Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Кемер, Об идеалах групповой алгебры бесконечной симметрической группы над полем характеристики p , *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 417–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8970>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 04:36:44

Об идеалах групповой алгебры бесконечной симметрической группы над полем характеристики p

А. Р. Кемер

Мы докажем, что любой ненулевой идеал групповой алгебры бесконечной симметрической группы над полем ненулевой характеристики содержит косимметрические и симметрические элементы достаточно большого порядка. Пользуясь этим результатом, мы сведем вопрос о классификации идеалов групповой алгебры бесконечной симметрической группы к классификации некоторых подпространств тензорного квадрата конечнопорожденной свободной ассоциативной алгебры.

Библиография: 1 название.

1. Введение. Пусть S_∞ – бесконечная симметрическая группа финитных перестановок, действующих на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Если n – натуральное число, то через S_n обозначим подгруппу группы S_∞ , состоящую из всех перестановок σ таких, что $\sigma(i) = i$ для всех $i > n$. Группа S_n – симметрическая группа степени n . Обозначим также групповые алгебры групп S_∞ и S_n над полем F через FS_∞ и FS_n , соответственно.

В случае, когда характеристика основного поля F равна 0, используя описание идеалов алгебры FS_n , легко получить описание идеалов алгебры FS_∞ . Однако, в случае характеристики p вопрос о классификации, и даже вопрос об условии максимальности для идеалов, в настоящее время являются открытыми тяжелыми проблемами.

В этой работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Любой ненулевой идеал групповой алгебры FS_∞ над полем F ненулевой характеристики содержит элементы вида*

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma, \quad \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$$

для всех достаточно больших n .

Пусть $F\langle X \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем F , порожденная счетным множеством X . Если $u = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ – моном от переменных из множества X ,

σ – перестановка из S_n , $n \leq m$, то положим

$$u\sigma = x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)} x_{i_{n+1}} \cdots x_{i_m}.$$

Операция умножения на перестановки $\sigma \in S_n$ справа продолжается по линейности на однородные полиномы от переменных из X степени $m \geq n$. Приведем пример.

Пусть $u = x_1^2 x_2 x_3$, $\sigma = (1, 4)$. Тогда $u\sigma = x_3 x_1 x_2 x_1$.

Отметим, что операция умножения на перестановки справа является частичной операцией.

Однородный идеал алгебры $F\langle X \rangle$ назовем σ -идеалом, если этот идеал замкнут относительно линейных замен переменных

$$x_i := \sum_j \alpha_{i,j} x_j, \quad x_k \in X, \quad \alpha_{i,j} \in F,$$

и умножений на перестановки справа.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, P_n – пространство всех полилинейных полиномов алгебры $F\langle X \rangle$ степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$, $P = \bigcup_n P_n$. Определим отображение $\phi_n: P_n \rightarrow FS_n$ по формуле

$$\phi_n \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \right) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} \sigma.$$

Отображение ϕ_n является изоморфизмом пространств. Легко видеть, что, если U – σ -идеал, то множество

$$I = \bigcup_{n \geq 1} \phi_n(U \cap P_n) \quad (1)$$

является идеалом алгебры FS_{∞} . Также очевидно, что для любого идеала I алгебры FS_{∞} найдется σ -идеал U такой, что выполняется равенство (1). Таким образом, изучение идеалов алгебры FS_{∞} эквивалентно изучению полилинейных компонентов σ -идеалов.

Высказанная выше переформулировка проблемы классификации идеалов групповой алгебры бесконечной симметрической группы является общеизвестной и весьма банальной.

В настоящей работе, пользуясь основным результатом, мы приведем менее тривиальную переформулировку проблемы классификации. Мы сведем вопрос о классификации идеалов групповой алгебры бесконечной симметрической группы над полем F ненулевой характеристики p к классификации некоторых подпространств тензорного квадрата конечнопорожденной свободной ассоциативной алгебры.

2. Доказательство основной теоремы. Доказательство основной теоремы состоит из трех шагов.

Шаг 1. Пусть C_n – подмножество группы S_n , состоящее из всех циклов длины n . Очевидно, что подпространство FC_n алгебры FS_n имеет размерность $(n-1)!$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Если I – ненулевой идеал алгебры FS_{∞} , то $I \cap FC_n \neq 0$ для некоторого n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По сказанному выше найдется σ -идеал U такой, что выполняется равенство (1). Идеал U содержит ненулевой полином, который имеет вид

$$x_{k+1}x_k \cdots x_1 - \sum_{\sigma \in S_{k+1}, \sigma \neq \tau} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k+1)},$$

где $\alpha_\sigma \in F$, а перестановка $\tau \in S_{k+1}$ определяется равенствами: $\tau(i) = k - i + 2$, $i = 1, \dots, k+1$. Так как U — σ -идеал, то по модулю идеала U выполняется соотношение

$$v_0 x_{k+1} v_1 x_k \cdots v_k x_1 v_{k+1} = \sum_{\sigma \in S_{k+1}, \sigma \neq \tau} \alpha_\sigma v_0 x_{\sigma(1)} v_1 \cdots v_k x_{\sigma(k+1)} v_{k+1}, \quad (2)$$

где v_i — слова от переменных из множества X . Упорядочим множество X , считая, что $x_i < x_j$ при $i < j$, а слова от переменных из X упорядочим лексикографически.

Пусть $u = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ и в последовательности $i_1, \dots, i_n$ содержится убывающая подпоследовательность длины $k+1$. Тогда, пользуясь соотношением (2), мы сможем представить слово u в виде линейной комбинации меньших слов по модулю U . Применив соотношение (2) к получившимся словам и продолжив этот процесс, получим, что любое слово и, следовательно, любой полином из P_n представляются по модулю U в виде линейной комбинации слов $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ таких, что в последовательности $i_1, \dots, i_n$ не содержится убывающей подпоследовательности длины $k+1$. Такие слова называются *k-словами*. Легко доказать, что слово $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ является *k-словом* тогда и только тогда, когда последовательность $i_1, \dots, i_n$ можно разбить на k возрастающих подпоследовательностей. Этот результат является фольклорным, но мы, для полноты изложения, приведем доказательство этого утверждения.

Действительно, очевидно, что если последовательность $i_1, \dots, i_n$ можно разбить на k возрастающих подпоследовательностей, то она не содержит убывающей подпоследовательности длины $k+1$.

Обратно, предположим, что последовательность $\Lambda = (i_1, \dots, i_n)$ не содержит убывающей подпоследовательности длины $k+1$. Докажем, что последовательность Λ можно разбить на k возрастающих подпоследовательностей.

Элемент последовательности Λ назовем *экстремальным*, если он больше всех элементов с предыдущими номерами. Пусть Λ_1 подпоследовательность всех экстремальных элементов, $\Lambda'_1 = \Lambda \setminus \Lambda_1$. Подпоследовательность Λ_1 , очевидно, является возрастающей и удовлетворяет условию: для любого элемента $a \in \Lambda'_1$ найдется элемент $b \in \Lambda_1$ с меньшим номером такой, что $b > a$. С подпоследовательностью Λ'_1 поступаем точно так же: выберем подпоследовательность Λ_2 , состоящую из всех экстремальных элементов подпоследовательности Λ'_1 . Как и раньше, положим $\Lambda'_2 = \Lambda'_1 \setminus \Lambda_2$. Подпоследовательность Λ_2 является возрастающей и удовлетворяет условию: для любого элемента $a \in \Lambda'_2$ найдется элемент $b \in \Lambda_2$ с меньшим номером такой, что $b > a$. Продолжая этот процесс, в результате получим разбиение последовательности Λ на m возрастающих подпоследовательностей $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$, удовлетворяющих условию: найдется убывающая подпоследовательность такая, что ее первый элемент содержится в Λ_1 , второй в Λ_2 и т.д. Отсюда и из предположения следует, что $m \leq k$.

Пусть $N_k(n)$ – количество k -слов из P_n . В силу доказанного имеем очевидные неравенства

$$N_k(n) \leq \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} (C_n^{n_1, \dots, n_k})^2 \leq \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} (C_n^{n_1, \dots, n_k})^2 \leq k^{2n}.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем, что для некоторого достаточно большого n

$$N_k(n) \leq (n-1)! = \dim FC_n.$$

Отсюда следует, что для некоторого n

$$0 \neq U \cap \phi_n(FC_n) = \phi_n(I \cap FC_n),$$

т.е. $I \cap FC_n \neq 0$. Лемма доказана.

Шаг 2. Любой элемент пространства FC_n можно представить в виде

$$\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha_\sigma(1, \sigma(1) + 1, \dots, \sigma(n-1) + 1),$$

где $\alpha_\sigma \in F$. Определим отображение $\psi_n: FC_n \rightarrow P_{n-1}$ по формуле:

$$\psi_n \left(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha_\sigma(1, \sigma(1) + 1, \dots, \sigma(n-1) + 1) \right) = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}.$$

Напомним, идеал Γ алгебры $F\langle X \rangle$ называется T -идеалом, если этот идеал замкнут относительно любых замен переменных $x_i := g_i$, $g_i \in F\langle X \rangle$. Множество $P \cap \Gamma$ назовем *полилинейным компонентом идеала* Γ . Хорошо известно, что подмножество $V \subseteq P$ является полилинейным компонентом некоторого T -идеала тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

- 1) для любого n множество $V \cap P_n$ является подпространством пространства P_n ;
- 2) если $f(x_1, \dots, x_n) \in V \cap P_n$, $\tau \in S_n$, то

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) \in V;$$

- 3) если $f = f(x_1, \dots, x_n) \in V \cap P_n$, $i \leq n$, то

$$x_{n+1}f, fx_{n+1}, f|_{x_i=x_ix_{n+1}} \in V.$$

ЛЕММА 2. Для любого ненулевого идеала I алгебры FS_∞ найдется ненулевой T -идеал Γ алгебры $F\langle X \rangle$ такой, что для любого n

$$\psi_n(I \cap FC_n) = \Gamma \cap P_{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $V_{n-1} = \psi_n(I \cap FC_n)$,

$$V = \bigcup_{n \geq 1} V_n.$$

В силу сказанного нам достаточно доказать, что множество V удовлетворяет условиям 1–3, приведенным выше.

Условие 1, очевидно, выполняется. Для проверки остальных условий нам потребуются следующие легко проверяемые равенства в группе S_{n+1} .

Если $(1, i_1, \dots, i_n) \in C_{n+1}$, $\tau \in S_n$, то

$$\mu(1, i_1, \dots, i_n)\mu^{-1} = (1, \tau(i_1 - 1) + 1, \dots, \tau(i_n - 1) + 1), \quad (3)$$

где перестановка $\mu \in S_{n+1}$ определяется по формулам $\mu(1) = 1$, $\mu(i) = \tau(i - 1) + 1$ при $i > 1$;

$$\begin{aligned} (1, i_1, \dots, i_n)(1, n + 1) &= (1, n + 1, i_1, \dots, i_n), \\ (1, n + 1)(1, i_1, \dots, i_n) &= (1, i_1, \dots, i_n, n + 1), \\ (1, i_1, \dots, j, \dots, i_n)(j, n + 1) &= (1, i_1, \dots, j, n + 1, \dots, i_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n) \in V \cap P_n$, $\tau \in S_n$. Пользуясь формулой (3), получаем

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = \psi_{n+1}(\mu\psi_{n+1}^{-1}(f)\mu^{-1}) \in \psi_{n+1}(\mu I \mu^{-1} \cap \mu FC_{n+1} \mu^{-1}) \subseteq V,$$

поскольку I – идеал и $\mu FC_{n+1} \mu^{-1} = FC_{n+1}$.

Проверим условие $x_{n+1}f \in V$. Пользуясь первой формулой из группы формул (4), получаем

$$x_{n+1}f = \psi_{n+2}(\psi_{n+1}^{-1}(f)(1, n + 1)) \in \psi_{n+2}(I(1, n + 1) \cap FC_{n+1}(1, n + 1)) \subseteq V,$$

так как I – идеал и $FC_{n+1}(1, n + 1) \subseteq FC_{n+2}$. Остальные условия проверяются аналогично. Лемма доказана.

Шаг 3. По доказанному в работе [1] любой ненулевой T -идеал алгебры $F\langle X \rangle$ над полем ненулевой характеристики содержит полином вида

$$\sum_{\sigma \in S_m} x_1 x_{\sigma(1)+m} x_2 x_{\sigma(2)+m} \cdots x_m x_{\sigma(m)+m}.$$

Отсюда и из доказанного выше следует, что для некоторого m ненулевой идеал I алгебры FS_∞ содержит элемент

$$a = \sum_{\sigma \in S_m} (1, \sigma(1) + m, 2, \sigma(2) + m, \dots, m, \sigma(m) + m).$$

Тогда идеал I также содержит элемент

$$b = (1, m, m - 1, \dots, 2)a(1, m + 1)(2, m + 2) \cdots (m, 2m) \cdot \sum_{\tau \in S_m} (-1)^\tau \tau.$$

Пусть $\Lambda_1 = \{1, \dots, m\}$, $\Lambda_2 = \{m + 1, \dots, 2m\}$, G – подгруппа группы S_{2m} , состоящая из всех перестановок $\sigma \in S_{2m}$ таких, что $\sigma(\Lambda_i) = \Lambda_i$, $i = 1, 2$. Докажем равенство

$$b = \sum_{g \in G} (-1)^g g. \quad (5)$$

Действительно,

$$b = \sum_{\sigma, \tau \in S_m} (-1)^\tau \mu_{\sigma, \tau},$$

где

$$\mu_{\sigma,\tau} = (1, m, m-1, \dots, 2)(1, \sigma(1) + m, 2, \sigma(2) + m, \dots, m, \sigma(m) + m) \\ \times (1, m+1)(2, m+2) \cdots (m, 2m)\tau.$$

Если $i \in \Lambda_1$, то $\mu_{\sigma,\tau}(i) = \sigma^{-1}\tau(i)$. Если $j + m \in \Lambda_2$, то $\mu_{\sigma,\tau}(j + m) = \sigma(j) + m$.

Отсюда следует

- 1) $\mu_{\sigma,\tau} \in G$;
- 2) $\mu_{\sigma,\tau} = \mu_{\sigma_1,\tau_1}$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \sigma_1$, $\tau = \tau_1$ (пользуясь предыдущими равенствами имеем $\sigma = \sigma_1$, $\sigma^{-1}\tau(i) = \sigma_1^{-1}\tau_1(i)$, откуда получаем требуемое);
- 3) количество перестановок $\mu_{\sigma,\tau}$ равно порядку группы G ;
- 4) $(-1)^{\mu_{\sigma,\tau}} = (-1)^{\sigma^{-1}\tau} \cdot (-1)^\sigma = (-1)^\tau$.

Равенство (5) доказано.

Пусть $n \geq 2m$, $h_1, \dots, h_s$ представители всех правых смежных классов группы S_n по подгруппе G . Тогда имеем

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G, k \leq s} (-1)^g (-1)^{h_s} g h_s = \sum_{\sigma \in G} (-1)^g g \cdot \sum_1^s (-1)^{h_s} h_s \in I.$$

Включение

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sigma \in I$$

доказывается аналогично. Для этого достаточно в предыдущем тексте убрать все вхождения $(-1)^*$. Теорема доказана.

3. Идеалы алгебры FS_∞ и $H\sigma$ -подпространства. В этом разделе мы приведем конструкцию, которая позволяет свести проблему классификации идеалов алгебры FS_∞ к описанию некоторых подпространств тензорного квадрата конечно-порожденной свободной ассоциативной алгебры.

По основной теореме проблема описания идеалов алгебры FS_∞ сводится к описанию идеалов алгебры

$$FS_\infty/I_k,$$

где I_k – идеал, порожденный элементом

$$\sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^\sigma \sigma.$$

Пусть n – натуральное число, $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ – разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на k подмножеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$, которое мы будем называть k -разбиением, $f \in P_n$. Через f_Λ обозначим элемент свободной k -порожденной ассоциативной алгебры $F\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, который получается из f в результате подстановки: $x_i := x_j$, если $i \in \Lambda_j$.

Удивительно, но идеал I_k в случае ненулевой характеристики обладает следующим важным свойством, которым обладают эти идеалы в случае характеристики 0.

ЛЕММА 3. *Элемент $a \in FS_n$ принадлежит I_k тогда и только тогда, когда для любого k -разбиения Λ множества $\{1, \dots, n\}$*

$$\phi_n(a)_\Lambda = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Λ – произвольное k -разбиение множества $\{1, \dots, n\}$, то через S_Λ обозначим подгруппу Юнга, соответствующую этому разбиению:

$$S_\Lambda = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(\Lambda_i) = \Lambda_i \ \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Докажем сначала следующее утверждение:

Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, Λ – k -разбиение множества $\{1, \dots, n\}$. Равенство

$$\phi_n(\sigma)_\Lambda = \phi_n(\tau)_\Lambda \quad (6)$$

выполняется в том и только том случае, когда перестановки σ, τ принадлежат одному и тому же правому классу смежности группы S_n по подгруппе S_Λ .

Действительно, очевидно, что равенство (6) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $i \leq n$ существует однозначно определенное $j \leq k$ такое, что $\sigma(i), \tau(i) \in \Lambda_j$.

Предположим, что для любого $i \leq n$ существует однозначно определенное $j \leq k$ такое, что $\sigma(i), \tau(i) \in \Lambda_j$. Пусть $m \in \Lambda_j$. Положим $\tau^{-1}(m) = i$. Тогда $\tau(i) \in \Lambda_j$, $\sigma(i) \in \Lambda_j$; следовательно, $\sigma\tau^{-1}(\Lambda_j) \subseteq \Lambda_j$ для всех j , т.е. $\sigma\tau^{-1} \in S_\Lambda$. Обратно, пусть $\sigma\tau^{-1}(\Lambda_j) \subseteq \Lambda_j$ для всех j , и $i \leq n$, $\tau(i) = m \in \Lambda_j$. Тогда $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}(m) \in \Lambda_j$.

Из сказанного вытекает следующий критерий: элемент

$$a = \sum_{\sigma \in S_n} \gamma_\sigma \sigma$$

удовлетворяет условию: для любого k -разбиения Λ множества $\{1, \dots, n\}$

$$\phi_n(a)_\Lambda = 0$$

тогда и только тогда, когда для любого k -разбиения Λ и любого $\tau \in S_n$ выполняется равенство

$$\sum_{\tau \in S_\Lambda} \gamma_{\tau\sigma} = 0.$$

Теперь, пользуясь критерием, мы можем доказать лемму.

Если $a \in FS_n$ принадлежит I_k то, очевидно, для любого k -разбиения Λ множества $\{1, \dots, n\}$

$$\phi_n(a)_\Lambda = 0.$$

Предположим, что $a \in FS_n$, $a \notin I_k$,

$$f = \phi_n(a) = \sum_{\sigma \in S_n} \gamma_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Упорядочим слова от переменных $x_1, \dots, x_n$ лексикографически, считая, что $x_i < x_j$ при $i < j$. Пусть $u = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ – старшее слово полинома f . Мы можем считать, что слово u является наименьшим среди старших слов полиномов из смежного класса $f + \phi_n(I_k \cap FS_n)$. Тогда из доказательства леммы 1 следует, что u – k -слово. Это означает, что последовательность $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ можно разбить на k возрастающих подпоследовательностей. Множества членов этих подпоследовательностей обозначим через $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$. Положим также $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$.

Легко доказать, что слово $x_{\tau\sigma(1)} \cdots x_{\tau\sigma(n)}$, где $\tau \in S_\Lambda$, $\tau \neq 1$ больше слова u .

Действительно, пусть t – минимальный номер, удовлетворяющий условию: $\sigma(t) \neq \tau\sigma(t)$. По определению множества Λ_i найдется номер i такой, что $\sigma(t) \in \Lambda_i$. Тогда, так как $\tau \in S_\Lambda$, то $\tau\sigma(t) \in \Lambda_i$. Номер $\tau\sigma(t)$ можно представить в виде $\sigma(t_1)$. Если $t_1 < t$, то по определению номера t

$$\tau\sigma(t) = \sigma(t_1) = \tau\sigma(t_1),$$

что невозможно. Следовательно, $t_1 \geq t$. Отсюда, поскольку $\sigma(t_1), \sigma(t) \in \Lambda_i$, и подпоследовательность Λ_i является возрастающей, получаем требуемое заключение.

Из доказанного следует, что все коэффициенты $\gamma_{\tau\sigma}$, где $\tau \in S_\Lambda$, $\tau \neq 1$ равны 0. Тогда

$$\sum_{\tau \in S_\Lambda} \gamma_{\tau\sigma} = \gamma_\sigma \neq 0,$$

и по критерию $a \notin I_k$. Лемма доказана.

Зафиксируем натуральное число k и обозначим через $\rho(n)$ множество всех k -разбиений множества $\{1, \dots, n\}$. Определим гомоморфизм пространств

$$\nu_n: FS_n \rightarrow F\langle x_1, \dots, x_k \rangle \otimes F\langle x_1, \dots, x_k \rangle$$

по формуле

$$\nu_n(a) = \sum_{\Lambda \in \rho(n)} \phi_n(a)_\Lambda \otimes \phi_n(1)_\Lambda.$$

Отметим, что $\phi_n(1) = x_1 \cdots x_n$.

Пусть I – идеал алгебры FS_∞ , $I_k \subseteq I$. Положим

$$V_n = \nu_n(I \cap FS_n).$$

По лемме 3 идеал I однозначно определяется последовательностью V_n .

Последовательность множеств V_n обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Для любого n множество V_n является подпространством пространства $F\langle x_1, \dots, x_k \rangle \otimes F\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, которое содержится в подпространстве W_n , порожденным всеми элементами вида $u \otimes v$, где u, v – слова степени n от переменных $x_1, \dots, x_k$ и

$$\deg_{x_i} u = \deg_{x_i} v$$

для любого $i \leq k$.

Это свойство мы назовем *свойством однородности*.

На пространстве W_n определим структуру FS_n -бимодуля, положив

$$\sum_{\sigma, \tau \in S_n} \alpha_{\sigma, \tau} \sigma \left(\sum u_i \otimes v_i \right) \tau = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \alpha_{\sigma, \tau} \sum u_i \sigma \otimes v_i \tau,$$

где $\alpha_{\sigma, \tau} \in F$.

Свойство 2. Для любого n подпространство V_n является FS_n -подбимодулем бимодуля W_n .

Это свойство следует из следующей легко проверяемой формулы: если $\sigma, \tau \in S_n$, $a \in FS_n$, то

$$\nu_n(\tau a \sigma) = \sum_{\Lambda \in \rho(n)} (\phi_n(a)_\Lambda) \sigma \otimes (\phi_n(1)_\Lambda) \tau^{-1}.$$

Положим

$$c = \sum_{i=1}^k x_i \otimes x_i.$$

Свойство 3. Имеем $V_n c \subseteq V_{n+1}$.

Действительно, пусть $a \in I \cap FS_n$. Положим $g = \phi_n(a)$. Тогда $\phi_{n+1}(a) = gx_{n+1}$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \nu_{n+1}(a) &= \sum_{\Lambda \in \rho(n+1)} (gx_{n+1})_\Lambda \otimes (x_1 \cdots x_n x_{n+1})_\Lambda \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\Lambda \in \rho(n)} g_\Lambda x_i \otimes (x_1 \cdots x_n)_\Lambda x_i = \nu_n(a)c. \end{aligned}$$

Подпространство V алгебры $F\langle x_1, \dots, x_k \rangle \otimes F\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ назовем *Нσ-подпространством*, если оно порождается, как пространство, множествами $V_n = V \cap W_n$, $n = 1, 2, \dots$, а последовательность множеств V_n обладает свойствами 1–3.

Таким образом, мы свели проблему классификации идеалов групповой алгебры бесконечной симметрической группы к описанию Нσ-подпространств алгебры $F\langle x_1, \dots, x_k \rangle \otimes F\langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Заметим, что Нσ-подпространств больше, чем идеалов групповой алгебры бесконечной симметрической группы, однако, часто бывает, большее множество легче обозреть.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Kemer, “Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p ”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **5**:2 (1995), 189–197.

А. Р. Кемер
Ульяновский государственный университет
E-mail: kemer.alexander@gmail.com

Поступило
12.10.2010