доказательства равенства $A \cdot C_Q(A) = Q$ достаточно доказать равенство

$$(A \cap H_j) \cdot C_{H_j}(A \cap H_j) = H_j.$$

Поэтому можно считать, что $Q = H_1$, т.е. $f_i(x) = f_j(x)$ для всех i и j . В этом случае, как уже отмечалось, для любого $c \in Q \setminus Z(Q)$ подгруппа $\langle \bar{c} \rangle^{(x)}$ является минимальной инвариантной в группе $\bar{G}$ подгруппой, и порядок ее равен p^n , где n – показатель числа q по модулю p .

Предположим сначала, что $\bar{A}$ – минимальная инвариантная в группе $\bar{G}$ подгруппа. Пусть $\bar{A} = \langle \bar{a} \rangle^{(x)}$. Если $A \leq \prod_{i=1}^k Q_i$, $k < m$, то для $i > k$ подгруппа Q_i лежит в $C(A)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $k = m$, т.е. $a = \prod_{i=1}^m a_i$, где $a_i \in Q_i \setminus Z(Q)$.

Если $m = 1$, то $A = Q$. Рассмотрим случай $m > 1$. Положим $c_i = a_1 a_i$ для $i = 2, \dots, m$. По условию для любого элемента $b_1 \in Q_1 \setminus C(a_1)$ найдется такой элемент $b_i \in Q_i$, что $[a_1, b_1] = [a_i, b_i^{-1}]$, т.е. $b_1 b_i \in C(c_i)$. Но тогда $[a_1, b_1^{x^r}] = [a_i, b_i^{-x^r}]$ для любого числа r . Это означает, что $\langle b_1 b_i \rangle^{(x)} \leq C(c_i)$. Заменив элемент $c_i = a_1 a_i$ на

$(b_1 b_i)^{x^r}$, аналогично получим, что $\langle a_1 a_i \rangle^{\langle x \rangle} \leq C((b_1 b_i)^{x^r})$ для любого числа r . Но тогда $[\langle c_i \rangle^{\langle x \rangle}, \langle b_1 b_i \rangle^{\langle x \rangle}] = 1$. Кроме того,

$$\langle b_1 b_i \rangle^{\langle x \rangle} \leq C\left(\prod_{k \notin \{1, i\}} \langle a_k \rangle^{\langle x \rangle}\right).$$

Это означает, что $\langle b_1 b_i \rangle^{\langle x \rangle} \leq C(A)$ и в силу произвольности $i > 1$

$$\overline{C_Q(A)} \geq \prod_{i=2}^m \overline{\langle b_1 b_i \rangle^{\langle x \rangle}},$$

т.е. $|\overline{C(A)}| \geq q^{(m-1)n}$. Но тогда из равенств $|\overline{Q}| = q^{mn}$, $|\overline{A}| = q^n$ и $A \cap C(A) = Z(G)$ получаем, что $A \cdot C_Q(A) = Q$,

Предположим теперь, что $\overline{A}$ – произвольная неединичная инвариантная в группе $\overline{G}$ подгруппа из $\overline{Q}$. Если $\overline{A_1}$ – минимальная инвариантная в $\overline{G}$ подгруппа из $\overline{A}$, то по уже доказанному $Q = A_1 \cdot C_Q(A_1)$ и $A = A_1 \cdot C_A(A_1)$. Если $C_A(A_1) \neq Z(Q)$, взяв в качестве $\overline{A_2}$ минимальную инвариантную в $\overline{G}$ подгруппу из $\overline{C_A(A_1)}$, получим $\overline{C_Q(A_1)} = \overline{A_2} \times \overline{C_Q(A_1 A_1)}$, т.е. $(A_1 A_2) \cdot C_Q(A_1 A_2) = Q$. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим равенство $A \cdot C_Q(A) = Q$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – группа из теоремы 2, и $A = Q_0 \lambda \langle x \rangle \triangleleft G$. Тогда выполнено $Q_0 \cdot Z(G) = Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как элемент x действует на $Q/Z(Q)$ регулярно, то имеем $C_Q(x) \leq Z(Q)$. Но тогда $C_Q(x) = Z(G)$, и из равенства $Q = [Q, x] \cdot C_Q(x)$ (см., например, следствие 0.4 из [1]) следует, что $[Q, x] \cdot Z(G) = Q$. Остается заметить, что $[Q, x] \leq Q_0$ в силу инвариантности подгруппы A .

ПРИМЕР. Приведем пример группы из теоремы 2. Пусть

$$Q_1 = [(\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle a_1 \rangle) \lambda \langle a_2 \rangle \lambda \langle a_3 \rangle \lambda \langle a_4 \rangle],$$

где

$$\begin{aligned} z_i &\in Z(Q_1), \quad z_i^5 = a_j^5 = 1 \quad \text{для всех } i, j, \\ [a_1, a_2] &= [a_2, a_3] = [a_3, a_4] = z_1, \quad [a_1, a_3] = [a_2, a_4] = z_2, \quad [a_1, a_4] = z_1 z_2^2, \\ Q_2 &= [(\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle \lambda \langle b_3 \rangle \lambda \langle b_4 \rangle], \end{aligned}$$

и определяющие отношения группы Q_2 получаются из определяющих отношений группы Q_1 заменой a_i на b_i ;

$$\begin{aligned} Q_3 &= [(\langle t_1 \rangle \times \langle t_2 \rangle \times \langle t_3 \rangle \times \langle t_4 \rangle \times \langle c_1 \rangle) \lambda \langle c_2 \rangle \lambda \langle c_3 \rangle \lambda \langle c_4 \rangle], \\ t_i &\in Z(Q_3), \quad t_i^5 = c_j^5 = 1 \quad \text{для всех } i, j, \\ [c_1, c_2] &= t_1^{-1} t_2^{-1}, \quad [c_1, c_3] = t_2, \quad [c_1, c_4] = t_1 t_2^{-2} t_3^{-2} t_4, \\ [c_2, c_3] &= t_2^{-1} t_3^{-1}, \quad [c_2, c_4] = t_3, \quad [c_3, c_4] = t_3^{-1} t_4^{-1}. \end{aligned}$$

Положим $G = (Q_1 \cdot Q_2 \times Q_3)\lambda\langle x \rangle$, где $Q_1 \cdot Q_2$ – центральное произведение групп Q_1 и Q_2 с объединенным центром $Z = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle$, $x^{13} = 1$, и действие элемента x на группах Q_i задано следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1^x &= z_1, & z_2^x &= z_2 \\ a_1^x &= a_2, & a_2^x &= a_3, & a_3^x &= a_4, & a_4^x &= a_1^{-1}a_2^2a_4^2, \\ b_1^x &= b_2, & b_2^x &= b_3, & b_3^x &= b_4, & b_4^x &= b_1^{-1}b_2^2b_4^2, \\ t_1^x &= t_2, & t_2^x &= t_3, & t_3^x &= t_4, & t_4^x &= t_1^{-1}t_2^2t_4^2, \\ c_1^x &= c_2, & c_2^x &= c_3, & c_3^x &= c_4, & c_4^x &= c_1^{-1}c_2^{-1}c_3c_4^{-1}. \end{aligned}$$

В этой группе $f_1(x) = f_2(x) = x^4 - 2x^3 - 2x + 1$, а $f_3(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$.

Заметим, что в приведенном примере элемент x действует на $Q'_1 = Q'_2$ тривиально. Несложно показать, что и в общем случае, если в группе из теоремы 2 $f_i(x) = f_j(x)$ для некоторых $i \neq j$, то x действует на $Q'_i = Q'_j$ тривиально. В самом деле, в этом случае для любого элемента $a \in Q_i \setminus Z(Q)$ выполняется равенство $Q'_i = [a, Q_i]$. Так как $Q'_i \triangleleft G$, и

$$|Q'_i| = |Q_i : C_{Q_i}(a)| < |Q_i/Z(Q)| = q^n,$$

то x действует Q'_i тривиально. Отсюда и из теоремы 3 работы [2] следует еще, что в этом случае число n четно, $q^{n/2} \equiv -1(p)$ и $|Q'_i| \leq q^{n/2}$.

ТЕОРЕМА 3. *В конечной разрешимой не нильпотентной группе G в том и только том случае условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы A , когда $G = H\lambda P$, силовская p -подгруппа P группы G либо абелева, либо является (p, n) -группой для некоторого числа n , $C_P(H)$ абелев и $|P : C_P(H)| = p$, холлова p' -подгруппа H нильпотентна ступени не выше двух, и если Q – неабелева силовская q -подгруппа из H , то $Q\lambda P/C_P(H)$ является группой из теоремы 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Обозначим через F подгруппу Фиттинга группы G . Тогда, как известно, $C(F) \leq F$ и, следовательно, $|G/F| = p$, т.е. $G = H\lambda P$, где H – нильпотентная холлова p' -подгруппа группы G . Из $|G/F| = p$ и нильпотентности F следует, что $|P : C_P(H)| = p$.

Если $A \triangleleft P$, то применяя лемму 2 к фактор-группе $G/H \cong P$, получаем, что $|P : A \cdot C_P(A)| \leq p$. В силу теоремы 1 подгруппа P либо абелева, либо является (p, n) -группой для некоторого числа n . Покажем, что $C_P(H)$ абелев. Это очевидно, если сама группа P абелева. Предположим, что $P = T \cdot \langle a \rangle$ является (p, n) -группой и $C_P(H)$ неабелев. Положим $P_0 = C_P(H) \cap T$. Тогда $|P : P_0| = p^2$. Если $P_0 \not\leq Z(P)$, то

$$C_P(P_0) = T \quad \text{и} \quad C_P(H \times P_0) = C_P(H) \cap T = P_0.$$

Но тогда для подгруппы $A = H \times P_0$ получаем

$$|N(A) : A \cdot C(A)| = |P : P_0| = p^2,$$

что противоречит условию (1).

Таким образом, $P_0 \leq Z(P)$, и, следовательно, $|P/Z(P)| = p^2$. Так как $C_P(H)$ неабелев, то $P = C_P(H) \cdot \langle z \rangle$, где $z \in Z(P)$ и $z^p \in C_P(H)$. Снова положим $P_0 = C_P(H) \cap T$. Тогда $C_P(P_0) = T$, и из

$$C_P(H \times P_0) = C_P(H) \cap T = P_0$$

снова получаем противоречие с условием (1). Таким образом, $C_P(H)$ абелев.

Пусть Q – силовская q -подгруппа из H . Тогда любая инвариантная в группе $Q\lambda P$ подгруппа из Q инвариантна во всей группе G . Если $P \leq C(Q)$, то из нильпотентности $Q \times P$ и теоремы 1 следует, что подгруппа Q абелева. Если же $C_P(Q) = C_P(H)$, то в силу условия (1) для любой инвариантной в группе $Q\lambda P$ подгруппы A из Q должно выполняться равенство $A \cdot C_Q(A) = Q$, и, следовательно, либо подгруппа Q абелева, либо фактор-группа $Q\lambda P/C_P(Q)$ является группой из теоремы 2.

Достаточность. Пусть $A \triangleleft G$. Тогда $A = H_0\lambda P_0$, где $H_0 \leq H$ и $P_0 \leq P$. Если $A \leq H$, то

$$\begin{aligned} A \cdot C(A) &= A \cdot C_H(A) \cdot C_P(A) = H \cdot C_P(A) \geq H \cdot C_P(H), \\ |G : A \cdot C(A)| &= |P : C_P(A)| \leq |P : C_P(H)| = p. \end{aligned}$$

Если же $A \not\leq P$, то $H \leq C(A)$, $N(A) = H \cdot N(A)$ и

$$|N(A) : A \cdot C(A)| = |P : A \cdot C_P(A)| \leq p.$$

Поэтому можно считать, что $H_0 \neq 1 \neq P_0$.

В силу леммы Фраттини [3; лемма 17.1.8], из инвариантности A следует, что $G = A \cdot N(P_0)$. Поэтому $H_0 \cdot C_H(P_0) = H$. Рассмотрим четыре случая в зависимости от строения подгрупп H и P .

1) H и P абелевы. Тогда

$$C(A) = C(H_0) \cap C(P_0) = H \cdot C_P(H_0) \cap C_H(P_0) \cdot P = C_H(P_0) \cdot C_P(H_0).$$

Так как $H_0 \cdot C_H(P_0) = H$ и

$$|P : C_P(H_0)| \leq |P : C_P(H)| = p,$$

индекс $|G : A \cdot C(A)|$ делит p .

2) H абелева, P является (p, n) -группой. Пусть $P = T \cdot \langle x \rangle$, где $T = C_P(H)$. Если $P_0 \leq T$, то $C(A) \geq H \cdot T$. А если $P_0 \not\leq T$, то в силу утверждения а) леммы 1 $|P : P_0 \cdot Z(P)| \leq p$. В любом случае $|G : A \cdot C(A)|$ делит p .

3) P абелева, H не абелева. Пусть $H = \prod_{i=1}^m Q_i$, где Q_i – силовская q_i -подгруппа группы H . Положим $A_i = (Q_i \cap A) \cdot P_0$. Так как

$$\begin{aligned} A &= \left[\prod_{i=1}^m (Q_i \cap A) \right] \lambda P_0, & C(A) &= \left[\prod_{i=1}^m C_{Q_i}(A_i) \right] \lambda C_P(H_0), \\ |P : P_0 \cdot C_P(H_0)| &\leq |P : C_P(H)| = p, \end{aligned}$$

нужно доказать только, что $(Q_i \cap A) \cdot C_{Q_i}(A_i) = Q_i$. Поэтому можно считать, что $m = 1$, т.е. $G/C_P(H)$ – группа из теоремы 2.

Если $P_0 \leq C_P(H)$, то $P_0 \leq Z(G)$. Тогда

$$\begin{aligned} C(A) &= C(H_0) \cap C(P_0) \geq C_H(H_0) \cdot C_P(H), \\ A \cdot C(A) &\geq H_0 \cdot C_H(H_0) \cdot P_0 \cdot C_P(H) = H \cdot C_P(H). \end{aligned}$$

Если же $P_0 \not\leq C_P(H)$, то в силу следствия из теоремы 2 $H_0 \cdot Z(G) \geq H$.

4) H и P неабелевы. В этом случае в обозначениях предыдущего пункта

$$C(A) = \left[\prod_{i=1}^m C_{Q_i}(A_i) \right] \lambda C_P(A).$$

Если $P_0 \leq T = C_P(A)$, то $|P : P_0 \cdot C_P(A)| \leq |P : T| = p$. А если $P_0 \not\leq T$, то в силу пункта а) леммы 1 $|P : P_0 \cdot Z(P)| \leq p$, и из $Z(P) \leq T \leq C(H_0)$ имеем $|P : P_0 \cdot C_P(A)| \leq p$. Это означает, что как и в пункте 3) достаточно рассмотреть случай $m = 1$.

Если $P_0 \leq T = C_P(H)$, то

$$C_H(A) = C_H(H_0) \cap C_H(P_0) = C_H(H_0).$$

Так как $H \cdot P/T$ является группой из теоремы 2, то $C_H(H_0) \cdot H_0 = H$.

Если же $P_0 \not\leq C_P(H)$, то снова в силу следствия из теоремы 2 $H_0 \cdot Z(G) \geq H$.

Теорема доказана.

Класс неразрешимых групп, в которых условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы A , трудно обозрим. Он включает в себя, в частности, все простые группы и их прямые произведения, группы с простой фактор-группой по центру, расширения простых групп с помощью группы порядка p , и т.д. Поэтому ограничимся доказательством следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – конечная неразрешимая группа, в которой условие (1) выполняется для любой инвариантной подгруппы A . Тогда индекс $|G : F^*(G)|$ делит p , и если E – слой группы G , то G/E является группой из теоремы 1 или 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F^*(G)$ – обобщенная подгруппа Фиттинга группы G . Так как $C(F^*(G)) \leq F^*(G)$ [1; лемма 10.1], то $|G : F^*(G)|$ делит p . Поэтому слой E группы G нетривиален. Из равенства $F^*(G) = F(G) \cdot E$ (там же) следует, что фактор-группа G/E разрешима. В силу леммы 2 G/E является группой из теоремы 1 или 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. М. Гаген, “Некоторые вопросы теории конечных групп”, *К теории конечных групп*, Новое в зарубежной науке. Математика, **16**, Мир, М., 1979, 13–97.
- [2] В. А. Антонов, С. Г. Чеканов, “Конечные p -группы с автоморфизмом специального вида”, *Алгебра и логика*, **45:4** (2006), 379–389.
- [3] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1996.

В. А. Антонов

Южно-уральский государственный университет,
г. Челябинск
E-mail: ava@susu.ac.ru

Поступило

28.09.2010

Исправленный вариант

09.08.2013

Т. Г. Ножкина

Южно-уральский государственный университет,
г. Челябинск
E-mail: tata@mail.ru