Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, О перечислении помеченных связных бициклических и трициклических графов без мостов, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 308–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8969>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:12:25

О перечислении помеченных связных бициклических и трициклических графов без мостов

В. А. Воблый

Рассматриваются неориентированные простые связные графы. *Мостом* связного графа называется его ребро, после удаления которого граф становится несвязным. *Гладким графом* называется граф без висячих вершин. Очевидно, множество графов без мостов является подмножеством множества гладких графов.

Гладкие графы перечислил Райт [1]. Хенлон и Робинсон [2] перечислили как непомеченные, так и помеченные графы без мостов. Для производящей функции помеченных графов они получили функциональное уравнение, а также нелинейное уравнение с частными производными. Однако их формулы громоздки и не приведены к виду, удобному для вычисления. Вероятно, поэтому в знаменитой “Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей” Слоэна [3] есть только данные о числе непомеченных графов без мостов.

Целью данной работы было получение явных формул для числа помеченных связных бициклических и трициклических графов без мостов, а также соответствующей асимптотики для числа таких графов с большим числом вершин.

Напомним, что *точкой сочленения* связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным. *Блоком* называется связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [4; с. 200]. Под *унициклическим*, *бициклическим* и *трициклическим* графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным соответственно 1, 2 и 3. Пусть при $k \geq 0$ $u(n, n+k)$, $l(n, n+k)$, $v(n, n+k)$ – число помеченных блоков с n вершинами и $n+k$ ребрами, число помеченных связных графов без мостов с n вершинами и $n+k$ ребрами и число помеченных гладких графов с n вершинами и $n+k$ ребрами соответственно. Все такие графы имеют цикломатическое число, равное $k+1$. Обозначим через $U_k(w)$, $L_k(w)$ экспоненциальные производящие функции:

$$U_k(w) = \sum_{n=3}^{\infty} u(n, n+k) \frac{w^n}{n!}, \quad L_k(w) = \sum_{n=3}^{\infty} l(n, n+k) \frac{w^n}{n!}.$$

ТЕОРЕМА 1. Число помеченных связных бициклических графов без мостов с n вершинами при $n \geq 4$ равно

$$l(n, n+1) = \frac{n!}{24} (n^2 + 2n - 18).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как блок содержит как минимум один цикл, то бициклический граф без мостов является либо бициклическим блоком, либо графом с одной точкой сочленения, у которого каждый из двух блоков – простой цикл. Пусть $\bar{l}(n, n+1)$ – число бициклических графов без мостов, не являющихся блоками. Тогда

$$l(n, n+1) = u(n, n+1) + \bar{l}(n, n+1).$$

Райт [1] нашел, что при $n \geq 4$

$$u(n, n+1) = \frac{n!(n-3)(n+2)}{24}.$$

Пусть

$$\bar{L}_1(w) = \sum_{n=3}^{\infty} \bar{l}(n, n+1) \frac{w^n}{n!}.$$

Известно [4; с.201–202], что производящая функция корневых графов с непомеченным корнем получается дифференцированием производящей функции таких же некорневых графов со всеми помеченными вершинами. Поэтому имеем $\bar{L}_1(w) = (1/2)w(U'_0(w))^2$, где множитель w появляется для того, чтобы пометить точку сочленения после склейки корней двух блоков, а множитель $1/2$ – из-за возможности перестановки двух блоков. Поскольку производящая функция помеченных унициклических блоков совпадает с производящей функцией простых циклов, то

$$U_0(w) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2}(n-1)! \frac{w^n}{n!} = -\frac{1}{2} \ln(1-w) - \frac{w}{2} - \frac{w^2}{4} \quad \text{и} \quad U'_0(w) = \frac{w^2}{2(1-w)}.$$

С помощью известного разложения (см., например, [5; с.709])

$$(1-w)^{-m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} w^n \quad (1)$$

получим

$$\bar{L}_1(w) = \frac{w^5}{8(1-w)^2} = \frac{w^5}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} w^n = \frac{1}{8} \sum_{n=5}^{\infty} (n-4)w^n$$

и, следовательно, окончательно найдем

$$l(n, n+1) = n! \left(\frac{1}{24}(n-3)(n+2) + \frac{n-4}{8} \right) = \frac{n!}{24}(n^2 + 2n - 18).$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$l(n, n+1) \sim \frac{n^2}{24} n!.$$

Зададим на множестве помеченных гладких бициклических графов равномерное распределение. Пусть $P_1(n)$ – вероятность того, что помеченный гладкий бициклический граф с n вершинами не имеет мостов.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $n \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$P_1(n) \sim \frac{2}{5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P_1(n) = l(n, n+1)/v(n, n+1)$, с учетом формулы

$$v(n, n+1) = \frac{n!(n-3)(5n-8)}{48},$$

найденной в работе Райта [1], получим доказываемое асимптотическое равенство.

ТЕОРЕМА 2. Число помеченных связанных трициклических графов без мостов с n вершинами при $n \geq 5$ равно

$$l(n, n+2) = \frac{n!}{1152}(n^5 + 7n^4 - 59n^3 - 91n^2 + 550n + 360).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем множество помеченных трициклических графов без мостов на 4 непересекающихся подмножества. Тогда для соответствующих производящих функций имеем равенство

$$L_2(w) = Q_1(w) + Q_2(w) + Q_3(w) + Q_4(w).$$

Первое подмножество состоит из трициклических блоков. Поэтому $Q_1(w) = U_2(w)$. Райт [1] вывел формулу

$$u(n, n+2) = \frac{n!}{1152}(n-3)(n^4 + 4n^3 - 15n^2 - 46n - 40).$$

Второе подмножество состоит из графов с одной точкой сочленения, у которых каждый блок является простым циклом. Такие графы получаются путем склеивания непомеченных корней трех помеченных простых циклов. Поэтому $Q_2(w) = (1/6)w(U'_0(w))^3$. Здесь множитель w присутствует для пометки точки сочленения после склейки корней трех блоков, а множитель $1/6$ – из-за возможности перестановки блоков.

Третье подмножество состоит из графов с одной точкой сочленения, у которых один блок бициклический, а второй – простой цикл. Следовательно, имеем $Q_3(w) = wU'_1(w) \times U'_0(w)$. Эти графы получаются путем склеивания непомеченных корней двух помеченных блоков, а множитель w добавляется для пометки точки сочленения.

Четвертое подмножество состоит из графов с двумя точками сочленения, у которых каждый блок является простым циклом. Поэтому $Q_4(w) = (1/2)w^2U''_0(w)(U'_0(w))^2$. Здесь присутствует множитель $1/2$ – из-за возможности перестановки крайних блоков, множитель w^2 вводится для пометки двух точек сочленения после склейки корней блоков, а $U''_0(w)$ – производящая функция простого цикла с двумя непомеченными корнями.

Райт [1] нашел, что

$$U_1(w) = \frac{1}{12}(1-\theta)^4(\theta^{-3} + 2\theta^{-2}),$$

где $\theta = 1 - w$. Следовательно, получим

$$U_1(w) = \frac{w^4(3-2w)}{12(1-w)^3}, \quad U'_1(w) = \frac{4w^5 - 13w^4 + 12w^3}{12(1-w)^4}, \quad U''_0(w) = \frac{2w - w^2}{2(1-w)^2}.$$

Обозначим через $\bar{l}(n, n+2)$ – число трициклических графов без мостов, не являющихся блоками, и пусть

$$\bar{L}_2(w) = \sum_{n=3}^{\infty} \bar{l}(n, n+2) \frac{w^n}{n!}$$

– соответствующая производящая функция. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \bar{L}_2(w) &= Q_2(w) + Q_3(w) + Q_4(w) \\ &= \frac{w^7}{48(1-w)^3} + \frac{w^6(4w^2 - 13w + 12)}{24(1-w)^5} + \frac{w^7(2-w)}{16(1-w)^4} \\ &= \frac{w^7}{12(1-w)^3} + \frac{w^7}{16(1-w)^4} + \frac{w^6}{6(1-w)^3} + \frac{5w^6}{24(1-w)^4} + \frac{w^6}{8(1-w)^5}. \end{aligned}$$

С помощью разложения (1) найдем

$$\begin{aligned} \bar{L}_2(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12} \binom{n+2}{2} + \frac{1}{16} \binom{n+3}{3} \right) w^{n+7} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} \binom{n+2}{2} w^{n+6} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{24} \binom{n+3}{3} + \frac{1}{8} \binom{n+4}{4} \right) w^{n+6} = \sum_{n=7}^{\infty} \frac{(n-5)(n-6)}{24} w^n \\ &\quad + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{96} w^n + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(n-4)(n-5)}{12} w^n \\ &\quad + \sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{5(n-3)(n-4)(n-5)}{144} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{192} \right) w^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(3n^4 - 16n^3 - 45n^2 + 226n + 120)}{576} w^n.$$

Учитывая, что $l(n, n+2) = u(n, n+2) + \bar{l}(n, n+2)$, получим утверждение теоремы.

Из теоремы 2 очевидным образом вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. При $n \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$l(n, n+2) \sim \frac{n^5}{1152} n!.$$

Зададим на множестве помеченных гладких трициклических графов равномерное распределение. Пусть $P_2(n)$ – вероятность того, что помеченный гладкий трициклический граф с n вершинами не имеет мостов.

СЛЕДСТВИЕ 4. При $n \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$P_2(n) \sim \frac{1}{3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Райт [6] при $n \rightarrow \infty$ дает асимптотическую формулу $v(n, n+2) \sim (n^5/384)n!$. Так как $P_2(n) = l(n, n+2)/v(n, n+2)$, имеем доказываемую асимптотику.

В заключение отметим, что Дмитриев [7] другим способом перечислял помеченные 2-реберно-связные графы (графы без мостов), но не опубликовал свои результаты.

Автор благодарит рецензента за замечания и предложения по улучшению изложения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. M. Wright, *J. Graph Theory*, **2**:4 (1978), 299–305. [2] P. Hanlon, R. W. Robinson, *J. Combin. Theory Ser. B*, **33**:3 (1982), 276–305. [3] *The on-line encyclopedia of integer sequences*, <http://www.research.att.com/~njas/sequences>. [4] В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, МЦНМО, М., 2004. [5] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981. [6] E. M. Wright, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **91**:3-4 (1982), 205–212. [7] Е. Ф. Дмитриев, *Перечисление отмеченных графов с данными структурными свойствами*, Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ин-т матем. АН БССР, Минск, 1986.

В. А. Воблый

E-mail: vitvobl@yandex.ru

Поступило

12.07.2010

Исправленный вариант

13.05.2011