Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Радченко, О приближении отображениями с неотрицательным якобианом, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 263–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8973>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:46:33

О приближении отображениями с неотрицательным якобианом

Д. В. Радченко

Рассматривается задача приближения непрерывных отображений гладкими отображениями с неотрицательным якобианом.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm8973

1. Введение и основные результаты. О следующей задаче я узнал от профессоров П. П. Забreyко, В. Г. Кротова и И. А. Шевчука.

ЗАДАЧА 1. *Каким условиям должно удовлетворять непрерывное отображение $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, чтобы его можно было как угодно хорошо приблизить непрерывно дифференцируемыми отображениями с неотрицательным якобианом?*

Мы рассмотрим следующую несколько более общую задачу.

ЗАДАЧА 1'. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой жордановой границей. Каким условиям должно удовлетворять непрерывное отображение $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, чтобы его можно было как угодно хорошо приблизить непрерывно дифференцируемыми отображениями с неотрицательным якобианом?*

Будем говорить, что отображение $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ является гладким класса C^n , если существует открытое множество $U \supset A$ и отображение $g \in C^n(U, \mathbb{R}^2)$ такие, что $f = g|_A$ (здесь $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Сначала заметим, что некоторые достаточные условия известны. Например, из результатов Франклина и Винера [1] следует, что каждое взаимно однозначное отображение можно приблизить даже отображениями класса C^∞ с ненулевым якобианом. Более того, мы покажем, что для этого достаточно, чтобы отображение было локально взаимно однозначным. А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть непрерывное отображение $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ локально взаимно однозначно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует отображение $p: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса C^∞ с ненулевым якобианом на $\bar{\Omega}$ такое, что $\|f - p\| < \varepsilon$.*

Тем не менее, ясно, что это условие не является необходимым для задачи 1'. Очевидный контрпример: $f \equiv \text{const}$.

Следовательно, нужно искать другое необходимое и достаточное условие. Скажем, в одномерном аналоге задачи 1 таким условием является условие “ f – неубывающая функция”.

С другой стороны, f является неубывающей функцией на отрезке $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда для любого интервала $U = (a, b) \subset [0, 1]$ и любого числа $p \in \mathbb{R}$ такого, что $p \in f(U) \setminus \{f(a), f(b)\}$, имеет место неравенство

$$\deg(f, U, p) \geq 0,$$

где $\deg(f, U, p)$ – так называемая *степень Брауэра* непрерывного отображения.

В отличие от понятия неубывающей функции, понятие степени Брауэра естественно переносится на многомерный случай (т.е. для отображений $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$).

Точное определение степени Брауэра для ограниченного открытого множества $U \subset \mathbb{R}^2$, непрерывного отображения $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и точки $p \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\partial U)$ см., например, в [2; с. 4–7].

В п. 2 докажем следующую несложную теорему 2.

ТЕОРЕМА 2. *Если непрерывное отображение $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно как угодно хорошо приблизить отображениями класса C^1 с неотрицательным якобианом, то для любого открытого подмножества $U \subset \Omega$ и любой точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ выполнено неравенство*

$$\deg(f, U, p) \geq 0.$$

К сожалению, нам не удалось доказать, что это необходимое условие является также и достаточным. Тем не менее, в п. 3 будет доказана теорема 3, которая, грубо говоря, утверждает, что достаточным является условие

$$\deg(f, U, p) > 0.$$

Прежде чем сформулировать теорему 3, напомним, что непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *легким* (англ. термин light), если для всех $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ вполне несвязно (т.е. не имеет связных подмножеств, за исключением подмножеств состоящих из одной точки).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть Δ – ограниченная область и $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ – легкое непрерывное отображение. Предположим, что для любого открытого множества U такого, что $\bar{U} \subset \Delta$ и любой точки $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$ выполнено неравенство*

$$\deg(f, U, p) > 0.$$

Тогда для любой области Ω такой, что $\bar{\Omega} \subset \Delta$, и любого $\varepsilon > 0$ существует отображение $g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса C^∞ с неотрицательным якобианом такое, что $\|f - g\|_{\bar{\Omega}} < \varepsilon$.

В п. 4 мы приведем отрицательный результат, который показывает различие между приближением отображениями с неотрицательным и строго положительным якобианами.

2. Доказательство необходимого условия. Начнем с некоторых обозначений. Пусть $|x|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^2$. Через $\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$ обозначим равномерную норму непрерывного отображения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $K \subset \mathbb{R}^2$ – компакт. Всегда, когда это не приведет к путанице, будем опускать индекс K и писать просто $\|f\|$. Для точки $x \in \mathbb{R}^2$ и числа $r > 0$ обозначим через $B_r(x)$ открытый шар радиуса r с центром в x . Для произвольного подмножества $A \subset \mathbb{R}^2$

через $O_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$ обозначим его открытую r -окрестность. Для множеств $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^2$ положим

$$d(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} |x - y|.$$

Кроме того, обозначим через $\text{diam}(F)$ диаметр множества $F \subset \mathbb{R}^2$, т.е.

$$\text{diam}(F) = \sup_{x, y \in F} |x - y|.$$

Якобиан гладкого отображения $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ в точке $x \in U$ будем обозначать через $J_f(x)$.

Для удобства будем отождествлять $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ гладкие (аналитические, комплексно аналитические) отображения на A всегда будем считать заданными на некоторой окрестности $U \supset A$.

Напомним, что степень Брауэра обладает следующими свойствами (см. [2; теорема 1.2.6, теорема 1.2.18]):

- (i) если отображение $f \in C^1$ и p – его регулярное значение (т.е. для любого $x \in f^{-1}(p)$ выполнено $J_f(x) \neq 0$), то

$$\deg(f, U, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sgn } J_f(x);$$

- (ii) если задано другое непрерывное отображение $g: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что

$$\|g - f\|_{\partial U} < \frac{d(p, f(\partial U))}{2},$$

то

$$\deg(f, U, p) = \deg(g, U, p);$$

- (iii) при фиксированном непрерывном отображении f значение $\deg(f, U, p)$ зависит только от компоненты связности $\mathbb{R}^2 \setminus f(\partial U)$, в которой лежит точка p , причем

$$\deg(f, U, p) = 0, \quad \text{если } p \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\bar{U}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем открытое множество $U \subset \Omega$ и произвольную точку $p \in f(U) \setminus f(\partial U)$. Положим $\varepsilon = d(p, f(\partial U))/2$. Пусть $g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – отображение класса C^1 с неотрицательным якобианом такое, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Тогда согласно свойству (ii) имеет место равенство $\deg(f, U, p) = \deg(g, U, p)$. Поскольку множество регулярных значений отображения класса C^1 плотно (см., например, [3; с. 95]), то существует регулярное значение p' в той же компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus g(\partial U)$, что и p , откуда в силу (iii) выполнено равенство $\deg(g, U, p) = \deg(g, U, p')$. Но тогда из (i) следует, что $\deg(g, U, p') \geq 0$. Значит, и $\deg(f, U, p) \geq 0$.

3. Доказательство достаточных условий. Напомним некоторые определения из кусочно-линейной топологии (заметим, что они несколько отличаются от общепринятых). *Плоским симплициальным комплексом* (далее просто *комплекс*) $\mathcal{K}$ называется конечное множество замкнутых треугольников в $\mathbb{R}^2$ такое, что любые два треугольника $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ пересекаются по общему ребру, общей вершине, либо не пересекаются. Для комплекса $\mathcal{K}$ обозначим через $|\mathcal{K}|$ объединение всех его треугольников. Комплекс $\mathcal{L}$ называется *подразделением* комплекса $\mathcal{K}$, если каждый

треугольник из $\mathcal{L}$ содержится в некотором треугольнике из $\mathcal{K}$ и $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$. Далее будем рассматривать только такие комплексы $\mathcal{K}$, что внутренность множества $|\mathcal{K}|$ является связным множеством.

Отображение $f: |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *линейным*, если его сужение на каждый треугольник $\mathcal{K}$ является линейным отображением. Отображение $f: |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *кусочно-линейным*, если оно линейно на некотором подразделении $\mathcal{K}$.

Для доказательства теоремы 1 приведем несколько вспомогательных результатов.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{K}$ – плоский симплицальный комплекс, $f: |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ – локально взаимно однозначное непрерывное отображение. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует локально взаимно однозначное кусочно-линейное отображение $h: |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $\|f - h\| < \varepsilon$.

Доказательство этой леммы подобно доказательству теоремы 6.3 из монографии [4], но для полноты мы приведем его в приложении.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho > 0$, C – окружность радиуса $R > \rho$ с центром в 0 и отображение $\psi: O_\rho(C) \rightarrow \mathbb{R}^2$ – диффеоморфизм класса C^k . Предположим, что $0 \notin \psi(O_\rho(C))$ и что в полярных координатах (r, φ) , где отображение записывается как $\psi(r, \varphi) = (\psi^r(r, \varphi), \psi^\varphi(r, \varphi))$, выполнены неравенства $\partial\psi^r/\partial r > 0$, $\partial\psi^\varphi/\partial\varphi > 0$. Тогда для некоторого $\varepsilon \in (0, \rho)$ существует $\Psi: B_R(0) \cup O_\varepsilon(C) \rightarrow \mathbb{R}^2$ – диффеоморфизм класса C^k такой, что

$$\psi|_{O_\varepsilon(C)} = \Psi|_{O_\varepsilon(C)}.$$

Чтобы не прерывать изложение, доказательство этой леммы мы также приведем в приложении.

ЛЕММА 3. Пусть $A, B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейные отображения. Предположим, что $\det(A) > 0$, $\det(B) > 0$ и существует ненулевой вектор x такой, что $Ax = Bx$. Тогда для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ выполнено неравенство $\det(\alpha A + \beta B) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя A на $B^{-1}A$, можем считать, что $B = I$. Но тогда у A собственные значения 1 и $\det(A)$, оба они положительны. Откуда $\det(\alpha A + \beta I) > 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{K}$ – плоский симплицальный комплекс, $f: |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ – локально взаимно однозначное линейное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует гладкое отображение $g: |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса C^1 с ненулевым якобианом такое, что $\|f - g\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться в том, что кусочно-линейное отображение f можно продолжить (кусочно-линейно) на больший комплекс $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$ так, чтобы $|\mathcal{K}|$ содержалось во внутренней $|\mathcal{K}'|$ и продолжение f оставалось локально взаимно однозначным. Будем также считать, что полученное отображение сохраняет ориентацию треугольников.

Зададим стандартную функцию класса C^∞ с компактным носителем соотношением:

$$\omega(x) = \begin{cases} ce^{-1/(1-|x|^2)} & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим

$$\omega_\delta(x) = \delta^{-2} \omega\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Заметим, что ω нормализована так, что $\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x) = 1$.

Свертка (покоординатная) $f * \omega_\delta$ является отображением класса C^∞ , которое равномерно стремится к f при $\delta \rightarrow 0$. Ясно, что если f линейна на $B_\delta(x)$, то $f * \omega_\delta(x) = f(x)$. Заметим также, что если $B_\delta(x)$ пересекается только с двумя треугольниками из $\mathcal{K}$, то $D(f * \omega_\delta)(x)$ является выпуклой комбинацией двух линейных отображений, которые удовлетворяют условиям леммы 3. Следовательно, в этом случае $J_{f * \omega_\delta}(x) > 0$.

Выберем такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - y| < \delta.$$

Далее, выберем $\delta_1 > 0$ такое, что для каждой вершины v_i комплекса $\mathcal{K}$ выполняются условия:

- $\text{diam}(f(B_{\delta_1}(v_i))) < \varepsilon$;
- $B_{\delta_1}(v_i)$ попарно не пересекаются;
- $B_{\delta_1}(v_i)$ пересекает $\mathcal{K}^1$ (множество ребер всех треугольников из $\mathcal{K}$) только по ребрам, один из концов которых совпадает с v_i .

Пусть теперь $\delta_2 < \delta$ такое, что для любого

$$x \in |\mathcal{K}| \setminus \bigcup_{v_i \in K^0} B_{\delta_1/2}(v_i)$$

шар $B_{\delta_2}(x)$ пересекает $\mathcal{K}$ по не более чем двум треугольникам.

Рассмотрим произвольную вершину v и покажем, что $g = f * \omega_{\delta_2}$ удовлетворяет условиям леммы 2 на кольце $B_{\delta_1}(v) \setminus B_{\delta_1/2}(v)$ (считая, что $v = f(v) = 0$). Проверим сначала, что g взаимно однозначна на $U = B_{\delta_1}(v) \setminus B_{\delta_1/2}(v)$. Действительно, предположим, что $g(x) = g(y)$. Тогда можно считать, что $B_{\delta_2}(x)$ пересекается с каким-то ребром (иначе $f(x) = g(x) = g(y) = f(y)$, чего быть не может). Уменьшив при необходимости δ_2 , можно считать, что

$$g(\sigma \cap U) \cap g(\sigma' \cap U) = \emptyset$$

для любых двух несоседних треугольников σ и σ' с общей вершиной в 0. Следовательно, достаточно рассматривать случай, когда x и y лежат в объединении двух соседних треугольников σ_1 и σ_2 с общей вершиной в 0. Аналогично, уменьшением δ_2 можно добиться того, чтобы

$$g(O_{\delta_2}(e) \cap U) \cap g(\sigma \cap U) = \emptyset$$

для любого ребра e и треугольника σ таких, что $\sigma \cap e = \{0\}$. Следовательно, можно считать, что $B_{\delta_2}(x)$ пересекает общее ребро треугольников σ_1 и σ_2 . Пусть e – общее ребро треугольников σ_1 и σ_2 , а e' – общее ребро треугольников $f(\sigma_1)$ и $f(\sigma_2)$. Если ввести прямоугольные координаты (u, v) , где направление u совпадает с e , и координаты (u', v') , где направление u' совпадает с e' , и записать

$$g(u, v) = (g^{u'}(u, v), g^{v'}(u, v)),$$

то несложная проверка показывает, что $g^{v'}$ зависит только от v , откуда получаем, что v -координата у точек x и y совпадает. Кроме того, при фиксированном v функция $g^{u'}$ монотонно зависит от u , откуда окончательно $x = y$. Аналогично проверяется, что в полярных координатах g удовлетворяет неравенствам $\partial g^r / \partial r > 0$ и $\partial g^\varphi / \partial \varphi > 0$.

Следовательно, в силу леммы 2 для каждой вершины v продолжим $g = f * \omega_{\delta_2}$ с множества $B_{\delta_1}(v) \setminus B_{\delta_1/2}(v)$ на $B_{\delta_1}(v)$. Якобиан диффеоморфизма, сохраняющего ориентацию, положителен, откуда $J_g(x) > 0$ для всех x . Кроме того, в силу определения δ при $x \in |\mathcal{K}| \setminus \cup B_{\delta_1/2}(v_i)$ выполнено

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f * \omega_{\delta}(x)| < \varepsilon.$$

Для точек $x \in B_{\delta_1}(v_i)$ в силу продолжения выполнено $g(x), f(x) \in f(B_{\delta_1}(v_i))$, но $\text{diam}(f(B_{\delta_1}(v_i))) < \varepsilon$, откуда снова $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, т.е. g дает искомое приближение.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала рассмотрим случай, когда $\bar{\Omega}$ совпадает с $|\mathcal{K}|$ для некоторого комплекса $\mathcal{K}$. Из леммы 1 и леммы 4 следует, что существует гладкое отображение $g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса C^1 с ненулевым якобианом такое, что $\|f - g\| < \varepsilon/2$. Поскольку $\bar{\Omega}$ – компакт, то существует такое $\delta > 0$, что $|J_g(x)| > \delta$ для всех $x \in \bar{\Omega}$. Положим

$$M = \max \left\{ \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\| : 1 \leq i, j \leq 2 \right\}.$$

Поскольку $\bar{\Omega} = |\mathcal{K}|$ удовлетворяет условиям теоремы 2 из работы [5], то существует полиномиальное отображение $p: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что

$$\|g - p\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \|g_{ij} - p_{ij}\| < \min \left(2M, \frac{\delta}{8M} \right)$$

(здесь $p_{ij} = \partial p_i / \partial x_j$). Тогда $\|f - p\| \leq \|f - g\| + \|g - p\| < \varepsilon$ и

$$\begin{aligned} \|J_g - J_p\| &\leq \|(p_{11} - g_{11})(p_{22} - g_{22})\| + \|g_{11}(p_{22} - g_{22})\| + \|g_{22}(p_{11} - g_{11})\| \\ &\quad + \|(p_{12} - g_{12})(p_{21} - g_{21})\| + \|g_{12}(p_{21} - g_{21})\| + \|g_{21}(p_{12} - g_{12})\| \\ &\leq \frac{\delta}{8M} 8M = \delta, \end{aligned}$$

откуда $J_p(x) > 0$. Следовательно, p – искомое приближение.

Перейдем к общему случаю. Предположим, что найдено такое открытое множество $U \supset \bar{\Omega}$ и локально взаимно однозначное отображение $f': U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что $f'|_{\bar{\Omega}} = f$. Тогда можно построить такой комплекс $\mathcal{K}$, что $U \supset |\mathcal{K}| \supset \bar{\Omega}$ и, следовательно, можно применить результат предыдущего случая к отображению f' . Полученное ε -приближение для f' будет также ε -приближением и для f . Доказательство того, что искомое продолжение существует, мы приведем в приложении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Напомним, что отображение $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *квазиоткрытым*, если для любого $y \in F(X)$ и любого открытого множества V , содержащего компактную компоненту $F^{-1}(y)$, точка y является внутренней точкой множества $F(V)$. Заметим, что отображение f квазиоткрыто. Действительно, для любого $x \in \Delta$ и V , содержащего компактную компоненту $f^{-1}(f(x))$, существует открытое подмножество $V_0 \subset V$ такое, что $\partial V_0 \cap f^{-1}(f(x)) = \emptyset$. Тогда $\deg(f, V_0, f(x)) > 0$. Следовательно, согласно свойству (iii) степени Брауэра $f(V_0)$

содержит окрестность точки $f(x)$. Отсюда следует, что f квазиоткрыто. Поскольку f также легкое, то (см. [6; с. 110–113]) f также является открытым (образ открытого множества открыт). Поскольку f легкое и открытое, то по теореме Стоилова [6; с. 103] f топологически эквивалентно комплексно аналитическому отображению $h: U_1 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$. То есть существуют гомеоморфизмы $s_1: \Delta \rightarrow U_1$ и $s_2: U_2 \rightarrow s_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f = s_2 h s_1$. По теореме 1 существуют такие отображения p_1, p_2 класса C^∞ с ненулевым якобианом, что

$$\|s_2 h s_1 - s_2 h p_1\|_{\bar{\Omega}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \|s_2 - p_2\|_{h(p_1(\bar{\Omega}))} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что нам необходим лишь симплициальный случай теоремы 1, так как оба множества $\bar{\Omega}$ и $h(p_1(\bar{\Omega}))$ можно заключить в комплексы. Тогда $\|f - p_2 h p_1\|_{\bar{\Omega}} < \varepsilon$. Поскольку f сохраняет ориентацию, то якобианы отображений p_1 и p_2 должны иметь одинаковый знак. Следовательно, $p_2 h p_1$ является гладким отображением класса C^∞ с неотрицательным якобианом.

4. Отрицательный результат. Теперь мы докажем следующий отрицательный результат, который показывает, что приближение отображениями с неотрицательным якобианом и приближение отображениями с положительным якобианом – это по сути разные задачи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть отображение $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ задано формулой $f(z) = z^2$. Тогда для произвольного отображения $g: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса C^1 со строго положительным якобианом выполнено неравенство $\|f - g\| \geq 1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такое отображение g , что $\|f - g\| < 1/4$. Тогда $\deg(g, B_1(0), x) = 2$ для любого $x \in \overline{B_{1/2}(0)}$. Поскольку якобиан g положителен, из свойства (i) степени Брауэра следует, что существует ровно два различных решения y_1, y_2 уравнения $g(y) = x$, когда x лежит в $\overline{B_{1/2}(0)}$.

Рассмотрим множество $U = g^{-1}(B_{1/2}(0))$. Отображение $g: U \rightarrow B_{1/2}(0)$ является накрытием, а значит, множество U – двойное накрытие над $B_{1/2}(0)$. Поскольку $B_{1/2}(0)$ односвязно, то из теоремы о классификации накрытий (см., например, [7; следствие 1, с. 94]) следует, что U – объединение двух непересекающихся гомеоморфных копий $B_{1/2}(0)$. Тогда $U = U_1 \cup U_2$ и g отображает U_i гомеоморфно на $B_{1/2}(0)$, так что мы можем определить два обратных отображения y_1, y_2 из $B_{1/2}(0)$ в U .

Из неравенства $\|f - g\| < 1/4$ следует, что $|y_i^2(z) - z| < 1/4$. Рассмотрим отображение $\gamma(\phi) = e^{i\phi}/(2 + \varepsilon)$, где $\varepsilon < 1/10$. Тогда точки $y_i(\gamma(\phi))$ содержатся в объединении непересекающихся дисков

$$F_1(\phi) := B_{1/2}\left(\frac{e^{i\phi/2}}{\sqrt{2 + \varepsilon}}\right) \quad \text{и} \quad F_2(\phi) := B_{1/2}\left(\frac{e^{i(\phi/2 + \pi)}}{\sqrt{2 + \varepsilon}}\right).$$

Пусть $y_1(\gamma(0)) \in F_1(0)$. Тогда из соображений непрерывности точка $y_1(\gamma(\phi))$ всегда лежит в $F_1(\phi)$. Тогда при непрерывном изменении параметра ϕ от 0 до 2π получаем, что

$$y_1(\gamma(0)) = y_1(\gamma(2\pi)) \in F_1(2\pi) = F_2(0).$$

Противоречие с тем, что $F_1(0) \cap F_2(0) = \emptyset$.

Поскольку $J_f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, мы нашли даже полиномиальное отображение с неотрицательным якобианом, которое нельзя приблизить отображениями класса C^1 с положительным якобианом.

5. Приложение. Теперь докажем вспомогательные результаты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Можем считать, что $R = 1$ и $\rho < 1/10$. Положим

$$\Psi_1(r, \varphi) = (\omega_1(r)\psi^r(r, \varphi), \psi^\varphi(r, \varphi)) \quad \text{и} \quad \Psi_2(r, \varphi) = \Psi_1(\omega_2(r), \varphi),$$

где $\omega_i(t)$ – такие бесконечно дифференцируемые функции, что выполнены условия

- $\omega_1(1 - \rho) = 0$;
- $\omega_1'(t) > 0$ при $t \in (1 - \rho, 1 - \rho/2)$;
- $\omega_1(t) = 1$ при $t > 1 - \rho/2$;
- $\omega_2'(t) > 0$ при $t > 0$;
- $\omega_2(t) = t$ при $t > 1 - \rho/2$;
- $\omega_2(0) = 1 - \rho$.

Тогда

$$J_{\Psi_1}(r, \varphi) = \omega_1(r)J_\psi(r, \varphi) + \omega_1'(r)\frac{\partial\psi^r}{\partial r}\frac{\partial\psi^\varphi}{\partial\varphi} > 0,$$

$$J_{\Psi_2}(r, \varphi) = J_{\Psi_1}(\omega_2(r), \varphi)\omega_2'(r) > 0.$$

Покажем, что Ψ_1 взаимно однозначно на кольце $\{(r, \varphi) : 1 - \rho < r < 1\}$. Действительно, пусть α – фиксированное число, тогда из $\partial\psi^\varphi/\partial\varphi > 0$ следует, что для каждого $r \in (1 - \rho, 1)$ существует единственное число $f(r)$ (по модулю 2π) такое, что $\psi^\varphi(r, f(r)) = \alpha$. Из того, что ψ – диффеоморфизм следует, что f непрерывно. Кроме того, $\psi^r(r, f(r))$ непрерывна и инъективна, следовательно, монотонно возрастает по r (убывать она не может, так как иначе бы ψ переводила внешнюю границу во внутреннюю, что противоречит $\partial\psi^r/\partial r > 0$). Если $\Psi_1(r_1, \varphi_1) = \Psi_1(r_2, \varphi_2)$, то $\psi^\varphi(r_1, \varphi_1) = \psi^\varphi(r_2, \varphi_2) = \alpha$, откуда $\varphi_1 = f(r_1)$, $\varphi_2 = f(r_2)$. Но тогда

$$\psi^r(r_1, f(r_1))\omega_1(r_1) = \psi^r(r_2, f(r_2))\omega_2(r_2),$$

откуда $r_1 = r_2$, так как $\psi^r(r, f(r))\omega_1(r)$ монотонна. Из этого следует, что Ψ_2 – диффеоморфизм класса C^k проколотой окрестности 0, который продолжает ψ , а также удовлетворяет неравенствам $\partial\Psi_2^r/\partial r > 0$ и $\partial\Psi_2^\varphi/\partial\varphi > 0$. Кроме того, Ψ_2 является гомеоморфизмом $B_1(0)$ и $\Psi_2(0) = 0$.

Далее, пусть $d < 1/10$ такое, что $B_d(0) \cap \psi(O_\rho(C)) = \emptyset$. Положим $\alpha(r, \varphi)$ таким, что

$$\Psi_2^r(\alpha(r, \varphi), \varphi) = r, \quad r < d.$$

Это можно сделать единственным способом ввиду того, что $\partial\Psi_2/\partial r > 0$. Кроме того, по теореме о неявной функции для $F(\alpha, r, \varphi) = \Psi_2^r(\alpha(r, \varphi), \varphi) - r$ отображение α является гладким класса C^k и возрастает по r . Рассмотрим

$$\beta(r, \varphi) = \int_0^r \left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}(s, \varphi)\omega_3(s) + c(\varphi)(1 - \omega_3(s)) + (1 - c(\varphi))\omega_4(s) \right) ds,$$

где

$$\omega_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < d/2, \\ 0 & \text{при } t > d, \end{cases} \quad \omega_4(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 1 - \rho/2, \\ 0 & \text{при } t < 1 - \rho, \end{cases}$$

а $c(\varphi)$ выбрано так, чтобы $\beta(1, \varphi) \equiv 1$. Поскольку при этом $\alpha(d, \varphi) < 1 - \rho$, то несложно убедиться в том, что $c(\varphi) > 0$ и $\partial\beta/\partial r > 0$. Тогда $\Psi_3(r, \varphi) = \Psi_2(\beta(r, \varphi), \varphi)$ –

диффеоморфизм проколотой окрестности класса C^k , который продолжает ψ и для него выполнено равенство $\Psi_3^r(r, \varphi) = r$ при $r < d/2$.

Далее, выберем $\gamma(r, \varphi)$ так, чтобы

$$\Psi_3^\varphi(r, \gamma(r, \varphi)) = \varphi \quad \text{при} \quad r < \frac{d}{3}.$$

Продолжим это отображение на всю ось соотношением $\gamma(r, \varphi + 2l\pi) = \gamma(r, \varphi) + 2l\pi$. Рассмотрим

$$\delta(r, \varphi) = \gamma(r, 0) + \omega_5(r)(\gamma(r, \varphi) - \gamma(r, 0)) + (1 - \omega_5(r))\varphi,$$

где $\omega_5(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\omega_5(t) \in [0, 1]$,

$$\omega_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in \left[0, \frac{d}{5}\right], \\ 1 & \text{при } t \geq \frac{d}{4}. \end{cases}$$

Положим теперь $\Delta(r, \varphi) = \gamma(r, 0)\omega_6(r) + \varphi$ при $r < d/6$ и $\Delta(r, \varphi) = \delta(r, \varphi)$, $r \geq d/6$, где

$$\omega_6(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{d}{8}, \\ 1 & \text{при } t > \frac{d}{7}. \end{cases}$$

Тогда диффеоморфизм проколотой окрестности $\Psi(r, \varphi) = \Psi_3(r, \Delta(r, \varphi))$ является тождественным при $r < d/8$, значит, он является диффеоморфизмом $B_1(0) \cup O_\rho(C)$, который продолжает ψ , что и требовалось.

Далее, приведем доказательство леммы 1. Нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (кусочно-линейная теорема Шенфлиса). Пусть Δ – треугольник на плоскости и $f: \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ – кусочно-линейный гомеоморфизм. Тогда существует кусочно-линейный гомеоморфизм $h: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что $h|_{\partial\Delta} = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти, например, в [4; с. 26–31].

Комбинаторным расстоянием между вершинами 1-комплекса назовем минимальную длину соединяющего их пути. Обозначим его через $\text{dist}(v_i, v_j)$. Для множеств вершин U, V определим $\text{dist}(U, V) := \max_{u \in U, v \in V} \text{dist}(u, v)$. Комбинаторный диаметр U определим теперь как $\text{dist}(U, U)$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathcal{K}^1$ – 1-комплекс, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$. Пусть непрерывное отображение $f: |\mathcal{K}^1| \rightarrow \mathbb{R}^2$ обладает тем свойством, что оно взаимно однозначно на любом подкомплексе $\mathcal{K}^1$ комбинаторного диаметра $\leq d$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-линейное отображение $g: |\mathcal{K}^1| \rightarrow \mathbb{R}^2$, обладающее тем же свойством, такое, что $\|f - g\| < \varepsilon$ и $f(v) = g(v)$ для всех вершин v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем полагать, что $\text{diam}(f(v_i v_j)) < \varepsilon/3$ для любого ребра $v_i v_j$ 1-комплекса $\mathcal{K}^1$ (так как f равномерно непрерывна и мы можем разделить ребра

на одинаковое число частей). Пусть v_i – вершины $\mathcal{K}^1$, $w_i = f(v_i)$ и $A_{ij} = f(v_i v_j)$. Тогда выполнено неравенство $\text{diam}(A_{ij}) < \varepsilon/3$, откуда для любых $x, y \in O_{\varepsilon/3}(A_{ij})$ выполнено неравенство $d(x, y) < \varepsilon$. Определим $N_i = O_{\varepsilon_i}(w_i)$, где ε_i выбраны так, чтобы выполнялись следующие условия:

- (i) $\overline{N}_i \cap \overline{N}_j = \emptyset$ всякий раз, когда $\text{dist}(v_i, v_j) \leq d$;
- (ii) $\varepsilon_i < \varepsilon/3$;
- (iii) для любых трех вершин v_i, v_k, v_j таких, что $\text{dist}(v_i, v_j) \leq d$, $\text{dist}(v_i, v_k) \leq d$ и $v_j v_k$ – ребро, пересечение $\overline{N}_i \cap A_{kj}$ непусто, только когда $v_k = v_i$, либо $v_j = v_i$.

Пусть x_{ij} – последняя точка A_{ij} (в порядке от w_i), которая лежит в $\overline{N}_i$. Пусть x'_{ij} – первая точка A_{ij} после x_{ij} , которая принадлежит $\overline{N}_j$. Пусть A'_{ij} – часть кривой A_{ij} от x_{ij} до x'_{ij} . Тогда кривые A'_{ij} и A'_{kl} не пересекаются при $\text{dist}(v_i v_j, v_k v_l) \leq d$. Далее, выберем δ -окрестности A'_{ij} , где $\delta < \varepsilon/3$, так, чтобы они не пересекались, когда соответствующие A'_{ij} не пересекаются. Тогда для каждого ребра $v_i v_j$ существует ломанная B_{ij} в $O_\delta(A'_{ij})$, которая соединяет x_{ij} с x'_{ij} (см. [5; теорема 6.1]). Следовательно, B_{ij} и B_{kl} не пересекаются, если $\text{dist}(v_i v_j, v_k v_l) \leq d$.

Пусть теперь y_{ij} – последняя точка в B_{ij} , которая лежит в $\overline{N}_i$, а y'_{ij} – первая точка в B_{ij} после y_{ij} , которая принадлежит $\overline{N}_j$. Определим теперь B'_{ij} как часть ломаной B_{ij} от точки y_{ij} до точки y'_{ij} . Наконец, положим

$$B''_{ij} = w_i y_{ij} \cup B'_{ij} \cup y'_{ij} w_j.$$

Ломаная B''_{ij} соединяет w_i с w_j . Ребра $v_i v_j$ и $v_k v_l$ могут пересекаться по концам, только когда $\text{dist}(v_i v_j, v_k v_l) \leq d$. Кроме того, $B''_{ij} \subset O_{\varepsilon/3}(A_{ij})$. Определим теперь $g: |\mathcal{K}^1| \rightarrow \mathbb{R}^2$ на каждом ребре $v_i v_j$ как кусочно-линейный гомеоморфизм, который переводит $v_i v_j$ в B''_{ij} , точку v_i в точку w_i и точку v_j в точку w_j . Тогда g обладает требуемым свойством и интерполирует f в вершинах $\mathcal{K}^1$. Чтобы показать, что g является ε -приближением к f , заметим, что при $x \in v_i v_j$ обе точки $f(x)$ и $g(x)$ лежат в $O_{\varepsilon/3}(A_{ij})$, следовательно, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Сначала рассмотрим для каждой точки $x \in |\mathcal{K}|$ такую ее окрестность $O_\varepsilon(x)$, что сужение $f|_{O_\varepsilon(x)}$ взаимно однозначно. Семейство этих окрестностей образует покрытие компакта $|\mathcal{K}|$; следовательно, мы можем выбрать конечное подпокрытие. Пусть δ – число Лебега этого покрытия. Пусть $\mathcal{L}$ – такое подразбиение комплекса $\mathcal{K}$, что для каждого треугольника $\sigma \in \mathcal{L}$ выполняются неравенства $\text{diam}(\sigma) < \delta/3$ и $\text{diam}(f(\sigma)) < \varepsilon/3$. Кроме того, для каждого треугольника $\sigma \in \mathcal{L}$ обозначим через $D(\sigma)$ множество вершин $\mathcal{L}$ на комбинаторном расстоянии не больше 3 от σ , исключая вершины самого треугольника σ . Далее, положим

$$\theta_\sigma = \frac{1}{3} \min\{\varepsilon, d(f(\sigma), f(D(\sigma)))\}.$$

Наконец, положим $\delta_1 = \min_\sigma \theta_\sigma$.

Пусть $g_1: |\mathcal{L}^1| \rightarrow \mathbb{R}^2$ – δ_1 -приближение к f , построенное в лемме 5 при $d = 3$. Тогда в силу кусочно-линейной теоремы Шенфлиса существует продолжение отображения g_1 до кусочно-линейного отображения $g: |\mathcal{L}| \rightarrow \mathbb{R}^2$ такого, что оно взаимно однозначно на каждом треугольнике. Докажем сначала, что g является ε -приближением к f . Мы знаем, что для каждого треугольника $\sigma \in \mathcal{L}$ выполнено неравенство $\text{diam}(f(\sigma)) < \varepsilon/3$. Поскольку $\delta_1 < \varepsilon/3$, то $g(D\sigma) \subset O_{\varepsilon/3}(f(\sigma))$. Из того, что $g|_\sigma$

является гомеоморфизмом, вытекает также, что $g(\sigma) \subset O_{\varepsilon/3}(f(\sigma))$. Следовательно, для любой точки $x \in \sigma$, точки $f(x)$ и $g(x)$ обе лежат в окрестности $O_{\varepsilon/3}(f(\sigma))$, откуда $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Докажем теперь, что построенное отображение локально взаимно однозначно. Пусть σ_1 и σ_2 – два различных треугольника комплекса $\mathcal{L}$ с непустым пересечением. Если $\sigma_1 = \sigma_2$, то доказывать нечего, так как сужение g на σ_1 является гомеоморфизмом. В противном случае комбинаторный диаметр подкомплекса $\sigma_1 \cup \sigma_2$ равен 2, откуда g_1 – взаимно однозначно на множестве $\partial\sigma_1 \cup \partial\sigma_2$. Значит, $g(\partial\sigma_1) \cap g(\partial\sigma_2) = g(\partial\sigma_1 \cap \partial\sigma_2)$, откуда либо $g(\sigma_1) \subset g(\sigma_2)$, либо $g(\sigma_1) \cap g(\sigma_2) = g(\sigma_1 \cap \sigma_2)$. Но в случае $g(\sigma_1) \subset g(\sigma_2)$, пусть x – одна из вершин треугольника σ_1 , которая не является вершиной треугольника σ_2 . Тогда $g(x) \in g(\sigma_1) \subset g(\sigma_2) \subset O_{\delta_1}(f(\sigma_2))$, откуда

$$d(f(D(\sigma_2)), f(\sigma_2)) \leq d(f(x), f(\sigma_2)) < d(g(x), f(\sigma_2)) + \delta_1 < 2\delta_1,$$

что противоречит выбору δ_1 .

Наконец, докажем утверждение, которое использовалось в доказательстве теоремы 1. Будем пользоваться следующей теоремой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (теорема Шенфлиса). Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$, а $\Gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – параметризация некоторой замкнутой жордановой кривой. Тогда существует гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что $f|_{S^1} = \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [4; с. 65–71].

ЛЕММА 6. Пусть Ω – ограниченная область с жордановой кусочно-гладкой границей и $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – локально взаимно однозначное непрерывное отображение. Тогда существует открытое множество $U \supset \bar{\Omega}$ и локально взаимно однозначное непрерывное отображение $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $g|_{\bar{\Omega}} = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно построить продолжение через каждую компоненту границы. Поэтому в силу теоремы Шенфлиса достаточно строить продолжение отображений, заданных на $\bar{\Omega} = \{z : 1 - \varepsilon \leq |z| \leq 1\}$. Для определенности будем продолжать отображение на множество $\{z : 1 - \varepsilon \leq |z| \leq 1 + \delta\}$.

Уменьшив при необходимости ε , можем считать f взаимно однозначным на каждом секторе $S_k \cap \bar{\Omega}$ для некоторого большого числа $N \in \mathbb{N}$, где

$$S_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in \left[\frac{2\pi k}{3N}, \frac{2\pi(k+3)}{3N} \right] \right\}.$$

Положим

$$K_1 = \bar{\Omega} \cup \left\{ z : |z| \in [1, 1 + \delta], N \frac{\arg(z)}{2\pi} \in \mathbb{Z} \right\}$$

и продолжим f таким образом, чтобы оно оставалось взаимно однозначным на новых секторах

$$\left\{ z \in K_1 : \arg(z) \in \left[\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi(k+1)}{N} \right] \right\}.$$

Для этого положим

$$C_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in \left[\frac{2\pi(k-1)}{N}, \frac{2\pi(k+1)}{N} \right] \right\}, \quad z_k = f(e^{2\pi i k/N}),$$

$k = 0, \dots, N-1$, и пусть жордановы кривые $\gamma_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ определены так, чтобы $\gamma_k(0) = z_k$ и $\gamma_k([0, 1]) \cap f(C_k \cap \bar{\Omega}) = \{z_k\}$. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ такое, что множества $\gamma_k([0, \varepsilon_1])$ не пересекаются, когда соответствующие точки z_k различны. Тогда нам подойдет продолжение, заданное формулой

$$f((1+t)e^{2\pi i k/N}) = \gamma_k\left(\frac{t\varepsilon_1}{\delta}\right).$$

Далее, положим

$$K_2 = K_1 \cup \{z : |z| = 1 + \delta\}.$$

Сначала для каждого k продолжим f взаимно однозначно на малую окрестность точки $(1+\delta)e^{2\pi i k/N}$ в K_2 . Пусть при этом

$$t_k = (1+\delta)e^{2\pi i(k/N+1/3N)} \quad \text{и} \quad s_k = (1+\delta)e^{2\pi i(k/N-1/3N)}$$

– концы дуги, на которую мы продолжили f . Далее, продолжим f на дугу с концами t_k и s_{k+1} так, чтобы оно было взаимно однозначным на $F_k \cap K_2$, где

$$F_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in \left[\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi(k+1)}{N} \right] \right\}.$$

Существование такого продолжения гарантируется тем фактом, что если H_1 и H_2 – гомеоморфные компакты на плоскости, то $\mathbb{R}^2 \setminus H_1$ и $\mathbb{R}^2 \setminus H_2$ имеют одинаковое число компонент линейной связности (см., например, теорема 1.2.14 в [2]). Действительно, применив его к

$$H_1 = (F_k \cap K_2) \setminus \left\{ z : |z| = 1 + \delta, \arg(z) \in \left(2\pi \left(\frac{k}{N} + \frac{1}{3N} \right), 2\pi \left(\frac{k}{N} + \frac{2}{3N} \right) \right) \right\}$$

и

$$H_2 = f(H_1)$$

получим, что $\mathbb{R}^2 \setminus H_2$ линейно связно, чего достаточно для существования продолжения.

Наконец, продолжим отображение на все множество $\{z : 1 - \varepsilon \leq |z| \leq 1 + \delta\}$, применяя теорему Шенфлиса к f на каждой кривой

$$\left\{ z \in K_2 : |z| \in [1, 1 + \delta], \arg(z) \in \left[\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi(k+1)}{N} \right] \right\}.$$

Полученное отображение будет локально взаимно однозначным. Действительно, во всех добавленных точках, в которых $N \arg(z)/2\pi \notin \mathbb{Z}$, оно локально однозначно в силу теоремы Шенфлиса. Если же x – точка на границе двух секторов, то оно локально однозначно, так как внутренности кривых

$$f\left(\left\{ z \in K_2 : |z| \in [1, 1 + \delta], \arg(z) \in \left[\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi(k+1)}{N} \right] \right\}\right)$$

для соседних секторов не пересекаются в малой окрестности точки x .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Franklin, N. Wiener, “Analytic approximations to topological transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28**:4 (1926), 762–785.
- [2] D. O’Regan, Y. J. Cho, Y.-Q. Chen, *Topological Degree Theory and Applications*, Ser. Math. Anal. Appl., **10**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [3] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.
- [4] E. E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Grad. Texts in Math., **47**, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [5] T. Bagby, L. Bos, N. Levenberg, “Multivariate simultaneous approximation”, *Constr. Approx.*, **18**:4 (2002), 569–577.
- [6] G. T. Whyburn, *Topological Analysis*, Princeton Math. Ser., **23**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1964.
- [7] М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1988.

Д. В. Радченко

Киевский национальный университет

им. Т. Шевченко

E-mail: danradchenko@gmail.com

Поступило

18.01.2011

Исправленный вариант

19.08.2011