Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Галахов, Об одной модели нелинейного рассеяния,
Матем. заметки, 2012, том 92, выпуск 3, 368–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8968>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:05:42

Об одной модели нелинейного рассеяния

Е. И. Галахов

Получены условия существования и отсутствия глобальных решений систем нелинейных волновых уравнений с компактным носителем начальных данных и критическими нелинейностями, возникающих в теории рассеяния электромагнитных волн.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. В теории нелинейного рассеяния электромагнитных волн [1] возникает проблема разрушения решений задачи Коши для полулинейного волнового уравнения с неотрицательными начальными данными, имеющими компактный носитель:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + V(x)u = W(x, t)|u|^p & \text{в } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{в } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$W(x, t) \geq C(1 + |x|)^\alpha(1 + t)^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

с некоторыми $C \geq 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а также для систем таких уравнений.

Чтобы сформулировать достаточные условия разрушения решений задачи (1.1) с произвольными начальными данными из рассматриваемого класса за конечное время, требуется ввести критический показатель $p_c(N, \alpha, \beta)$ задачи (1.1) как положительный корень квадратного уравнения

$$(N - 1)p^2 - (N + 1 + 2\alpha + 2\beta)p - 2 = 0. \quad (1.3)$$

В соответствии с так называемой гипотезой Штраусса [1] при $\alpha = \beta = 0$, $V \equiv 0$ и $1 < p \leq p_c$ все решения задачи (1.1) с неотрицательными начальными данными, имеющими компактный носитель, разрушаются за конечное время. С другой стороны, при $p > p_c$ и $V \equiv 0$ для достаточно малых регулярных данных существуют глобальные решения.

Фактически результаты о разрушении решений при $1 < p < p_c$ и об их существовании при $p > p_c$ (далее мы имеем в виду, что $V \equiv 0$ и $\alpha = \beta = 0$, если не указано иное) были установлены Джоном [2] для $N = 3$ и Глэсси [3], [4] в случае $N = 2$. В [5] Георгиев, Линдبلاد и Согге доказали существование глобальных решений для малых

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 08-01-00441 и 09-01-12157), программой ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики", грантом Президента РФ (проект НШ-3810.2008.1) и программой Министерства образования и науки РФ "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.1/5328).

начальных данных при $p > p_c(N)$ и $N \geq 4$. Соответствующие результаты о разрушении решений для $1 < p < p_c(N)$ и $N \geq 4$ были получены Т. Сидерисом [6]. Критический случай с нулевым потенциалом рассмотрели Дж. Шеффер [7] при $N = 2, 3$ и Б. Иорданов и К. И. Чжан [8] при $N \geq 4$. В работе [9] те же авторы установили также результаты о разрушении решений для $N \geq 3$, $1 < p < p_c(N)$ и потенциалов V , удовлетворяющих естественным условиям убывания (см. (2.2) ниже). В [10] автор настоящей статьи обобщил их результат на критический случай $p = p_c(N)$ с $V \neq 0$ и $\alpha \neq 0$.

Для системы полулинейных волновых уравнений с начальными данными, имеющими компактный носитель:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + V_1(x)u = W_1(x, t)|v|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + V_2(x)v = W_2(x, t)|u|^q, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g_1(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(x, 0) = f_2(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g_2(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$W_i(x, t) \geq C_i(1 + |x|)^{\alpha_i}(1 + t)^{\beta_i}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \quad i = 1, 2, \quad (1.5)$$

с некоторыми $C_i \geq 0$ и $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, а V_i – неотрицательные потенциалы, удовлетворяющие естественным условиям убывания, важные теоремы об отсутствии глобальных решений были получены Георгиевым, Дель Санто и Митидиери [11], [12] в терминах параметров (p, q) при фиксированных значениях размерности N и α_i, β_i , $i = 1, 2$. Именно, при $\alpha_i = \beta_i = 0$ и $V_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, ими было показано, что разрушение решений со сколь угодно малыми начальными данными происходит, если $p, q > 1$ и при этом точка (p, q) лежит ниже так называемой *критической гиперболы*

$$\max \left\{ \frac{p + 2 + q^{-1}}{pq - 1}, \frac{q + 2 + p^{-1}}{pq - 1} \right\} = \frac{N - 1}{2} \quad (1.6)$$

(включая саму гиперболу в случае $N = 3$), а при (p, q) , лежащих выше этой гиперболы, для достаточно малых регулярных данных существуют глобальные решения. Отметим, что при $p = q$ условие (1.6) переходит в (1.3). Вопрос о существовании решений для (p, q) , удовлетворяющих (1.6) при $N > 3$, в [11], [12] был оставлен открытым.

В настоящей статье на основе техники преобразования Радона, развитой в [8], [9], и метода нелинейной емкости, предложенного Похожаевым в [13] (см. также [14]), разработан метод, позволяющий доказать отсутствие решений системы (1.6) в критическом случае с $\alpha_i = \beta_i = 0$, $i = 1, 2$, при $N > 3$, а также аналогичные результаты для более широкого класса $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_-$ и $V_i \neq 0$ ($i = 1, 2$), к которому техника [12], [11] напрямую неприменима. Показано, что в определенном классе систем полученные результаты являются оптимальными.

Статья состоит из четырех разделов, не считая введения. Во втором разделе приводится постановка задачи и формулировка основных результатов. Третий раздел посвящен доказательству некоторых вспомогательных априорных оценок решений.

В четвертом разделе доказывается теорема о достаточных условиях отсутствия глобальных решений рассматриваемых систем, а в пятом – об их существовании при невыполнении этих условий.

2. Формулировка задачи. Рассмотрим систему нелинейных волновых уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + V_1(x)u = W_1(x, t)|v|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + V_2(x)v = W_2(x, t)|u|^q, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g_1(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(x, 0) = f_2(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g_2(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь мы предполагаем, что $p, q > 1$,

$$f_1, g_1, f_2, g_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+ \cup \{0\}), \quad (2.2)$$

а потенциалы V_1, V_2 – локально непрерывные по Гёльдеру функции такие, что для некоторых $C, \delta > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$0 \leq V_i(x) \leq \frac{C}{1 + |x|^{2+\delta}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Относительно функций W_i , $i = 1, 2$, будем предполагать, что они удовлетворяют оценкам

$$W_i(x, t) \geq C_i(1 + |x|)^{\alpha_i}(1 + t)^{\beta_i}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.4)$$

с некоторыми $C_i \geq 0$ и $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Для таких систем справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $p, q > 1$. Предположим, что выполнены оценки (2.2), (2.3), а также соотношения $\alpha_i \leq 0$, $\beta_i \leq 0$, $i = 1, 2$,

$$\max \left\{ \frac{(\alpha_2 + \beta_2)p + (\alpha_1 + \beta_1) + p + 2 + q^{-1}}{pq - 1}, \frac{(\alpha_1 + \beta_1)q + (\alpha_2 + \beta_2) + q + 2 + p^{-1}}{pq - 1} \right\} \geq \frac{N - 1}{2}, \quad (2.5)$$

$$\max \left\{ \frac{\alpha_1 + \beta_1 + 1 + q^{-1}}{p - 1}, \frac{\alpha_2 + \beta_2 + 1 + p^{-1}}{q - 1} \right\} > \frac{N - 1}{2}. \quad (2.6)$$

Если $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, T])^2$ с $T \in (0, +\infty)$ – нетривиальное решение системы (2.1) такое, что $\text{supp}(u, v, u_t, v_t) \subset \{(x, t) : |x| \leq t + R\}$, то $T < +\infty$.

С другой стороны, имеет место следующий результат о существовании глобальных решений системы (2.1) в случае $V_1 \equiv V_2 \equiv 0$ и достаточно малых начальных

данных:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = W_1(x, t)|v|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = W_2(x, t)|u|^q, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varepsilon f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varepsilon g_1(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(x, 0) = \varepsilon f_2(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.7)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $N \geq 4$ и $p, q > 1$. Предположим, что выполнены условия (2.2)–(2.4) с $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и достаточно малым $\varepsilon > 0$, а также соотношения

$$\max \left\{ \frac{p+2+q^{-1}+\beta_1+\beta_2 p}{pq-1}, \frac{q+2+p^{-1}+\beta_1 q+\beta_2}{pq-1} \right\} < \frac{N-1}{2}, \quad (2.8)$$

$$\min \left\{ \frac{p-1}{pq-1}, \frac{q-1}{pq-1} \right\} \geq \frac{N-1}{2(N+1)}. \quad (2.9)$$

Тогда существует глобальное решение $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ системы (2.7).

При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ этот результат был доказан в [11].

3. Вспомогательные результаты. Для доказательства этих теорем нам потребуется ряд априорных оценок. Из них леммы 3.1 и 3.2 представляют собой непосредственные обобщения результатов Иорданова и Чжана [8], [9] на случай $\alpha, \beta \neq 0$, а лемма 3.3 доказывается с помощью подходящей модификации метода нелинейной емкости Митидиери и Похожаева (см. [14]).

Пусть V – локально непрерывная по Гёльдеру функция такая, что для некоторых $C, \delta > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$0 \leq V(x) \leq \frac{C}{1 + |x|^{2+\delta}}. \quad (3.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если выполнено условие (3.1), то существуют функции $\varphi_0, \varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ такие, что

$$\begin{cases} \Delta \varphi_0 - V \varphi_0 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^N, & c_0 < \varphi_0(x) \leq c_0^{-1}, \\ \Delta \varphi_1 - V \varphi_1 = \varphi_1 \text{ в } \mathbb{R}^N, & 0 < \varphi_1(x) \leq c_1(1 + |x|)^{-(N-1)/2} e^{|x|} \end{cases} \quad (3.2)$$

с некоторыми константами $c_0, c_1 > 0$ (см. лемму 3.1 в [8]). В частности, при $V \equiv 0$ можно взять

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \int_{S^{N-1}} e^{x \cdot \omega} d\omega.$$

ЛЕММА 3.1 (доказанная для $\alpha = \beta = 0$ в [8]). Пусть потенциал V , локально непрерывный по Гёльдеру, удовлетворяет (3.1). Пусть функции u_0, u_1 неотрицательны п.в. в $\mathbb{R}^N$ и $u_0 + u_1 \not\equiv 0$. Предположим, что u является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u - V(x)u - u_{tt} + W(x, t)|u|^p \leq 0 & \text{в } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{в } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.3)$$

где функция W удовлетворяет условию

$$W(x, t) \geq C(1 + |x|)^\alpha(1 + t)^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.4)$$

и для любого t верно

$$u(\cdot, t) \in H_0^1(B_{t+R}(0)).$$

Обозначим

$$F_0(t) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi_0(x) dx, \quad (3.5)$$

где φ_0 – функция из замечания 3.1. Тогда для всех $t \geq 0$ выполнено

$$\frac{d^2 F_0(t)}{dt^2} = \int_{\mathbb{R}^N} W(x, t) |u(x, t)|^p \varphi_0(x) dx \geq C(t + R)^{(N-1)(1-p/2)+\alpha+\beta} \quad (3.6)$$

с некоторым $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int W(x, t) |u|^p \varphi_0 dx \geq \frac{\left| \int u \psi_1 dx \right|^p}{\left(\int W^{1-p'} \varphi_0^{1-p'} \psi_1^{p'} dx \right)^{p-1}}, \quad (3.7)$$

где $\psi_1(x, t) := \varphi_1(x) e^{-t}$.

Из результатов [8] (лемма 2.3) следует, что $\int u \psi_1 dx \geq c > 0$. С учетом (3.4) и $r < 1 + r$ для доказательства (3.6) остается показать, что

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int W^{1-p'} \psi_1^{p'} dx \leq C e^{-p't} (1+t)^{-\beta/(p-1)} \int_0^{t+R} (1+r)^{(N-1)(1-p'/2)-\alpha/(p-1)} e^{p'r} dr \\ &\leq C(t+R)^{(N-1)(1-p'/2)-(\alpha+\beta)/(p-1)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Разбивая последний интеграл на два, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{(t+R)/2} (1+r)^{(N-1)(1-p'/2)-\alpha/(p-1)} e^{p'r} dr \\ &\leq (1+t+R)^{q_1} \int_0^{(t+R)/2} e^{p'r} dr \leq \frac{1}{p'} (1+t+R)^{q_1} e^{p'(t+R)/2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $q_1 = \max\{0, (N-1)(1-p'/2) - \alpha/(p-1)\}$, и

$$\begin{aligned} &\int_{(t+R)/2}^{t+R} (1+r)^{(N-1)(1-p'/2)-\alpha/(p-1)} e^{p'r} dr \\ &\leq 2^{-q_2} (1+t+R)^{(N-1)(1-p'/2)-\alpha/(p-1)} \int_{(t+R)/2}^{t+R} e^{p'r} dr \\ &\leq \frac{2^{-q_2}}{p'} (1+t+R)^{(N-1)(1-p'/2)-\alpha/(p-1)} e^{p'(t+R)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $q_2 = \min\{0, (N-1)(1-p'/2) - \alpha/(p-1)\}$. Из (3.9) и (3.10) следует (3.8), что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3.2 (доказанная для $\alpha = \beta = 0$ в [9]). Пусть $u(\cdot, t)$ – радиально симметричная функция такая, что $\text{supp } u(\cdot, t) \subset B_{t+R}(0)$ и

$$\int_0^{t+R} W(r, t) |u(r, t)|^p r^{N-1} dr < \infty$$

для любого $t \geq 0$ и некоторого $R > 0$, не зависящего от t , где W – радиально симметричная функция, удовлетворяющая (3.4). Тогда при достаточно больших $t > 0$ и $\alpha + \beta \geq (N-1)(p/2 - 1)$ справедлива оценка

$$\int_{(t-2R)/4}^{t+R} \frac{[R(|u|)(\rho, t)]^p}{(t - \rho + R)^{(N-1)p/2}} \rho^{(N-1)(1-p/2)+\alpha+\beta} d\rho \leq C \int_{\mathbb{R}^N} W(x, t) |u(x, t)|^p dx, \quad (3.11)$$

где

$$R(|u|)(\rho, t) = \mu(S^{N-1}) \int_{|\rho|}^{\infty} |u(r, t)| (r^2 - \rho^2)^{(N-3)/2} r dr \quad (3.12)$$

есть преобразование Радона функции $|u|$, а $\mu(A)$ – лебегова мера множества A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ введем преобразование

$$T(f)(\rho) = \frac{1}{|t - \rho + R|^{(N-1)/2}} \int_{\rho}^{t+R} f(r) |r - \rho|^{(N-3)/2} dr. \quad (3.13)$$

Как показано в [8] (теорема 1.1, шаг 4), имеет место оценка

$$\|T(f)\|_p \leq C \|f\|_p. \quad (3.14)$$

Применяя (3.14) к функции

$$f(r) = \begin{cases} W^{1/p}(r, t) |u(r, t)| r^{(N-1)/p}, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{t+R} \left[\frac{1}{(t - \rho + R)^{(N-1)/2}} \int_{\rho}^{t+R} W^{1/p} |u(r, t)| r^{(N-1)/p} (r - \rho)^{(N-3)/2} dr \right]^p d\rho \\ & \leq C \int_0^{\infty} W(r, t) |u(r, t)|^p r^{N-1} dr = C \int_{\mathbb{R}^N} W(x, t) |u(x, t)|^p dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Заметим, что при достаточно большом $\rho > 0$, $r \geq \rho$ и

$$\alpha + \beta \geq (N-1) \left(\frac{p}{2} - 1 \right)$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (1+r)^{-(\alpha+\beta)} & \geq \frac{1}{2} r^{-(\alpha+\beta)}, \\ r^{(N-1+\alpha+\beta)/p} & = r^{(N-1)/2} r^{(N-1+\alpha+\beta)/p - (N-1)/2} \geq r^{(N-1)/2} \rho^{(N-1+\alpha+\beta)/p - (N-1)/2}. \end{aligned}$$

Более того, при $t > 4R$ и $(t - 2R)/4 \leq \rho \leq r \leq t + R$ имеем

$$\frac{4\rho}{5} \leq t \leq 8\rho.$$

Следовательно, из (3.15) и (3.4) при достаточно больших t следует

$$\begin{aligned} & \int_{(t-2R)/4}^{t+R} \left[\frac{1}{(t-\rho+R)^{(N-1)/2}} \int_{\rho}^{t+R} |u(r,t)| r^{(N-1)/2} (r-\rho)^{(N-3)/2} dr \right]^p \\ & \quad \times \rho^{(N-1)(1-p/2)+\alpha+\beta} d\rho \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^N} W(x,t) |u(x,t)|^p dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.12) и того, что $\text{supp } u(\cdot, t) \subset B_{t+R}(0)$, вытекает, что

$$\begin{aligned} R(|u|)(\rho, t) &= c_N \int_{\rho}^{t+R} |u(r,t)| r (r^2 - \rho^2)^{(N-3)/2} dr \\ &= c_N \int_{\rho}^{t+R} |u(r,t)| r (r+\rho)^{(N-3)/2} (r-\rho)^{(N-3)/2} dr \\ &\leq c \int_{\rho}^{t+R} |u(r,t)| r^{(N-1)/2} (r-\rho)^{(N-3)/2} dr. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16), приходим к (3.11). Заметим, что в силу монотонности оператора преобразования Радона в левой части (3.11) можно заменить $|u|$ на u .

Далее введем обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= N+1 - \frac{(\alpha_2 + \beta_2)p + (\alpha_1 + \beta_1) + 2p(q+1)}{pq-1}, \\ \gamma_2 &:= N+1 - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)q + (\alpha_2 + \beta_2) + 2q(p+1)}{pq-1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. Пусть (u, v) – решение задачи (2.1), где

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} dx \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} dx \geq 0. \quad (3.18)$$

Тогда

$$\int_0^t \int_{|x| < 2t} |v(x, s)|^p dx ds \leq ct^{\gamma_1}, \quad \int_0^t \int_{|x| < 2t} |u(x, s)|^q dx ds \leq ct^{\gamma_2}. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод нелинейной емкости из [14] (теорема 57.1). А именно, умножим уравнения (2.1) на пробные функции

$$\varphi_t(x, s) = \varphi_1\left(\frac{|x|}{2t}\right) \varphi_1\left(\frac{s}{t}\right), \quad (3.20)$$

где $\varphi_1 = \xi_1^\lambda \in C_0^2(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}; [0, 1])$ с $\lambda > 2 \max\{p', q'\}$ и

$$\xi_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases} \quad (3.21)$$

Интегрирование по частям и неравенство Гёльдера приводят к

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \varphi_t dx ds \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi_t dx ds \right)^{1/q} \\ & \quad \times \left(\int_0^{2t} \int_{|x| < 4t} \left[\left(|\Delta \varphi_t| + \left| \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial t^2} \right| \right)^{q'} \varphi_t^{1-q'} + V_1^{q'} \varphi_t \right] W_2^{1-q'} dx ds \right)^{1/q'}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi_t dx ds \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \varphi_t dx ds \right)^{1/p} \\ & \quad \times \left(\int_0^{2t} \int_{|x| < 4t} \left[\left(|\Delta \varphi_t| + \left| \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial t^2} \right| \right)^{p'} \varphi_t^{1-p'} + V_2^{p'} \varphi_t \right] W_1^{1-p'} dx ds \right)^{1/p'}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

С учетом (2.3), (2.4) и (3.20) получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \varphi_t dx ds \leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi_t dx ds \right)^{1/q} \cdot t^{(N+1-2q'+(1-q')(\alpha_2+\beta_2))/q'}, \quad (3.24)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi_t dx ds \leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \varphi_t dx ds \right)^{1/p} \cdot t^{(N+1-2p'+(1-p')(\alpha_1+\beta_1))/p'}. \quad (3.25)$$

Теперь, подставляя (3.24) в (3.25) и наоборот и ограничивая интегрирование областью $B_{2t}(0) \times [0, t]$, где $\varphi_t(x, t) \equiv 1$ в силу (3.20)–(3.21), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{|x| < 2t} |v|^p dx ds \\ & \leq ct^{((N+1+2q'+(1-q')(\alpha_2+\beta_2))/q' + (N+1+2p'+(1-p')(\alpha_1+\beta_1))/(p'q))/(pq/(pq-1))}, \\ & \int_0^t \int_{|x| < 2t} |u|^q dx ds \\ & \leq ct^{((N+1+2p'+(1-p')(\alpha_1+\beta_1))/p' + (N+1+2q'+(1-q')(\alpha_2+\beta_2))/(q'p))/(pq/(pq-1))}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

что эквивалентно (3.19).

4. Доказательство теоремы 2.1. Далее мы используем метод Иорданова и Чжана [8], [9] с необходимыми изменениями.

Наше доказательство теоремы 2.1 основано на следующей априорной оценке решений системы (2.1).

ЛЕММА 4.1. При условиях теоремы 2.1 для достаточно больших $t > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{|x| < t+R} |v(x, s)|^p dx ds \geq c_1 t^{N+\alpha_1+\beta_1-(N-1)p/2}, \\ & \int_0^t \int_{|x| < t+R} |u(x, s)|^q dx ds \geq c_2 t^{N+\alpha_2+\beta_2-(N-1)q/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

с $c_1, c_2 > 0$.

Более того, в критическом случае (когда в (2.5) имеет место равенство) по крайней мере одну из констант c_1 и c_2 можно выбрать сколь угодно большой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (4.1) с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$ следуют из леммы 3.3 в результате двукратного интегрирования по t , если заметить, что $t + R$ (где R – радиус носителя начальных данных) эквивалентно t при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что этого уже достаточно для доказательства теоремы 2.1 в субкритическом случае (случае строгого неравенства в (2.5)).

Покажем, что в критическом случае хотя бы одну из констант можно выбрать сколь угодно большой.

Без потери общности предположим, что $p \geq q$. Тогда в силу леммы 3.1 имеем

$$R(v)(\rho, t) \geq \frac{c_1}{2} (t - \rho - R)^{N+\alpha_2+\beta_2-(N-1)q/2}. \quad (4.2)$$

Комбинируя эту оценку с (3.19), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x, t)|^p dx \geq C_R \int_{((1-\varepsilon)t-R)/2}^{(1-\varepsilon)t-R} \frac{\rho^{N-(N-1)p/2+\alpha_2+\beta_2-1}}{(t-\rho-R)^{(N-1)p/2-(N+\alpha_2+\beta_2)p+(N-1)pq/2}} d\rho. \quad (4.3)$$

Из условия (2.6) имеем

$$\frac{(N-1)p}{2} - (N+\alpha_2+\beta_2)p + \frac{(N-1)pq}{2} < 1,$$

вследствие чего

$$\begin{aligned} & \int_{((1-\varepsilon)t-R)/2}^{(1-\varepsilon)t-R} \frac{\rho^{N-1+\alpha_2+\beta_2-(N-1)p/2}}{(t-\rho-R)^{(N-1)p/2-(N+\alpha_2+\beta_2)p+(N-1)pq/2}} d\rho \\ & \geq \left[\frac{((1-\varepsilon)t-R)}{2} \right]^{N-1+\alpha_2+\beta_2-(N-1)p/2} \int_{((1-\varepsilon)t-R)/2}^{(1-\varepsilon)t-R} \frac{d\rho}{t-\rho-R} \\ & = \left[\frac{((1-\varepsilon)t-R)}{2} \right]^{N-1+\alpha_2+\beta_2-(N-1)p/2} \ln \frac{(1+\varepsilon)t-R}{2\varepsilon t}, \end{aligned}$$

так что правая часть (4.3) стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге мы получаем улучшенную нижнюю оценку

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_0(t)}{dt^2} &= \int_{\mathbb{R}^N} W(x, t) |v(x, t)|^p dx \\ &\geq \tilde{c}_R ((1-\varepsilon)t-R)^{(N-1)(1-p/2)+\alpha_2+\beta_2} \ln \frac{(1+\varepsilon)t-R}{2\varepsilon t}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Принимая во внимание, что $(N-1)(1-p/2)+\alpha_2+\beta_2 \geq 0$, $(1-\varepsilon)t > t/2$ при $0 < \varepsilon < 1/2$ и

$$\ln \frac{(1+\varepsilon)t-R}{2\varepsilon t} \rightarrow \ln \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

и оценивая снизу последний сомножитель в (4.4), после интегрирования по t получаем первую из оценок (4.1), где константу C можно сделать сколь угодно большой за счет выбора достаточно малого $\varepsilon > 0$. Вторая оценка (4.1) получается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.1. Из оценки (4.1) с учетом предыдущего доказательства получаем

$$F_0(t) \geq K_0 \ln \frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon} (t+R)^{N-(N-1)p/2+\alpha_2+\beta_2+1}, \quad (4.5)$$

где $K_0 > 0$ не зависит от t и ε для достаточно больших t (скажем, для $t \geq \tilde{t}_\varepsilon$).

Теперь выберем $\varepsilon \in (0, 1/2)$ таким малым, что

$$\ln \frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon} > \frac{C_1}{K_0}, \quad (4.6)$$

где C_1 – константа из (2.4). При $t \geq \max\{t_0, \tilde{t}_\varepsilon\}$, где t_0 – константа из леммы 3.3, и при условии (2.6) приходим к противоречию между оценками (3.19) и (4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если константы в V_1 или V_2 достаточно малы, в случае равенства в (2.5) (имеющем место, в частности, при $\alpha_i = \beta_i = 0$ ($i = 1, 2$), $p = q = 2$ и $N = 4$) глобальные решения системы (2.1) также отсутствуют.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Сопоставляя неравенства (2.2) и (3.19) с (4.5) и (4.1), нетрудно получить верхние оценки для времени жизни решений при любых значениях параметров, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1. Ранее такие оценки были получены другим способом в [15] для случая $\alpha_i = \beta_i = 0$ ($i = 1, 2$) и

$$1 < p, q \leq \frac{N+3}{N-1}, \quad (p, q) \neq \left(\frac{N+3}{N-1}, \frac{N+3}{N-1} \right).$$

5. Доказательство теоремы 2.2. Докажем теорему 2.2, следуя схеме работы Дель Санто, Георгиева и Митидиери [11; теорема 2]. Доказательство основано на следующей весовой оценке типа Штрихарца, полученной в [5].

ЛЕММА 5.1. Пусть $N \geq 3$ и u является гладким решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = h(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g_1(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.1)$$

где f_1, g_1 удовлетворяют условиям (2.2), $h \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$ и $\text{supp } h \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : |x| < t + R\}$.

Предположим, что параметры $\mu > \lambda > 1$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1, \quad \frac{N-3}{2} < \frac{N}{\mu} - \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$\|\tau_+^\alpha \tau_-^\beta u\|_{L^\mu(\mathbb{R}_+^{N+1})} \leq C \|\tau_+^\gamma \tau_-^\delta h\|_{L^\lambda(\mathbb{R}_+^{N+1})}, \quad (5.2)$$

где

$$\tau_+ := 1 + t + |x|, \quad \tau_- := 1 + |t - |x||,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – неотрицательные параметры такие, что

$$\alpha < \frac{N-1}{2} - \frac{N}{\mu},$$

$$\beta = \gamma - \alpha - 2 + \frac{N}{\lambda} - \frac{N+1}{\mu} + \min\left\{1, \delta + \frac{1}{\lambda}\right\}. \quad (5.3)$$

Обозначим через (u_0, v_0) решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \Delta v_0 = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \end{cases} \quad (5.4)$$

с начальными условиями вида

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varepsilon f_1(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varepsilon g_1(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(x, 0) = \varepsilon f_2(x), & \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.5)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а через (u_j, v_j) – решение системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta u_j = W_1 |v_{j-1}|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \Delta v_j = W_2 |u_{j-1}|^q, & (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \end{cases} \quad (5.6)$$

с такими же начальными условиями. Построим последовательности чисел $(\beta_j^{(1)})$, $(\beta_j^{(2)})$ такие, что для некоторых $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ последовательность $(\tau_+^{\alpha^{(1)}} \tau_-^{\beta_j^{(1)}} u_j, \tau_+^{\alpha^{(2)}} \tau_-^{\beta_j^{(2)}} v_j)$ сходится в $L^{\mu^{(1)}}(\mathbb{R}_+^{N+1}) \times L^{\mu^{(2)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Для этого выберем числа $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ и построим по индукции последовательности $(\beta_j^{(1)})$, $(\beta_j^{(2)})$ так, что для всех j , начиная с некоторого j_0 , выполнены соотношения $\beta_j^{(i)} = \beta_{j_0}^{(i)}, i = 1, 2$ и

$$\|\tau_+^{\alpha^{(1)}} \tau_-^{\beta_j^{(1)}} u_j\|_{L^{\mu^{(1)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} + \|\tau_+^{\alpha^{(2)}} \tau_-^{\beta_j^{(2)}} v_j\|_{L^{\mu^{(2)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} \leq C\varepsilon, \quad (5.7)$$

$$\|\tau_+^{\alpha^{(1)}} \tau_-^{\beta_j^{(1)}} (u_j - u_{j-1})\|_{L^{\mu^{(1)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} + \|\tau_+^{\alpha^{(2)}} \tau_-^{\beta_j^{(2)}} (v_j - v_{j-1})\|_{L^{\mu^{(2)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} \leq \frac{C\varepsilon}{2^j}. \quad (5.8)$$

Для простоты изложения ограничимся доказательством (5.7) (оценка (5.8) получается аналогично).

Базис индукции. Известно (см. [5]), что решение системы (5.4) с начальными условиями (5.5) удовлетворяет оценке

$$\|\tau_+^{\alpha^{(1)}} \tau_-^k u_0\|_{L^{\mu^{(1)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} + \|\tau_+^{\alpha^{(2)}} \tau_-^k v_0\|_{L^{\mu^{(2)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} \leq C\varepsilon, \quad (5.9)$$

где

$$\alpha^{(1)} = \frac{N-1}{2} - \frac{N}{\mu^{(1)}} - \sigma, \quad \alpha^{(2)} = \frac{N-1}{2} - \frac{N}{\mu^{(2)}} - \sigma,$$

k – сколь угодно большое целое число, а $\sigma > 0$ достаточно мало.

Шаг индукции. Используя предположение индукции, оценку (5.2) и условие (2.4) с $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, для решения системы (5.6) получаем

$$\begin{aligned}\|\tau_+^{\alpha^{(1)}} \tau_-^{\beta_j^{(1)}} u_j\|_{L^{\mu^{(1)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} &\leq C\varepsilon + C\varepsilon^p \|\tau_+^{\gamma^{(1)} + \beta_1 - p\alpha^{(2)}} \tau_-^{\delta^{(1)} - p\beta_j^{(2)}} v_{j-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})}, \\ \|\tau_+^{\alpha^{(2)}} \tau_-^{\beta_{j+1}^{(2)}} v_j\|_{L^{\mu^{(2)}}(\mathbb{R}_+^{N+1})} &\leq C\varepsilon + C\varepsilon^q \|\tau_+^{\gamma^{(2)} + \beta_2 - q\alpha^{(2)}} \tau_-^{\delta^{(2)} - q\beta_j^{(1)}} u_{j-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})}.\end{aligned}$$

Выберем значения параметров так, что

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)} &= p\alpha^{(2)} - \beta_1, & \delta^{(1)} &= p\beta_j^{(2)}, & \lambda^{(1)}p &= \mu^{(2)}, \\ \gamma^{(2)} &= q\alpha^{(1)} - \beta_2, & \delta^{(2)} &= q\beta_j^{(1)}, & \lambda^{(2)}q &= \mu^{(1)}.\end{aligned}$$

Учитывая соотношение (5.3), получаем с точностью до членов порядка σ

$$\begin{aligned}\beta_{j+1}^{(1)} &= p\frac{N-1}{2} - \beta_1 - \frac{N+3}{2} - \frac{1}{\mu^{(1)}} + \min\left\{1, p\beta_j^{(2)} + \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right\}, \\ \beta_{j+1}^{(2)} &= q\frac{N-1}{2} - \beta_2 - \frac{N+3}{2} - \frac{1}{\mu^{(2)}} + \min\left\{1, q\beta_j^{(1)} + \frac{1}{\lambda^{(2)}}\right\}, \\ \frac{1}{\lambda^{(1)}} &= \frac{p(q-1)}{pq-1}, & \frac{1}{\lambda^{(2)}} &= \frac{q(p-1)}{pq-1}, \\ \frac{1}{\mu^{(1)}} &= \frac{p-1}{pq-1}, & \frac{1}{\mu^{(2)}} &= \frac{q-1}{pq-1}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}A &= p\frac{N-1}{2} - \beta_1 - \frac{N+3}{2} - \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\lambda^{(1)}}, \\ B &= q\frac{N-1}{2} - \beta_2 - \frac{N+3}{2} - \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\lambda^{(2)}}, \\ a &= \frac{1}{\mu^{(1)}}, & b &= \frac{1}{\mu^{(2)}}.\end{aligned}$$

Стабилизация последовательностей $(\beta_j^{(1)})$, $(\beta_j^{(2)})$, начиная с некоторого j_0 , вытекает из следующей леммы (см. леммы 1.2, 1.4 в [11]).

ЛЕММА 5.2. Пусть $A > -a$ и $B > -b$. Пусть (x_j) , (y_j) – последовательности действительных чисел, определенные по формулам

$$\begin{aligned}x_0 &= A + a, & x_{j+1} &= A + \min\{a, px_j\}, \\ y_0 &= B + b, & y_{j+1} &= B + \min\{b, qy_j\}.\end{aligned}$$

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- а) $p(B+b) > a$ и $q(A+a) > b$;
- б) $p(B+b) > a$, $q(A+a) \leq b$ и $p(B+q(A+a)) > a$;
- с) $p(B+b) \leq a$, $q(A+a) > b$ и $q(A+p(B+b)) > b$.

Тогда последовательности (x_j) , (y_j) стационарны при $j \geq 1$.

Используя формулы для A , B , a и b , нетрудно видеть, что множество значений параметров, удовлетворяющих условиям а)–с), описывается соотношениями (2.8).

Неотрицательность $\beta_j^{(1)}$ и $\beta_j^{(2)}$ следует из неравенств (2.8) автоматически. Наконец, легко убедиться, что условие (2.9) эквивалентно

$$\frac{N-3}{2} < \min \left\{ \frac{N}{\mu^{(1)}} - \frac{1}{\lambda^{(1)}}, \frac{N}{\mu^{(2)}} - \frac{1}{\lambda^{(2)}} \right\}.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. A. Strauss, “Nonlinear scattering theory at low energy”, *J. Funct. Anal.*, **41**:1 (1981), 110–133.
- [2] F. John, “Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions”, *Manuscripta Math.*, **28**:1-3 (1979), 235–268.
- [3] R. T. Glassey, “Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations”, *Math. Z.*, **177**:3 (1981), 323–340.
- [4] R. T. Glassey, “Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions”, *Math. Z.*, **178**:2 (1981), 233–261.
- [5] V. Georgiev, H. Lindblad, S. D. Sogge, “Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations”, *Amer. J. Math.*, **119**:6 (1997), 1291–1319.
- [6] Th. C. Sideris, “Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions”, *J. Differential Equations*, **52**:3 (1984), 378–406.
- [7] J. Schaeffer, “The equation $u_{tt} - \delta u = |u|^p$ for the critical value of p ”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **101**:1-2 (1985), 31–44.
- [8] B. Yordanov, Q. S. Zhang, “Finite-time blowup for wave equations with a potential”, *SIAM J. Math. Anal.*, **36**:5 (2005), 1426–1433.
- [9] B. Yordanov, Q. S. Zhang, “Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions”, *J. Funct. Anal.*, **231**:2 (2006), 361–374.
- [10] Е. И. Галахов, “Разрушение решений некоторых волновых уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **45**:1 (2009), 60–68.
- [11] D. Del Santo, V. Georgiev, E. Mitidieri, “Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems”, *Geometrical Optics and Related Topics*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **32**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, 117–140.
- [12] Д. Дель Санто, Э. Митидиери, “Разрушение решений гиперболической системы: критический случай”, *Дифференц. уравнения*, **34**:9 (1998), 1155–1161.
- [13] С. И. Похожаев, “Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами”, *ДАН*, **357** (1997), 592–594.
- [14] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [15] V. Georgiev, H. Takamura, Z. Yi, “The life span of solutions to nonlinear systems of high dimensional wave equations”, *Nonlinear Anal.*, **64**:10 (2006), 2215–2250.

Е. И. Галахов

Российский университет дружбы народов

E-mail: galakhov@rambler.ru

Поступило

15.10.2010