Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Емельянов, К вопросу о классификации интегрируемых по Биркгофу систем с потенциалом экспоненциального вида, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:43:50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ВИРКГОФУ СИСТЕМ С ПОТЕНЦИАЛОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВИДА

К. В. Емельянов

1. Системы с экспоненциальным взаимодействием. Под системой с экспоненциальным взаимодействием мы будем понимать гамильтонову систему с гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{1}{2}(p, p) + \sum_{i=1}^N \exp(a_i, q). \quad (1)$$

Здесь $p, q, a_i \in \mathbb{R}^n$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Набор векторов $\Delta = \{a_1 \dots a_N\}$ назовем *спектром* системы. Механическая модель, соответствующая такой системе, – это взаимодействующие между собой экспоненциальным образом частицы единичной массы. Впервые подобный гамильтониан (цепочка Тоды) возник в работе [1] при исследовании межатомных взаимодействий. Подобные системы возникают также в космологии [2] при исследовании космологических моделей.

Наличие среди систем (1) вполне интегрируемых впервые было замечено в результате компьютерного моделирования. Далее была установлена полная интегрируемость в случае, если спектр Δ представляет собой систему простых корней простой алгебры Ли [3]. В работе [4] были перечислены системы (1), для которых возможно существование полного набора независимых полиномиальных по импульсам интегралов с коэффициентами вида

$$\sum \lambda_k \exp(c_k, q), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

О таких системах будем говорить, что они *интегрируемы по Биркгофу*.

2. Интегрируемые по Биркгофу системы. Введем в рассмотрение схемы Дынкина для гамильтонианов (1). *Схема Дынкина* – граф, вершины которого представляют собой векторы из Δ . При этом каждые две вершины a_i и a_j соединены $4(a_i, a_j)^2 / (a_i, a_i)(a_j, a_j)$ ребрами и этим вершинам приписан вес, пропорциональный скалярному квадрату соответствующего вектора. Назовем систему *неприводимой*, если она не представляется в виде прямой суммы некоторых подсистем. Оказывается, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 [4]. *Схема Дынкина полной неприводимой гамильтоновой системы, интегрируемой по Биркгофу, изоморфна одной из схем, изображенных на рис. 1.*

Установлено [3], [5], [6], что из систем, перечисленных в теореме 1, интегрируемыми являются системы, соответствующие схемам (a)–(i). В случаях (j), (k) вопрос об интегрируемости остается открытым. Схемы (l), (m) получаются из (k) отбрасыванием двух вершин и приведены отдельно, поскольку соответствуют интегрируемым системам [3], [5].

Рис. 1. Возможно интегрируемые по Биркгофу системы

Схеме (j) отвечает гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(q_i - q_{i+1}) + \exp(-q_1 - q_2) + \exp q_n + \exp(2q_n), \quad n \geq 4. \quad (3)$$

В случае (k) мы имеем гамильтонову систему с двумя степенями свободы:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \exp q_1 + \exp\left(-\frac{q_1 + \sqrt{3}q_2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}q_2\right) + \exp(\sqrt{3}q_2) + \exp q_2. \quad (4)$$

Нашей задачей будет выяснить, являются ли соответствующие функциям Гамильтона (3) и (4) уравнения интегрируемыми по Биркгофу. Известно, что если в (3) отбросить одно из последних слагаемых, то мы получим вполне интегрируемую гамильтонову систему. В работе [4] выдвинуто предположение, что система с гамильтонианом (3) также интегрируема.

3. Метод Ковалевской. Первые интегралы. Положим $x_i = \exp(a_i, q)$ и преобразуем уравнения Гамильтона для (1) в систему уравнений с полиномиальными правыми частями. Для (3), например, при $n = 4$ получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= x_4 - x_1, & \dot{p}_2 &= x_4 + x_1 - x_2, & \dot{p}_3 &= x_2 - x_3, & \dot{p}_4 &= x_3 - x_5 - 2x_6, \\ \dot{x}_1 &= x_1(p_1 - p_2), & \dot{x}_2 &= x_2(p_2 - p_3), & \dot{x}_3 &= x_3(p_3 - p_4), \\ \dot{x}_4 &= x_4(-p_1 - p_2), & \dot{x}_5 &= x_5 p_4, & \dot{x}_6 &= 2x_6 p_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученная система уравнений квазиоднородна с весами $g_p = 1$ и $g_x = 2$ по переменным p и x соответственно. Квазиоднородность означает, что уравнения (5) инвариантны относительно преобразований $t \rightarrow \alpha^{-1}t$, $p \rightarrow \alpha^{g_p}p$, $x \rightarrow \alpha^{g_x}x$. Для исследования квазиоднородных систем в работе [7] предложен метод, являющийся развитием метода Ковалевской, примененного впервые в динамике твердого тела.

Дадим определение показателей Ковалевской. Пусть система ОДУ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

квазиоднородна с весами g_i . Рассмотрим частные решения $x_i = c_i t^{-g_i}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Показателями Ковалевской ρ_i называются собственные числа матрицы Ковалевской K :

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{c_1 \dots c_n} + g_i \delta_{ij}. \quad (7)$$

Показатели Ковалевской – ведущие степени разложения общего решения системы ОДУ в обобщенно-степенной ряд.

Следующее утверждение основывается на результате работы [8], включающем в себя теоремы из работы [7]. Мы приведем его без доказательства.

ТЕОРЕМА 2. Если квазиоднородная система ОДУ имеет первый интеграл F степени квазиоднородности m , то существуют неотрицательные целые числа $k_1, \dots, k_n$ такие, что

$$k_1 \rho_1 + \dots + k_n \rho_n = m, \quad (8)$$

причем $\sum k_j = \mu$, где μ – наименьший порядок ненулевой в точке $x = c$ производной этого полинома $R_{j_1 \dots j_\mu} = \partial^\mu F / \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\mu}$. Если переменные x выбраны так, что матрица Ковалевской имеет диагональный вид, то производные в точке $x = c$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} (m - \rho_{j_1} - \dots - \rho_{j_s}) R_{j_1 \dots j_s} = & \sum_{k=1}^n \left(R_{k \dots j_{s-1}} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_s}} + \dots + R_{j_1 \dots k} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{j_{s-1}} \partial x_{j_s}} + \dots \right. \\ & \left. + R_{k \dots j_\mu} \frac{\partial^{s+1-\mu} f_k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_{\mu+1}} \dots \partial x_{j_s}} + \dots + R_{j_1 \dots k} \frac{\partial^{s+1-\mu} f_k}{\partial x_{j_\mu} \partial x_{j_{\mu+1}} \dots \partial x_{j_s}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

С небольшими изменениями подобное утверждение можно сформулировать не только для первых интегралов, но и для других тензорных инвариантов, например полей симметрий.

Для интегрируемости уравнений с гамильтонианом (3) при $n = 4$ необходимо указать еще три первых интеграла. Вычисленные наборы показателей Ковалевской указывают, что возможные степени однородности дополнительных интегралов: 4, 6 и 8. Действительно, используя теорему 2, можно получить три полинома F_4, F_6, F_8 , являющиеся интегралами уравнений (5). Выражения для них слишком громоздки, и мы выпишем здесь только старшие однородные по p формы полиномов, чтобы показать их независимость:

$$\begin{aligned} F_4 &= p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 + p_4^4 + \dots, \\ F_6 &= p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2 p_4^2 + p_3^2 p_4^2 p_1^2 + p_4^2 p_1^2 p_2^2 + \dots, \\ F_8 &= p_1^8 + p_2^8 + p_3^8 + p_4^8 + \dots. \end{aligned} \quad (10)$$

Вместе с функцией Гамильтона H они образуют полный набор, так как они независимы и их попарные скобки Пуассона равны нулю. Отметим, что общее решение системы (5) однозначно на комплексной плоскости времени.

Аналогичный анализ для гамильтониана (4) показывает, что соответствующие уравнения не имеют дополнительного интеграла в виде полинома по переменным p, x . При этом $p(t)$ и $x(t)$ ветвятся как функции комплексного переменного. Ранее компьютерное моделирование показало стохастическое поведение в системе с гамильтонианом (4). Интегрируемыми будут только уравнения, получаемые отбрасыванием двух вершин в схеме (k), т.е. (l) и (m).

Итак, выдвинутое в [4] предположение об интегрируемости системы с графом (j) справедливо при $n = 4$ и скорее всего верно для любых n . Исходя из рассмотрения показателей Ковалевской, можно предположить, что для $n = 5$ степени дополнительных интегралов: 4, 6, 8, 10 и т.д. Если установить интегрируемость при произвольном n , то можно будет утверждать, что интегрируемыми по Биркгофу будут только те системы, схемы Дынкина которых изоморфны приведенным на рис. 1, исключая схему (k), и завершить проведенную в [4] классификацию.

Автор благодарит Д. В. Трещева за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
2. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
3. Bogoyavlensky O. I. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. № 3. P. 201–209.
4. Козлов В. В., Трещев Д. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 3. С. 537–556.
5. Adler M., van Moerbeke P. // Adv. Math. 1980. V. 38. P. 267–317.
6. Sklyanin E. K. Boundary Conditions for Integrable Quantum Systems. Preprint. L.: LOMI, 1986.
7. Yoshida H. // Celestial Mech. 1983. V. 31. P. 363–379.
8. Козлов В. В. // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 46–52.

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

E-mail: ke@uni.udm.ru

Поступило

12.09.1999