Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. А. Аль-Шаро, О почти S -перестановочно вложенных подгруппах конечных групп, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 495–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:17:49

О почти S -перестановочно вложенных подгруппах конечных групп

Х. А. Аль-Шаро

Пусть G – конечная группа. Подгруппа H группы G называется S -перестановочной в G , если $HP = PH$ для всех силовских подгрупп P группы G . Подгруппа A группы G называется S -перестановочно вложенной в G , если каждая силовская подгруппа группы A является также силовской подгруппой некоторой S -перестановочной подгруппы группы G .

В статье рассматривается следующее обобщение этого понятия. Пусть H – подгруппа группы G . Скажем, что H почти S -перестановочно вложена в G , если G содержит подгруппу T и S -перестановочно вложенную подгруппу $C \leq H$, для которых $HT = G$ и $T \cap H \leq C$.

Мы изучаем структуру группы G в предположении, что некоторые подгруппы группы G почти S -перестановочно вложены в G , и обобщаем некоторые известные результаты.

Библиография: 24 названия.

1. Введение

В этой статье все группы всегда предполагаются конечными.

Одна из интересных проблем теории конечных групп состоит в выяснении влияния на структуру группы свойств вложения ее подгрупп из некоторых выделенных семейств. Настоящая статья содержит некоторые результаты в этом направлении.

Напомним, что подгруппа H группы G называется S -перестановочной, S -квазинормальной или $\pi(G)$ -квазинормальной (см. статью Кегеля [1]) в G , если $HP = PH$ для всех силовских подгрупп P группы G . Говорят, что подгруппа A группы G S -перестановочно вложена в G , или S -квазинормально вложена в G (см. статью [2] Баллестера-Болинчеса и Педразы-Агуилеры), если каждая силовская подгруппа подгруппы A является также силовской подгруппой некоторой S -перестановочной подгруппы группы G . Подгруппа A называется слабо S -дополняемой в G (см. статью Скибы [3]), если для некоторой подгруппы T группы G выполнены условия $AT = G$ и $A \cap T \leq A_{sG}$, где A_{sG} – подгруппа, порожденная всеми подгруппами в A , которые являются S -перестановочными в G .

В этой статье мы рассматриваем следующее обобщение этих двух понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть H – подгруппа группы G . Мы говорим, что H является почти S -перестановочно вложенной в G , если G содержит подгруппу T и

S -перестановочно вложенную подгруппу $C \leq H$, для которых

$$HT = G \quad \text{и} \quad T \cap H \leq C.$$

Ясно, что всякая S -перестановочно вложенная подгруппа и всякая слабо S -дополняемая подгруппа являются почти S -перестановочно вложенными подгруппами. Следующий пример показывает, что, вообще говоря, множество всех почти S -перестановочно вложенных подгрупп шире множества всех S -перестановочно вложенных подгрупп и множества всех слабо S -дополняемых подгрупп.

ПРИМЕР. Пусть $A = C_9 \rtimes \langle a \rangle$, где C_9 – циклическая группа порядка 9 и a – автоморфизм группы C_9 порядка 2. Предположим, что $G = P \rtimes A$, где P является простым $\mathbb{F}_2[A]$ -модулем, точным для A . Пусть $H = C \langle a \rangle$, где C – подгруппа группы C_9 порядка 3. Ясно, что C S -перестановочно вложена в G . Более того, имеем $G = HT$, где $T = PC_9$ и $H \cap T = C$. Значит, H – почти S -перестановочно вложенная подгруппа группы G . Очевидно, $\langle a \rangle$ не S -перестановочна в G (см. лемму 2.1 (3) и лемму 2.6 (1) ниже), и не существует S -перестановочной подгруппы E , для которой $\langle a \rangle$ является силовой подгруппой. Поэтому H не является S -перестановочно вложенной подгруппой группы G . Ясно также, что $H_{sG} = 1$ и у H нет дополнения в G . Таким образом, H не является слабо S -дополняемой подгруппой группы G .

В этой статье мы доказываем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, содержащая нормальную подгруппу E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что для всякой нециклической силовой подгруппы P группы E любая циклическая подгруппа в P простого порядка или порядка 4 почти S -перестановочно вложена в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА В. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, которая содержит нормальную подгруппу E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что для всякой нециклической силовой подгруппы P группы E любая максимальная подгруппа в P почти S -перестановочно вложена в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

Главный этап доказательства теоремы В – следующий результат, который представляет независимый интерес.

ТЕОРЕМА С. Пусть G – группа, p – наименьший простой делитель ее порядка $|G|$ и P – силовая p -подгруппа в G . Если всякая максимальная подгруппа группы P почти S -перестановочно вложена в G , то группа G p -нильпотентна.

Мы доказываем теоремы А, В и С в п. 3; перед этим в п. 2, мы описываем наиболее общие свойства почти S -перестановочно вложенных подгрупп. В п. 4 рассматриваются некоторые приложения доказанных теорем.

Все обозначения и термины, которые не определены в статье, стандартны. При необходимости их можно найти в [4] и [5].

2. Предварительные сведения

Для доказательства нам понадобятся следующие известные свойства S -перестановочных, S -перестановочно вложенных и субнормальных подгрупп.

ЛЕММА 2.1 [1]. Пусть G – группа и $H \leq K \leq G$.

- (1) Если подгруппа H S -перестановочна в G , то H S -перестановочна в K .
- (2) Предположим, что подгруппа H нормальна в G . Тогда подгруппа K/H S -перестановочна в G/H , если и только если подгруппа K S -перестановочна в G .
- (3) Если H S -перестановочна в G , то H субнормальна в G .

Из леммы 2.1 (3) вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2.2. Если H является S -перестановочной подгруппой группы G и p -группой для некоторого простого p , то $O^p(G) \leq N_G(H)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть G – группа и $A, B \leq G$.

- (1) Если подгруппа A S -перестановочна в G , то $A \cap B$ S -перестановочна в B [6].
- (2) Если подгруппы A и B S -перестановочны в G , то $A \cap B$ тоже S -перестановочна в G [1].
- (3) Если подгруппа A S -перестановочна в G , то группа A/A_G нильпотентна [6].

ЛЕММА 2.4 [2]. Пусть G – группа и $H \leq K \leq G$.

- (1) Если подгруппа H S -перестановочно вложена в G , то H S -перестановочно вложена в K .
- (2) Если подгруппа H нормальна в G и E – S -перестановочно вложенная подгруппа группы G , то подгруппа EH S -перестановочно вложена в G и EH/H S -перестановочно вложена в G/H .

Из леммы 2.3 (2) вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2.5. Пусть H – S -перестановочно вложенная подгруппа группы G . Если $H \leq O_p(G)$ для некоторого простого p , то H является S -перестановочной в G .

ЛЕММА 2.6 [7]. Пусть G – группа и $A \leq G$.

- (1) Если подгруппа A субнормальна в G и A является π -подгруппой группы G , то $A \leq O_\pi(G)$.
- (2) Если подгруппа A субнормальна в G и A нильпотентна, то $A \leq F(G)$.

ЛЕММА 2.7. Пусть G – группа, $H \leq K \leq G$ и N – нормальная подгруппа группы G .

- (1) Если H почти S -перестановочно вложена в G , то H почти S -перестановочно вложена в K .
- (2) Если H нормальна в G и K почти S -перестановочно вложена в G , то K/H почти S -перестановочно вложена в G/H .
- (3) Предположим, что $(|N|, |H|) = 1$ и H S -перестановочно вложена в G . Тогда HN/N является почти S -перестановочно вложенной подгруппой в G/N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть T и $C \leq H$ – подгруппы группы G , причем $HT = G$, C S -перестановочно вложена в G и $H \cap T \leq C$. Тогда

$$K = H(T \cap K) \quad \text{и} \quad (T \cap K) \cap H = T \cap H \leq C,$$

где C S -перестановочно вложена в K по лемме 2.4 (1). Отсюда вытекает (1).

(2) Пусть T – подгруппа группы G , для которой $KT = G$ и $K \cap T \leq C$, где C – S -перестановочно вложенная подгруппа группы G . Тогда

$$(K/H)(HT/H) = G/H \quad \text{и} \quad K/H \cap HT/H = H(K \cap T)/H \leq CH/H \leq NH/N,$$

где CH/H является S -перестановочно вложенной подгруппой группы G/H по лемме 2.4 (2). Отсюда вытекает (2).

(3) Пусть T – подгруппа группы G , для которой $HT = G$ и $H \cap T \leq C$, где C – S -перестановочно вложенная подгруппа в G . Поскольку $(|N|, |H|) = 1$, имеем $N \leq T$. Значит, $TN/N = T/N$, так что

$$T/N \cap HN/N = N(T \cap H)/N \leq NC/N \leq NH/N$$

и NC/N S -перестановочно вложена в G/N по лемме 2.4 (2). Отсюда вытекает (3).

ЛЕММА 2.8. Пусть $P \neq 1$ – элементарная абелева нормальная подгруппа группы G . Предположим, что всякая максимальная подгруппа в P почти S -перестановочно вложена в G . Тогда некоторая максимальная подгруппа группы P является нормальной подгруппой группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы ложно и рассмотрим контрпример (G, P) , для которого произведение $|G||P|$ минимально. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в P . Предположение выполнено для $(G/N, P/N)$, поэтому некоторая максимальная подгруппа M/N группы P/N нормальна в G/N по выбору пары (G, P) . Значит, максимальная подгруппа M группы P нормальна в G , что противоречит выбору пары групп (G, P) . Следовательно, $P = N$ является минимальной нормальной подгруппой группы G . Предположим, что некоторая максимальная подгруппа M группы P не S -перестановочно вложена в G . Тогда для некоторой собственной подгруппы T группы G имеем $MT = G$ и $M \cap T \neq N$. Значит, $1 \neq P \cap T \neq P$. Но подгруппа $P \cap T$ нормальна в G , в противоречие с минимальностью N . Следовательно, всякая максимальная подгруппа группы P S -перестановочно вложена в G . Таким образом, любая максимальная подгруппа группы P является S -перестановочной подгруппой группы G по лемме 2.5, и некоторая максимальная подгруппа в P нормальна в G по лемме 2.11 из [3].

ЛЕММА 2.9 [8; глава VI, теорема 24.2]. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация и G – группа, причем $G^{\mathcal{F}}$ разрешима и всякая максимальная подгруппа группы G , не содержащая $G^{\mathcal{F}}$, принадлежит формации $\mathcal{F}$.

(а) Группа $P = G^{\mathcal{F}}$ является p -группой для некоторого простого p , и экспонента группы P равна p или 4 (если P является неабелевой 2-группой).

(б) Фактор-группа $P/\Phi(P)$ является главным фактором группы G , и

$$(P/\Phi(P)) \times (G/C_G(P/\Phi(P))) \notin \mathcal{F}.$$

(с) Если группа P абелева, то $\Phi(P) = 1$.

ЛЕММА 2.10 [3; лемма 2.16]. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая $\mathcal{U}$, и пусть G – группа, обладающая нормальной подгруппой E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Тогда если E является циклической группой, то $G \in \mathcal{F}$.

ЛЕММА 2.11 [9; глава V, теорема 9.1]. Если G является суперразрешимой группой, то G p -нильпотентна, где p – наименьший простой делитель порядка $|G|$.

ЛЕММА 2.12 [8; глава II, 7.9]. Пусть P – nilпотентная нормальная подгруппа группы G . Если $P \cap \Phi(G) = 1$, то P является прямым произведением некоторых минимальных нормальных подгрупп группы G .

Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 2.13. Пусть $A, B \leq G$ и $G = AB$. Тогда

- (1) существуют силовские p -подгруппы A_p, B_p и G_p групп A, B и G соответственно, для которых $G_p = A_p B_p$;
- (2) $G = AB^x$ для всех $x \in G$.

3. Доказательства теорем А, В и С

Доказательство теоремы А. Предположим, что утверждение теоремы неверно и рассмотрим контрпример (G, E) , для которого произведение $|G||E|$ минимально. Пусть p – наименьший простой делитель порядка $|E|$ и P – силовская p -подгруппа группы E .

Разобьем доказательство на несколько шагов, выделив их как отдельные утверждения.

ШАГ 1. Если X является холловской подгруппой группы E , то условия теоремы выполнены для пары (X, X) . Если, кроме того, подгруппа X нормальна в G , то условия выполнены также для пары $(G/X, E/X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу леммы 2.7(1) условия теоремы выполнены для (X, X) . С другой стороны, если X является нормальной подгруппой в G и Q/X является нециклической силовской q -подгруппой в G/X , то для некоторой силовской q -подгруппы Q_1 группы G имеем $Q/X = Q_1X/X \simeq Q_1$. Значит, в силу изоморфизма $(G/X)/(E/X) \simeq G/E \in \mathcal{F}$, условия теоремы выполнены и для $(G/X, E/X)$ (по лемме 2.7(3)).

ШАГ 2. Если X является нетривиальной нормальной холловской подгруппой группы E , то $X = E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку X является характеристической подгруппой группы E , она является нормальной подгруппой группы G , и согласно (1) условия теоремы выполнены для $(G/X, E/X)$. Значит, по выбору G имеем $G/X \in \mathcal{F}$. Таким образом, условия теоремы выполнены также для (G, X) ; следовательно, $X = E$ (по выбору пары (G, E)).

ШАГ 3. Выполнено равенство $E = G^{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $G/E \in \mathcal{F}$, имеем $G^{\mathcal{F}} \leq E$. С другой стороны, условия теоремы выполнены для $(G, G^{\mathcal{F}})$ по лемме 2.7(1). Значит, по выбору пары (G, E) имеем $E = G^{\mathcal{F}}$.

ШАГ 4. Выполнено неравенство $P \neq E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P = E$. Поскольку формация $\mathcal{F}$ насыщена и $G/E \in \mathcal{F}$, имеем $P \not\leq \Phi(G)$. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G , не содержащая E . Тогда

$$M/E \cap M \simeq EM/E = G/E \in \mathcal{F}.$$

Значит, условия теоремы выполнены для $(M, E \cap M)$ в силу леммы 2.7(1). Следовательно, $M \in \mathcal{F}$ по выбору пары (G, E) . Всякая максимальная подгруппа группы G ,

не содержащая $E = G^{\mathcal{F}}$, принадлежит формации $\mathcal{F}$. Следовательно, по лемме 2.8 экспонента группы P равна p или 4 (если P является неабелевой 2-группой). Более того, $P/\Phi(P)$ является главным фактором группы G и

$$(P/\Phi(P)) \times (G/C_G(P/\Phi(P))) \notin \mathcal{F}.$$

Пусть $\Phi = \Phi(P)$, X/Φ – минимальная подгруппа фактор-группы P/Φ , $x \in X \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$. Значит, L почти S -перестановочно вложена в G . Предположим, что L не S -перестановочно вложена в G . Тогда для некоторой собственной подгруппы T группы G имеем $LT = G$. Из вложения $\Phi \leq \Phi(G)$ вытекает вложение $\Phi T < G$. Из того, что максимальные подгруппы группы L содержатся в Φ , вытекает равенство $|G : \Phi T| = p$. Следовательно, $|P/\Phi| = |G : \Phi T| = p$, так что $G/\Phi \in \mathcal{F}$ по лемме 2.10. Таким образом, из утверждения шага 3 вытекает вложение $P = G^{\mathcal{F}} \leq \Phi < P$. Полученное противоречие показывает, что подгруппа L S -перестановочно вложена в G . Следовательно, L является S -перестановочной подгруппой группы G в силу леммы 2.5. Значит, подгруппа $L\Phi/\Phi = X/\Phi$ S -перестановочна в G/Φ по лемме 2.1 (2). Следовательно, всякая минимальная подгруппа группы P/Φ является S -перестановочной в G/Φ , и по лемме 2.12 из [3] $|P/\Phi| = p$. Мы пришли к противоречию, из которого вытекает, что $P \neq E$.

Шаг 5. *Выполнено равенство $E = G$.*

Доказательство. Предположим, что $E < G$. Тогда условия теоремы выполнены для пары (E, E) согласно (1), поэтому группа E суперразрешима по выбору (G, E) . Значит, группа E p -нильпотентна в силу леммы 2.10. Пусть V – холловская p' -подгруппа группы E . Тогда подгруппа V нормальна в E , так что $V = 1$ в силу утверждения шага 2 и, следовательно, $E = P$, в противоречие с шагом 4. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Заключительное противоречие. В силу утверждения шага 2 группа G не p -нильпотентна. Следовательно, G содержит p -замкнутую подгруппу Шмидта $H = H_p \times H_q$ [9; глава IV, теорема 5.4]. Без потери общности можно считать, что $H_p \leq P$. По лемме 2.9 $H_p/\Phi(H_p)$ является нецентральным главным фактором группы H , а H_p является группой экспоненты p или 4 (если $p = 2$ и H_p неабелева). Значит, $|H_p/\Phi(H_p)| > p$, поскольку p – наименьший простой делитель порядка $|H|$. С другой стороны, согласно лемме 2.7 (1) всякая циклическая подгруппа группы H простого порядка или порядка 4 почти S -перестановочно вложена в H . Используя те же рассуждения, что и в доказательстве пункта (4), мы можем показать, что $|H_p/\Phi(H_p)| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство требуемого утверждения.

Доказательство теоремы С. Предположим, что утверждение теоремы ложно. Пусть G – контрпример минимального порядка.

Как и в предыдущей теореме, разобьем доказательство на несколько отдельных шагов-утверждений.

Шаг 1. *Выполнено равенство $O_{p'}(G) = 1$.*

Доказательство. Пусть $D = O_{p'}(G)$. Условия теоремы выполнены для G/D по лемме 2.7 (3), так что в случае, когда $D \neq 1$, фактор-группа G/D p -нильпотентна

в силу выбора группы G . Значит, группа G p -нильпотентна. Это противоречие доказывает требуемое утверждение.

ШАГ 2. Если $P \leq V < G$, то подгруппа V p -нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по лемме 2.7(1) условия теоремы выполнены для V , так что V p -нильпотентна в силу выбора группы G .

ШАГ 3. Для любой S -перестановочной подгруппы L группы G выполнено равенство $O_{p'}(L) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по лемме 2.1(3) подгруппа L субнормальна в G , поэтому и $O_{p'}(L)$ субнормальна в G . Следовательно, $O_{p'}(L) \leq O_{p'}(G) = 1$ по лемме 2.6(1).

ШАГ 4. Если N – абелева минимальная нормальная подгруппа группы G , то фактор-группа G/N p -нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения шага 1 подгруппа N является p -группой, так что $N \leq P$. Таким образом, условия теоремы выполнены для G/N по лемме 2.7(2). Значит, из выбора группы G вытекает требуемое утверждение.

ШАГ 5. Группа G p -разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения шага 4 достаточно показать, что G содержит абелеву минимальную нормальную подгруппу. Предположим, что это не так. Тогда $p = 2$ по теореме о нечетности, и из лемм 2.1(3) и 2.6(1) вытекает, что всякая нетривиальная подгруппа группы P не S -перестановочна в G . Значит, для любой максимальной подгруппы M группы P , удовлетворяющей условию $1 \neq C \leq M$ для некоторой S -перестановочно вложенной подгруппы C , и любой S -перестановочной подгруппы W группы G , удовлетворяющей условию $C = W_2 \in \text{Syl}_2(W)$, имеем $C \neq W$. Более того, $W_G \neq 1$. Действительно, если $W_G = 1$, то W нильпотентна по лемме 2.3(3). Значит, $O_{2'}(W) \neq 1$, а это противоречит утверждению (3). Заметим также, что для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G выполнено равенство $NP = G$ – в противном случае подгруппа N была бы 2-нильпотентной согласно утверждению шага 2. Но это противоречит утверждению шага 3. Значит, N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G , и поэтому $N \cap P = N \cap C$.

Пусть M_1 – максимальная подгруппа группы P и T_1 – подгруппа группы G , удовлетворяющая условиям $M_1 T_1 = G$ и $M_1 \cap T_1 \leq C_1$ для некоторой S -перестановочно вложенной в G подгруппы $C_1 \leq M_1$. Предположим, что $C_1 = 1$. Тогда T_1 является дополнением подгруппы M_1 в G , так что подгруппа T_1 2-нильпотентна согласно [10; глава 7, теорема 6.1]. Без потери общности можно считать, что $T_1 = N_G(H_1)$ для некоторой холловской $2'$ -подгруппы H_1 в G . Ясно, что $H_1 \leq N$. Согласно [11] любые две холловские $2'$ -подгруппы группы G сопряжены, поэтому, применяя аргумент Фраттини, мы получаем $G = NT_1$. Значит, $P = (P \cap N)(P \cap T_1)$ по лемме 2.13(1). Ясно, что $P \cap T_1 \neq P$. Следовательно, можно выбрать максимальную подгруппу M_2 в группе P , содержащую $P \cap T_1$. По условию $G = M_2 T_2$, где $M_2 \cap T_2 \leq C_2$ для некоторой S -перестановочно вложенной в G подгруппы $C_2 \leq M_2$. Предположим сначала, что $C_2 = 1$, так что подгруппа T_2 2-нильпотентна. Мы опять можем считать, что $T_2 = N_G(H_2)$ для некоторой холловской $2'$ -подгруппы H_2

группы G . Согласно [11] имеем $H_1^x = H_2$ для некоторого $x \in G$. Следовательно, $G = M_1 T_1 = M_2 T_2 = M_2 T_1^x = M_2 T_1$ по лемме 2.13 (2), и

$$P = M_2(P \cap T_1) = M_2.$$

Полученное противоречие показывает, что $C_2 \neq 1$. Пусть W – S -перестановочная подгруппа группы G , для которой $C_2 \in \text{Syl}_p(W)$. Тогда $N \leq W$ и $C_2 \cap N = P \cap N$, откуда вытекает, что

$$P = (P \cap N)(P \cap T_1) = (C_2 \cap N)(P \cap T_1) \leq M_2.$$

Мы снова пришли к противоречию. Следовательно, всякая максимальная подгруппа M_1 группы P содержит нетривиальную S -перестановочно вложенную в G подгруппу C_1 . Но тогда $N \cap P = N \cap M_1 \leq M_1$ согласно проведенным выше рассуждениям. Значит, $N \cap P \leq \Phi(P)$, и N 2-нильпотентна по теореме 4.7 из [9]. Мы опять получили противоречие. Значит, выполнено требуемое условие.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ. Пусть N – любая минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда в силу шагов 3 и 5 N является p -группой, и из (4) вытекает, что фактор-группа G/N p -нильпотентна. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , и $N \not\leq \Phi(G)$. Значит, группа G примитивна, так что $N = C_G(N) = F(G)$ согласно [4; глава А, теорема 17.2]. Пусть P_1 – максимальная подгруппа группы P , для которой $P_1 N = P$, и пусть M – максимальная подгруппа группы G , для которой $G = N \rtimes M$. Поскольку P_1 почти S -перестановочно вложена в G , в группе G найдется подгруппа T , удовлетворяющая условиям $P_1 T = G$ и $P_1 \cap T \leq C$ для некоторой S -перестановочно вложенной в G подгруппы $C \leq P_1$. Предположим, что $C = 1$. Тогда T является дополнением подгруппы P_1 в G , так что $|T_p| = p$, где $T_p \in \text{Syl}_p(T)$. Значит, T p -нильпотентна, и $T_{p'} \trianglelefteq T$, где $T_{p'}$ – холловская p' -подгруппа в T . Без потери общности можно считать, что $T_{p'} \leq M$, так что $G/N \simeq M \leq N_G(T_{p'})$. Отсюда вытекает, что $G = \langle T_p, T_{p'} \rangle \leq N_G(T_{p'})$, а это противоречит (1). Поэтому $C \neq 1$. Пусть W – S -перестановочная подгруппа группы G , для которой $C \in \text{Syl}_p(W)$. Предположим, что $C = W$. Тогда $N \leq C^G = C^{PT_{p'}} = C^P \leq P_1$. Из полученного противоречия следует, что $C \neq W$, так что в силу утверждения шага 1 и леммы 2.1 (3) имеем $W_G \neq 1$. Значит, $N \leq C \leq P_1$ и, следовательно, $P_1 = P_1 N = P$. Это противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы В. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и рассмотрим контрпример (G, E) , для которого произведение $|G||E|$ минимально. Пусть p – наименьший простой делитель порядка $|E|$, а P – силовская p -подгруппа группы E .

ШАГ 1. Если X является нетривиальной нормальной холловской подгруппой группы E , то $X = E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. утверждение шага 1 в доказательстве теоремы А.

ШАГ 2. Подгруппа P не совпадает с E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P = E$. Пусть N – любая минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в P . Тогда условия теоремы выполнены для пары $(G/N, P/N)$. Значит, $G/N \in \mathcal{F}$ в силу выбора пары $(G, E) = (G, P)$.

Поэтому N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G , содержащейся в P , $N \not\leq \Phi(G)$ и $|N| > p$ по лемме 2.10. Следовательно, $\Phi(G) \cap P = 1$, так что в силу леммы 2.12 имеем $N = P$. Но тогда $|N| = p$ по лемме 2.8. Из полученного противоречия вытекает требуемое утверждение.

ШАГ 3. Подгруппа E не является p -нильпотентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если E p -нильпотентна и V является холловской p' -подгруппой группы E , то $V = 1$ в силу (1), а это противоречит утверждению шага 2.

ШАГ 4. Выполнено равенство $E = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $E < G$. Условия теоремы выполнены для пары (E, E) , поэтому подгруппа E суперразрешима в силу выбора (G, E) . Значит, подгруппа E p -нильпотентна по теореме C, а это противоречит утверждению (3). Следовательно, $E = G$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ. В силу утверждения (4) и теоремы C группа G p -нильпотентна в противоречие с шагом 3. Это доказывает теорему.

4. Применение теорем A, B и C

Теорема A имеет такие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4.1 (Бакли [12]). Пусть G – группа нечетного порядка. Если все подгруппы простого порядка нормальны в G , то группа G суперразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.2 (Шаалан [13]). Пусть G – группа и E – нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой суперразрешима. Предположим, что все минимальные подгруппы группы E и все ее циклические подгруппы порядка 4 S -перестановочны в G . Тогда группа G суперразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.3 (Баллестер-Болинчес и Педраза-Агуилера [14]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, содержащая разрешимую нормальную подгруппу E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 в группе E S -перестановочны в G , то $G \in \mathcal{F}$.

Подгруппа H группы G называется s -нормальной в G [15], если G содержит нормальную подгруппу T , для которой

$$HT = G \quad \text{и} \quad H \cap T \leq H_G.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.4 (Ванг [15]). Если все подгруппы простого порядка и порядка 4 s -нормальны в G , то G суперразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.5 (Баллестер-Болинчес, Ванг [16]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 в группе $G^{\mathcal{F}}$ s -нормальны в G , то $G \in \mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.6 (Рамадан, Аззат Мохамед и Хелиел [17]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, содержащая нормальную подгруппу E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 группы E $\mathcal{F}$ -нормальны в G , то $G \in \mathcal{F}$.

Подгруппа A называется $\mathcal{F}$ -дополняемой в G [18], если $AT = G$ и $A \cap T \leq A_G$ для некоторой подгруппы T группы G .

СЛЕДСТВИЕ 4.7 (Баллестер-Болинчес, Ванг и Гуо [18], Ванг и Ли [19]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, имеющая нормальную подгруппу E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 группы E $\mathcal{F}$ -дополняемы в G , то $G \in \mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.8 (Ли и Ванг [20]). Если все подгруппы простого порядка или порядка 4 в группе G $\mathcal{F}$ -перестановочны в G , то группа G суперразрешима.

Из теоремы В вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4.9 (Шринивасан [21]). Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны в G , то группа G суперразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.10 (Ванг [15]). Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G $\mathcal{F}$ -нормальны в G , то группа G суперразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.11 (Асаад [22]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, обладающая нормальной подгруппой E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если всякая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы группы E $\mathcal{F}$ -перестановочна в G , то $G/E \in \mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.12 (Асаад и Хелиел [23]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, обладающая нормальной подгруппой E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если всякая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы группы E $\mathcal{F}$ -перестановочно вложена в G , то $G/E \in \mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.13 (Баллестер-Болинчес и Гуо [24]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, обладающая нормальной подгруппой E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы E $\mathcal{F}$ -дополняемы в G , то $G \in \mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.14 (Рамадан, Аззат Мохамед и Хелиел [17]). Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все суперразрешимые группы, и пусть G – группа, обладающая нормальной подгруппой E , для которой $G/E \in \mathcal{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы E $\mathcal{F}$ -нормальны в G , то $G \in \mathcal{F}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. H. Kegel, “Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen”, *Math. Z.*, **78**:1 (1962), 205–221.
- [2] A. Ballester-Bolinchés, M. C. Pedraza-Aguilera, “Sufficient conditions for supersolvability of finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **127**:2 (1998), 113–118.

- [3] A.N. Skiba, "On weakly s -permutable subgroups of finite groups", *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 192–209.
- [4] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [5] A. Ballester-Bolínches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Math. Appl. (Springer), **584**, Springer-Verlag, Dordrecht, 2006.
- [6] W. E. Deskins, "On quasinormal subgroups of finite groups", *Math. Z.*, **82**:2 (1963), 125–132.
- [7] H. Wielandt, *Subnormal subgroups and permutation groups*, Lectures given at the Ohio State University, Columbus, OH, 1971.
- [8] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [9] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Die Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [10] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row Publ., New York, 1968.
- [11] F. Gross, "Conjugacy of odd order Hall subgroups", *Bull. London Math. Soc.*, **19**:4 (1987), 311–319.
- [12] J. Buckley, "Finite groups whose minimal subgroups are normal", *Math. Z.*, **116**:1 (1970), 15–17.
- [13] A. Shaalan, "The influence of π -quasinormality of some subgroups on the structure of a finite group", *Acta Math. Hungar.*, **56**:3–4 (1990), 287–293.
- [14] A. Ballester-Bolínches, M. C. Pedraza-Aguilera, "On minimal subgroups of finite groups", *Acta Math. Hungar.*, **73**:4 (1996), 335–342.
- [15] Y. Wang, " c -normality of groups and its properties", *J. Algebra*, **180**:3 (1996), 954–965.
- [16] A. Ballester-Bolínches, Y. Wang, "Finite groups with some C -normal minimal subgroups", *J. Pure Appl. Algebra*, **153**:2 (2000), 121–127.
- [17] M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A. A. Heliel, "On c -normality of certain subgroups of prime power order of finite groups", *Arch. Math. (Basel)*, **85**:3 (2005), 203–210.
- [18] A. Ballester-Bolínches, Y. Wang, X. Guo, " c -supplemented subgroups of finite groups", *Glasgow Math. J.*, **42**:3 (2000), 383–389.
- [19] Y. Wang, Y. Li, J. Wang, "Finite groups with c -supplemented minimal subgroups", *Algebra Colloq.*, **10**:3 (2003), 413–425.
- [20] Y. Li, Y. Wang, "On π -quasinormally embedded subgroups of finite groups", *J. Algebra*, **281**:1 (2004), 109–123.
- [21] S. Srinivasan, "Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups", *Israel J. Math.*, **35**:3 (1980), 210–214.
- [22] M. Asaad, "On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups", *Comm. Algebra*, **26**:11 (1998), 3647–3652.
- [23] M. Asaad, A. A. Heliel, "On S -quasinormally embedded subgroups of finite groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **165**:2 (2001), 129–135.
- [24] A. Ballester-Bolínches, X. Guo, "On complemented subgroups of finite groups", *Arch. Math. (Basel)*, **72**:3 (1999), 161–166.

Х. А. Аль-Шаро

Al albayt University, Иордания

E-mail: sharo_kh@yahoo.com

Поступило

03.09.2011