Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Александров, Спектральные функции самосопряженных и симметрических операторов умножения в пространствах $L^2(X, \mu)$, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 803–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:27:19

УДК 517.98

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ $L^2(X, \mu)$

Е. Л. Александров

Получены в явном виде формулы спектральной функции парного оператора умножения, содержащего мультипликативную инволюцию в пространстве $L^2(X, \mu)$, а также оператора типа свертки в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n)$. Рассматриваются симметричные операторы умножения и свертки в пространствах $L^2(X, \mu)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Библиография: 6 названий.

Хотя построение спектральной теории самосопряженных и симметрических операторов в гильбертовом пространстве можно считать завершенной, существует не так уж много операторов, для которых можно указать в явном виде их спектральные функции. Нахождение спектральных функций для конкретных операторов является важной и часто трудной задачей. Например, в квантовой механике наблюдаемая есть некоторый самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве Φ состояний квантомеханической системы и, в отличие от классической механики, она (наблюдаемая) в состоянии $\varphi \in \Phi$ принимает не фиксированное значение, а является случайной величиной с распределением вероятностей $F(t) = (E_t \varphi, \varphi)$, где E_t – спектральная функция оператора A . Знание E_t в данном случае представляется важным.

В предлагаемой статье устанавливается спектральное разложение одного класса парных операторов умножения, содержащих инволюцию, в гильбертовом пространстве $L^2(X, \mu)$. Оператор T этого класса имеет вид

$$Tf = \theta f + \eta Uf, \quad f \in D(T),$$

здесь θ, η – измеримые функции, заданные на пространстве (X, μ) с σ -конечной мерой μ , U – инволютивный оператор.

В случае, когда T определен на максимально возможном линейале $D(T) \subset L^2(X, \mu)$ и самосопряжен, получена в явном виде его спектральная функция, т. е. семейство орт-проекторов E_t , $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, проектирующие на приводящие T подпространства.

Рассматривается также случай, когда T определен не на максимальном линейале и является симметрическим оператором с дефектными числами (m, m) .

Особо отметим случай, когда $X = \mathbb{R}^n$ и μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Операторы T в этом случае унитарно эквивалентны операторам типа свертки в $L^2(\mathbb{R}^n)$, представляющим весьма широкий класс дифференциальных, интегро-дифференциальных, интегральных

с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов, и других операторов, встречающихся во многих областях физики и математики. Укажем, например, проблему рассеивания энергии в атмосферах звезд и планет [1], кинетические уравнения которых являются интегральными с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов.

1. Спектральные функции парных операторов умножения, содержащих мультипликативную инволюцию

1.1. Операторы умножения и мультипликативные инволюции.

1. Пусть H – гильбертово сепарабельное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, A – самосопряженный оператор в H , определенный на $D(A) \subset H$.

Напомним, что семейство ортпроекторов E_t , $t \in \mathbb{R}$, называется *спектральной функцией* оператора A , если оно удовлетворяет свойствам:

- a) $E_s E_t = E_{\min\{s, t\}}$, $s, t \in \mathbb{R}$;
- b) $E_{t-0} = E_t$;
- c) $E_{-\infty} = O$, $E_{+\infty} = I$, где O и I – соответственно нулевой и тождественный операторы в H ;
- d) $D(A) = \left\{ f \in H: \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t f, f) < \infty \right\}$ и для каждого $f \in D(A)$

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t f.$$

Для любого интервала $\Delta = [\alpha, \beta]$ положим $E(\Delta) = E_{\beta+0} - E_{\alpha}$.

ТЕОРЕМА А [2]. Пусть E_t , $t \in \mathbb{R}$, – семейство ортпроекторов в H , удовлетворяющее а), б), в). Это семейство является спектральной функцией самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда: 1) для любого интервала $\Delta = [\alpha, \beta]$ $E(\Delta)H$ приводит A ; 2) если $f \in (E_{\beta+0} - E_{\alpha})H$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, то $\alpha \|f\|^2 \leq (Af, f) \leq \beta \|f\|^2$.

2. Пусть (X, μ) – измеримое пространство с σ -конечной мерой μ такое, что гильбертово пространство $L^2(X, \mu)$ функций, модуль которых интегрируем в квадрате, сепарабельно. Мера μ определена на σ -алгебре подмножеств X , которая здесь не указывается. Далее везде пишется “измеримая”, “почти всюду”, “ $d\mu(x)$ ” вместо соответственно “ μ -измеримая”, “ μ -почти всюду”, “ $\mu(dx)$ ”. Будем использовать следующие обозначения: $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и соответственно норма в $L^2(X, \mu)$, $l_e(x) = l_e$ – индикаторная функция множества $e \subset X$, $\mathfrak{F}(X, \mu) = \mathfrak{F}$ – множество всех измеримых на (X, μ) функций, T_φ – оператор умножения на функцию φ в $L^2(X, \mu)$, т.е. $T_\varphi f = \varphi f$, $f \in D(T) = \{f \in L^2(X, \mu): \varphi f \in L^2(X, \mu)\}$. Через U обозначается замкнутый (т.е. $U^2 = I$) оператор в $L^2(X, \mu)$. Отметим следующие свойства таких операторов [3].

1) Оператор U можно продолжить как операцию U , заданную на множестве $\mathfrak{F}(X, \mu)$ и сохраняющую свойство мультипликативности. Будем писать $Uf = \tilde{f}$.

2) Существует измеримая почти всюду положительная функция φ , удовлетворяющая условиям: $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}$, $U^* = T_\varphi U$, где сопряженный к U оператор U^* определен на множестве $D(U^*) = \{f \in L^2(X, \mu): \varphi \tilde{f} \in L^2(X, \mu)\}$.

3) Максимальный оператор $V = T_{\sqrt{\varphi}} U$ является унитарным и самосопряженным в $L^2(X, \mu)$.

3. Пусть θ и η – две измеримые на (X, μ) функции. Рассмотрим оператор

$$Tf = T_\theta f + T_\eta \check{f}, \quad Uf = \check{f}, \quad f \in D(T) = \{f \in L^2(X, \mu): \theta f + \eta \check{f} \in L^2(X, \mu)\}.$$

Согласно свойству 2) оператора U существует измеримая, почти всюду положительная функция $\varphi(x)$ такая, что $U^* = T_\varphi U$, откуда $T^* = T_\theta + T_{\varphi \check{\eta}} U$, $D(T^*) = \{f \in L^2(X, \mu): \bar{\theta} f + \varphi \check{\eta} \check{f} \in L^2(X, \mu)\}$. Оператор T самосопряжен тогда и только тогда, когда

$$\theta = \bar{\theta} \quad \text{и} \quad \eta = \varphi \check{\eta}. \quad (1.1)$$

Оператор T ограничен тогда и только тогда, когда функции $|\theta|$ и $\sqrt{\varphi}|\check{\eta}|$ в существенном ограничены. В этом случае $\|T\| \leq \|\theta\|_\infty + \|\sqrt{\varphi}\check{\eta}\|_\infty$, где $\|f\|_\infty = \text{vrai max } |f(x)|$. Это утверждение легко следует из равенств, верных для любой функции $f \in L^2(X, \mu)$:

$$\begin{aligned} \|T_\eta Uf\|^2 &= (T_\eta Uf, T_\eta Uf) = (f, U^* T_{|\eta|^2} Uf) = (f, T_{\varphi|\check{\eta}|^2} f) \\ &= \|T_{\sqrt{\varphi}|\check{\eta}|} f\|^2 \leq \|\sqrt{\varphi}\check{\eta}\|_\infty^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Применяя операцию U к обеим частям уравнения $Tg - \lambda g = f$, находим резольвенту $R_\lambda(T)$ оператора T :

$$g = R_\lambda(T)f = (\check{\theta} - \lambda)P^{-1}(\lambda)f - \eta P^{-1}(\lambda)\check{f}, \quad (1.2)$$

где $P(\lambda) = (\theta - \lambda)(\check{\theta} - \lambda) - \eta\check{\eta}$. Из (1.2) следует, что λ принадлежит резольвентному множеству оператора T тогда и только тогда, когда функции $(\check{\theta} - \lambda)P^{-1}(\lambda)$ и $\sqrt{\varphi}\check{\eta}P^{-1}(\lambda)$ в существенном ограничены.

1.2. Спектральная функция оператора T .

1. Если φ – вещественная измеримая функция на (X, μ) , то оператор T_φ умножения на φ самосопряжен и его спектральная функция $E_t(\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, есть семейство операторов умножения на l_{e_t} , $E_t(\varphi)f = l_{e_t}f$, $f \in L^2(X, \mu)$, где $e_t = \{x \in X: \varphi(x) < t\}$. Это легко следует из теоремы А.

Пусть T – самосопряженный оператор, поэтому условия (1.1) выполнены.

Например, оператор $T = T_\theta + T_\eta U$ в $L^2(\mathbb{R})$, где $Uf(x) = f(x^{-1})$ ($U^* = T_{x^{-2}}U$) является самосопряженным, а $\eta(x) = x^{-1}g(x^k + x^k)$ с любыми $k \in \mathbb{N}$ и произвольной функцией $g(t)$, измеримой на $\mathbb{R}$.

Введем следующие обозначения: $\theta_{\check{+}} = (\theta + \check{\theta})/2$, $\theta_{\check{-}} = (\theta - \check{\theta})/2$, $G = \sqrt{\check{\varphi}|\eta|^2 + \theta_{\check{-}}^2}$, $\theta_{\check{+}}^0 = \theta_{\check{+}}G^{-1}$, $\eta^0 = \eta G^{-1}$. Мы предполагаем, что $G > 0$ почти всюду. Для любого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ положим

$$e_k(\Delta) = \{x \in X: \theta_{\check{+}} + (-1)^{k-1}G \in \Delta\}, \quad k = 1, 2.$$

В частности, при $\Delta = (-\infty, t)$ обозначим $e_k((-\infty, t)) = e_k(t)$, $k = 1, 2$.

ЛЕММА 1.1. Для любого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$\check{l}_{e_k(\Delta)} = l_{e_k(\Delta)}, \quad k = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор T_{φ_k} умножения на $\varphi_k = \theta_{\mathbf{C}} + (-1)^{k-1}G$, $k = 1, 2$, самосопряжен, и его спектральная функция $E_t^{(k)}$ определяется равенством:

$$E^{(k)}(\Delta)f = l_{e_k(\Delta)}f, \quad k = 1, 2.$$

Покажем, что $\check{G} = G$. Действительно, $\check{\theta}_{\mathbf{H}}^2 = \theta_{\mathbf{H}}^2$ и, учитывая (1.1) и равенство $\varphi\check{\varphi} = 1$, имеем $\check{\varphi}|\eta|^2 = \check{\varphi}\eta\bar{\eta} = \check{\varphi}\varphi\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}\eta = \eta\bar{\eta}$, откуда $\check{G} = G$ и $\check{\varphi}_k = \varphi_k$, $k = 1, 2$. Для любой $f \in L^2(X, \mu)$ выполнено равенство $UT_{\varphi_k}f = \varphi_k\check{f} = T_{\varphi_k}Uf$. Таким образом, операторы U и T_{φ_k} перестановочны, следовательно, перестановочны операторы U и $E^{(k)}(\Delta)$. Поэтому для любой $f \in L^2(X, \mu)$ выполняется равенство: $\check{l}_{e_k(\Delta)}\check{f} = l_{e_k(\Delta)}\check{f}$, откуда $\check{l}_{e_k(\Delta)} = l_{e_k(\Delta)}$, $k = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 1.1. Спектральная функция E_t , $t \in \mathbb{R}$, самосопряженного оператора T определяется равенством:

$$E_tf = \Phi(t)f + \Psi(t)\check{f}, \quad f \in L^2(X, \mu), \quad (1.3)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[l_{e_1(t)}(1 + \theta_{\mathbf{H}}^0) + l_{e_2(t)}(1 - \theta_{\mathbf{H}}^0)], \quad \Psi(t) = \frac{\eta^0}{2}[l_{e_1(t)} - l_{e_2(t)}]. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$, $E(\Delta) = E_{\beta+0} - E_{\alpha}$, $E(\Delta)f = \Phi(\Delta)f + \Psi(\Delta)\check{f}$, $f \in L^2(X, \mu)$, где

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{2}[l_{e_1(\Delta)}(1 + \theta_{\mathbf{H}}^0) + l_{e_2(\Delta)}(1 - \theta_{\mathbf{H}}^0)], \quad \Psi(\Delta) = \frac{\eta^0}{2}[l_{e_1(\Delta)} - l_{e_2(\Delta)}].$$

Для доказательства теоремы согласно теореме А достаточно проверить следующие свойства оператора $E(\Delta)$: $E(\Delta)$ – ортпроектор, $E_{-\infty} = O$, $E_{+\infty} = I$; если $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$, то подпространства $E(\Delta)L^2(X, \mu)$ и $E(\Delta')L^2(X, \mu)$ ортогональны; подпространство $E(\Delta)L^2(X, \mu)$ приводит $E(\Delta)$; если $\Delta = [\alpha, \beta]$, то для любой $f \in L^2(X, \mu)$ выполнены оценки:

$$\alpha\|E(\Delta)\|^2 \leq (TE(\Delta)f, E(\Delta)f) \leq \beta\|E(\Delta)f\|^2.$$

Эти свойства легко проверяются, учитывая лемму 1.1 и свойства оператора U .

1.3. Симметрические операторы умножения в $L^2(X, \mu)$.

1. Дадим схему построения симметрических операторов умножения в $L^2(X, \mu)$ с равными конечными дефектными числами.

Пусть ψ – измеримая, вещественная, неограниченная функция, заданная на (X, μ) такая, что максимальный оператор T_{ψ} умножения на ψ неограничен, самосопряжен и плотно определен, т.е. множество $D(T_{\psi}) = \{f \in L^2(X, \mu): \psi f \in L^2(X, \mu)\}$ плотно в $L^2(X, \mu)$.

Будем предполагать, что линейно независимые и измеримые на (X, μ) функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_m(x)$ удовлетворяют следующим условиям: $a_j \notin L^2(X, \mu)$ и $a_j/(\psi - \lambda) \in L^2(X, \mu)$ для любых $j = 1, 2, \dots, m$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$. Определим линейное множество H_a функций

$$H_a = \left\{ g \in \mathfrak{F}(X, \mu): g = f + \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j, \quad f \in L^2(X, \mu), \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots, m \right\}$$

и оператор Q проектирования из H_a на $L^2(X, \mu)$. задаваемый равенством $Q\left(f + \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j\right) = f$.

Через B_ψ будем обозначать линейный оператор в $L^2(X, \mu)$, определенный на множестве $D(B_\psi) = \{f \in L^2(X, \mu) : \psi f \in H_a\}$ равенством $B_\psi f = Q(\psi f)$. Так как $D(B_\psi) \supset D(T_\psi)$, то оператор B_ψ плотно определен, следовательно, он имеет сопряженный. Кроме того, легко установить, что оператор B_ψ замкнут. Положим по определению $S_\psi = B_\psi^*$. Из включения $D(B_\psi) \supset D(T_\psi)$ следует равенство $D(B_\psi^*) = D(S_\psi) \subset D(T_\psi^*) = D(T_\psi)$. Отсюда заключаем, что S_ψ является замкнутым симметрическим оператором умножения на ψ в пространстве $L^2(X, \mu)$. Покажем, что S_ψ имеет индексы дефекта (m, m) . Для этого проверим, что функции

$$\varphi_j(\lambda; x) = \varphi_j(\lambda) = \frac{a_j}{\psi - \lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad (1.5)$$

принадлежат дефектному подпространству $\aleph_\lambda(S_\psi) = L^2(X, \mu) \ominus (S_\psi - \bar{\lambda}I)D(S_\psi)$ оператора S_ψ . Действительно,

$$\begin{aligned} ((S_\psi - \bar{\lambda}I)f, \varphi_j(\lambda)) &= (f, S_\psi^* \varphi_j(\lambda) - \lambda \varphi_j(\lambda)) = (f, Q[a_j + \lambda \varphi_j(\lambda)] - \lambda \varphi_j(\lambda)) \\ &= (f, \lambda \varphi_j(\lambda) - \lambda \varphi_j(\lambda)) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что всякая функция из дефектного подпространства $\aleph_\lambda(S_\psi)$ оператора S_ψ должна иметь вид (1.5) или являться линейной комбинацией таких функций.

2. Аналогично строятся симметрические операторы S с индексами дефекта (m, m) по самосопряженному оператору T , $Tf = \theta f + \eta \check{f}$, содержащему инволюцию U , $Uf = \check{f}$, и линейно независимой системе функций $a_1, a_2, \dots, a_m$, удовлетворяющей условиям: $a_j \notin L^2(X, \mu)$,

$$\psi_j(\lambda) = (\check{\theta} - \lambda)P^{-1}(\lambda)a_j - \eta P^{-1}(\lambda)\check{a}_j \in L^2(X, \mu), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0. \quad (1.6)$$

Сохраняя прежние обозначения, определим линейный оператор на линеале $D(B) = \{f \in L^2(X, \mu) : \theta f + \eta \check{f} \in H_a\}$ равенством $Bf = Q(\theta f + \eta \check{f})$. Положим $S = B^*$. Оператор S является симметричным с индексами дефекта (m, m) , функции $\psi_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, m$, определенные условием (1.6), принадлежат дефектному подпространству $\aleph_\lambda(S)$ оператора S .

2. Спектральные функции операторов типа свертки в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$

2.1. Операторы типа свертки.

1. Через $S(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство Шварца бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, таких, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta (D^\alpha) \varphi(x)| < \infty$$

для всех α, β из $\mathbb{N}^n$ с топологией, определяемой этой полунормой. Здесь $\mathbb{N}^n$ — множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$, $D^\alpha = \partial^\alpha / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Двойственное к $S(\mathbb{R}^n)$ пространство обозначается $S'(\mathbb{R}^n)$, а его

элементы называются *медленно растущими обобщенными функциями*. Через F обозначим преобразование Фурье $S(\mathbb{R}^n)$:

$$(F\varphi)(x) = \widehat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x t} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

распространенное на все $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ по непрерывности или, что эквивалентно, по формуле $\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \overline{F\varphi} \rangle$, где $\langle f, \varphi \rangle$ – значение функционала f на φ , $\overline{F\varphi} = \widehat{\varphi}(-x)$ – обратное преобразование Фурье.

Известно [4], что преобразование Фурье изоморфно отображает пространства $S(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$ на себя, а в $L^2(\mathbb{R}^n)$ оно является унитарным оператором.

Отметим, что любая измеримая и ограниченная на $\mathbb{R}^n$ функция есть элемент $S'(\mathbb{R}^n)$. Через $S'_1(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество обобщенных функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых $\widehat{f}$ есть обычная функция, локально интегрируемая в квадрате, т.е. $\widehat{f} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

2. Пусть $\xi, \zeta \in S'_1(\mathbb{R}^n)$, V – замкнутый инволютивный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$ такой, что $U = FV\overline{F}$ есть мультипликативная инволюция. Например, если $Vf(x) = e^{2\pi i ax} f(-x)$, то $Uf(x) = f(a - x)$.

Назовем *оператором типа свертки* в $L^2(\mathbb{R}^n)$ всякий оператор $\tilde{A}$, определенный на линейном пространстве $D(\tilde{A}) \subset \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \xi * f + \eta * (Vf) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Положим $\hat{\xi} = \theta$, $\hat{\zeta} = \eta$. Оператор $T = F\tilde{A}\overline{F}$, $Tf = \theta f + \eta \tilde{f}$, определен на $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \theta f + \eta \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Здесь $\tilde{f} = Uf$, $U = FV\overline{F}$. Оператор $\tilde{T} = FV\tilde{A}$ определен на множестве $D(\tilde{T}) \subset D(T)$.

Будем предполагать, что операторы T и A – самосопряженные, и обозначим через $E_t(T)$, $E_t(A)$, $t \in \mathbb{R}$, их спектральные функции.

ТЕОРЕМА 2.1. *Спектральная функция $E_t(A)$, $t \in \mathbb{R}$, оператора A определяется выражением*

$$E_t(A)f = \overline{F}\Phi * f + \overline{F}\Psi * (Vf), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.1)$$

где функции Φ и Ψ определены равенствами (1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из унитарной эквивалентности операторов A и T следует, что их спектральные функции связаны соотношением $E_t(A) = \overline{F}E_t(T)F$. Учитывая, что спектральная функция $E_t(T)$, $t \in \mathbb{R}$, задана равенством (1.3), приходим к (2.1).

2.2. Частные случаи.

1. Если $\zeta = 0$, $\xi \in S'_1(\mathbb{R}^n)$, то $Af = \xi * f$. Резольвента оператора A определяется равенством

$$(Af - \lambda I)^{-1}f = R_\lambda(A)f = \overline{F}[(\hat{\xi} - \lambda)^{-1}] * f \quad (2.2)$$

для всех λ , не принадлежащих существенной области значений $\hat{\xi}$. Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $\hat{\xi}$ вещественна, его спектральная функция в этом случае задается [5] равенством $E_t(A)f = \hat{e}_t * f$, $t \in \mathbb{R}$, $e_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{\xi}(x) < t\}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим обобщенную функцию $\xi = P_k(\delta) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \delta$, где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a_α – постоянные, δ – дельта-функция Дирака. Оператор $Af = \xi * f = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha f$, $f \in D(A)$, есть дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Например, операторы $\Delta f = \sum_{j=1}^n \partial^2 f / \partial t_j^2$, $\square f = \partial^2 f / \partial t^2 - \Delta f$ являются самосопряженными операторами свертки.

Максимальный оператор свертки с $\xi = g * P_k(\delta)$, где $g \in S'_1(\mathbb{R}^n)$, является интегро-дифференциальным. Он будет самосопряженным тогда и только тогда, когда функция $\hat{\xi} = \hat{g} \cdot P_k(2\pi i x)$ вещественна.

2. Если $\xi, \zeta \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а оператор V определен равенством $Vf(x) = f(\Lambda_\alpha x)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, где $\Lambda_\alpha, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, — диагональная матрица с главной диагональю $(-1)^{\alpha_1}, \dots, (-1)^{\alpha_n}$, то A есть интегральный оператор Карлемана с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов, т. е.

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\xi(x-y) + \zeta(x-\Lambda_\alpha y)] f(y) dy.$$

Спектральные функции всех указанных операторов определяются теоремой 2.1.

2.3. Симметрические операторы свертки в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Ради простоты изложения в этом пункте будут рассматриваться симметрические операторы с индексами дефекта (m, m) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, хотя аналогичные операторы можно рассматривать в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$.

Через $\mathring{A}$ обозначим максимальный самосопряженный оператор свертки, $\mathring{A}f = \xi * f$, где $\xi \in S'_1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat{\xi}$ — вещественная функция. Оператор $\mathring{A}$ унитарно эквивалентен максимальному оператору T_ψ умножения на $\psi = \hat{\xi}$, $T_\psi = \overline{F} \mathring{A} F$.

Если $S_\psi = S$ — симметричный оператор умножения с индексами дефекта (m, m) , построенный по функциям $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$ в пункте 1.3, то оператор $A = F S \overline{F}$ будет также симметричным с теми же индексами дефекта. При этом функции $\varphi_j(\lambda) = F[a_j(\psi - \lambda)^{-1}]$, $j = 1, 2, \dots, m$, составляют базис дефектного подпространства $\aleph_\lambda$ оператора A . Отметим, что область определения $D(A)$ оператора A есть линейал

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \xi * f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{\infty} a_j(x) \hat{f}(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\xi = P_k(\delta)$, $k \geq m$. В этом случае $\mathring{A}$ — максимальный дифференциальный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ с постоянными коэффициентами, $\hat{\xi} = P_k(2\pi i x)$ — многочлен степени k . Беря в качестве системы функций $a_1, a_2, \dots, a_m$ систему $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}$, получаем для любого $j = 0, 1, \dots, m-1$ $x^j[\psi(x) - \lambda]^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$, $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Область определения $D(A)$ оператора A определяется как множество функций $f \in L^2(\mathbb{R})$, $m-1$ раз дифференцируемых таких, что $\xi * f \in L^2(\mathbb{R})$, и удовлетворяющих условиям: $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$.

Подробно рассмотрим операторы дифференцирования первого и второго порядков в $L^2(\mathbb{R})$.

2. Рассмотрим $\xi = (2\pi i)^{-1} \delta$. Тогда $\hat{\xi} = x$. Максимальный оператор $\mathring{A}$ есть оператор дифференцирования первого порядка, $\mathring{A} = f'/(2\pi i)$, он унитарно эквивалентен максимальному оператору T_x умножения на x . Симметричный оператор A , определяемый равенством $Af = f'/(2\pi i)$ на всех функциях $f \in D(\mathring{A})$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, имеет индексы дефекта $(1, 1)$. Отметим, что если $f \in D(\mathring{A})$, то в точке 0 она может иметь конечный скачок.

Применяя теорию вычетов к вычислению интегралов, находим элементы дефектных подпространств $\varphi_\lambda(x) = (2\pi i)^{-1} F[(x - \lambda)^{-1}]$. Имеем

$$\varphi_\lambda(x) = l_{\varepsilon(\lambda)}(x) e^{2\pi i \lambda x}, \quad \text{Im } \lambda \neq 0, \quad (2.3)$$

где $l_{\varepsilon(\lambda)}(x) = l_+(x) = l_{(0,\infty)}(x)$, если $\text{Im } \lambda > 0$, и $l_{\varepsilon(\lambda)}(x) = l_-(x) = l_{(-\infty,0)}(x)$, если $\text{Im } \lambda < 0$, есть индикаторные функции соответственно множеств $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$.

Пусть $\check{R}_\lambda = (\check{A} - \lambda I)^{-1}$ – резольвента самосопряженного оператора $\check{A}$. Множество всех обобщенных резольвент оператора A (т. е. резольвент всех квазисамосопряженных расширений оператора A) описывается формулой [4]:

$$R_\lambda f = \check{R}_\lambda f + \frac{1 - \omega(\lambda)}{\omega(\lambda)C(\lambda) - 1} \cdot \frac{(f, \varphi_{\bar{\lambda}})}{(\lambda + i)(\varphi_\lambda, \varphi_i)} \varphi_\lambda, \quad \text{Im } \lambda > 0, \quad (2.4)$$

где $\omega(\lambda)$ – произвольная аналитическая в верхней полуплоскости функция, не превосходящая по модулю единицы, $|\omega(\lambda)| \leq 1$, $C(\lambda) = ((\lambda - i)/(\lambda + i)) \cdot ((\varphi_\lambda, \varphi_{-i})/(\varphi_\lambda, \varphi_{-i}))$, $\text{Im } \lambda > 0$, – характеристическая функция оператора A . Оператор R_λ является резольвентой некоторого самосопряженного расширения оператора A тогда и только тогда, когда $\omega(\lambda) = z = \text{Const}$, $|z| = 1$.

Учитывая (2.2) и (2.3), при условии $\text{Im } \lambda > 0$ запишем (2.4) в виде

$$(R_\lambda f)(x) = (r_l * f)(x) + \frac{i}{2\pi} [1 - \omega(\lambda)] \left(\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-2\pi i \bar{\lambda} x} dx \right) l_+(x) e^{2\pi i \lambda x},$$

где $r_l(x) = \overline{F}[(x - \lambda)^{-1}] = 2\pi i l_+(x) e^{2\pi i x \lambda}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (R_\lambda f)(x) &= 2\pi i e^{2\pi i x \lambda} \int_x^\infty e^{-2\pi i t \lambda} f(t) dt \\ &\quad - 2\pi i [1 - \omega(\lambda)] \cdot \left(\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-2\pi i \bar{\lambda} x} dx \right) \cdot l_+(x) e^{2\pi i \lambda x}. \end{aligned}$$

Обобщенная спектральная функция E_t оператора A связана с его обобщенной резольвентой R_λ формулой

$$R_\lambda f = \int_{-\infty}^\infty \frac{dE_t f}{t - \lambda}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

3. Рассмотрим $\xi = -\delta''/(4\pi^2)$, $\hat{\xi} = x^2$. В этом случае оператор $\check{A}$ есть дифференциальный оператор второго порядка в $L^2(\mathbb{R})$, $\check{A}f = -f''/(4\pi^2)$. Оператор B , определенный на $D(B) = \{f \in D(\check{A}): f' = 0\}$ выражением $Bf = -f''/(4\pi^2)$, $f \in D(B)$, является симметричным с индексами дефекта $(1, 1)$. Функция $\varphi_\lambda(x) = e^{2\pi i \sqrt{\lambda}|x|}$, $\text{Im } \sqrt{\lambda} > 0$, принадлежит дефектному подпространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1967.
- [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
- [3] Александров Е. Л. Операторы в пространствах $L^2(X, \mu)$ и некоторые их приложения. Деп. в ВИНТИ 14.04.97 № 1245-B97. Саратов, 1997.
- [4] Vo-Khac-Khoan. Distribution, Analyse de Fourier. Operateurs aux dérivées partielles. Vuibert, 63, Bd. Saint Germain. V. 1, 2. Paris, 1967.
- [5] Александров Е. Л. Спектральные свойства операторов с ядрами, зависящими от разности аргументов // Изв. вузов. Матем. 1991. № 8 (351). С. 3–8.
- [6] Александров Е. Л., Ильмушкин Г. М. Обобщенные резольвенты изометрических и симметрических операторов // Изв. вузов. Матем. 1977. № 1 (176). С. 15–25.