Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хе-Джун Сун, Неравенства для собственных значений
малого порядка эллиптического оператора четвертого
порядка, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 286–
294

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:29:02

Неравенства для собственных значений малого порядка эллиптического оператора четвертого порядка

Хе-Джун Сун

В этой статье мы исследуем весовую задачу Дирихле на собственные значения для эллиптического уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами в ограниченной области с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Для этой задачи мы получаем неравенства для собственных значений малого порядка. В частности, наши результаты содержат неравенство для собственных значений бигармонического оператора, полученное Ченгом, Хуангом и Веем.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm8982

1. Введение. Эллиптический оператор – это один из главных дифференциальных операторов в математике. В анализе и геометрии важной задачей является нахождение различных неравенств для его собственных значений. Были получены замечательные результаты для собственных значений малого порядка лапласиана Δ и бигармонического оператора Δ^2 . Остановимся кратко на некоторых относящихся сюда результатах. Оригинальные работы в этом направлении восходят к работе Пейна, Пойя и Вейнбергера [1]. Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Задача Дирихле для лапласиана описывается уравнением

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

В случае $n = 2$ Пейн, Пойя и Вейнбергер [1] доказали неравенство

$$\lambda_2 + \lambda_3 \leq 6\lambda_1. \quad (1.2)$$

Это привело к знаменитой гипотезе Пейна, Пойя и Вейнбергера для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ашбауг и Бенгуриа [2]–[4] внесли определенный вклад в частичное решение этой гипотезы. В 1993 г. они установили общее неравенство [4]

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \lambda_{r+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) \lambda_1 \quad (1.3)$$

для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 11001130).

В 2008 г. Сун, Ченг и Янг [5], а также Чен и Ченг [6] получили некоторые универсальные неравенства для собственных значений малого порядка для этой задачи в областях единичной сферы, сложном проективном пространстве и полных римановых многообразиях. С другой стороны, Ашбаут [7] нашел, что следующее неравенство

$$\sum_{r=1}^n (\Gamma_{r+1}^{1/2} - \Gamma_1^{1/2}) \leq 4\Gamma_1^{1/2} \quad (1.4)$$

справедливо для задачи с закрепленной пластиной

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \Gamma u & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

в ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^n$, где ν обозначает внешнее единичное нормальное векторное поле на границе $\partial\Omega$. В 2009 г. Ченг, Ичикава и Мамецука [8] доказали неравенство (1.4). Далее в 2010 г. Ченг, Хуанг и Вей [9] доказали неравенство

$$\sum_{r=1}^n (\Gamma_{r+1} - \Gamma_1)^{1/2} \leq [8(n+2)\Gamma_1]^{1/2} \quad (1.6)$$

для задачи (1.5) в ограниченной области Ω в n -мерном полном минимальном подмногообразии в евклидовом пространстве. Представляется естественным изучение задач на собственные значения эллиптических операторов с переменными коэффициентами. Эти задачи весьма интересны, так как они затрагивают различные области математики: спектральную теорию, уравнения в частных производных, геометрию, вариационное исчисление и т.д. (ср. [10], [11]). Кроме того, они дают хорошие модели для приложений. Однако наличие переменных коэффициентов затрудняет нахождение оценок их собственных значений.

В 1990 г. Хук [12] установил неравенство для собственных значений эллиптического оператора второго порядка с переменными коэффициентами.

В 1994 г. Киан и Чен [13] доказали неравенство НР типа для собственных значений равномерных эллиптических операторов второго порядка. В 2010 г. Сун [14] получил неравенства типа Янга для равномерных эллиптических операторов второго порядка с неотрицательным потенциалом. Из этих результатов следуют оценки для собственных значений эллиптических операторов второго порядка с переменными коэффициентами.

Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через x_i , $i = 1, \dots, n$, i -ю декартову координату точки x в $\mathbb{R}^n$. Более того, повсюду в статье мы используем следующие обозначения:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

В данной статье мы исследуем следующую весовую задачу Дирихле на собственные значения:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n D_{ij}(a_{ij}(x)D_{ij}u) = \Lambda \rho u & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

где ρ – положительная непрерывная функция на $\overline{\Omega}$, а функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ для $i, j = 1, \dots, n$. Легко установить, что задача (1.5) представляет собой частный случай задачи (1.7). В самом деле, аналогом оператора $\sum_{i,j=1}^n D_{ij}(a_{ij}(x)D_{ij})$ является бигармонический оператор Δ^2 , когда переменные коэффициенты $a_{ij}(x) \equiv 1$ на Ω для $i, j = 1, \dots, n$. Целью данной статьи является получить неравенства для собственных значений малого порядка задачи (1.7). В теореме 1 в п. 2 мы получим общее неравенство для ее собственных значений, содержащее положительную постоянную δ . Используя общее неравенство в теореме 1, мы доказываем неравенство для собственных значений малого порядка задачи (1.7) в теореме 2. Оно показывает влияние переменных коэффициентов $a_{ij}(x)$ и весовой функции $\rho(x)$ на оценки для собственных значений задачи (1.7). В следствии 1 мы также рассматриваем частный случай задачи (1.7). В частности, наши результаты обобщают неравенство (1.6) Ченга, Хуанга и Вея [9].

2. Результаты. Мы сначала докажем общее неравенство для собственных значений задачи (1.7), используя неравенство Релея–Ритца из вариационной теории. Для этого пробные функции должны удовлетворять условиям ортогональности. Используя QR-теорему факторизации, мы построим подходящие пробные функции и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через u_r весовую ортонормированную собственную функцию, соответствующую r -му собственному значению Λ_r задачи (1.7) для $r = 1, 2, \dots, n$. А именно, функция u_r удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n D_{ij}(a_{ij}(x)D_{ij}u_r) = \Lambda_r \rho u_r & \text{в } \Omega, \\ u_r|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_r}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \int_{\Omega} \rho u_r u_s = \delta_{rs}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \int_{\Omega} u_1^2 &\leq 2\delta \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n a_{ir}(x) |D_i u_1|^2 + 2a_{rr}(x) |D_r u_1|^2 + u_1 D_r u_1 D_r(a_{rr}(x)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} |D_r u_1|^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где δ – любая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1, \dots, y_n$ – это стандартные евклидовы координатные функции в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $(n \times n)$ -матрицу A , определяемую равенством

$$A = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \rho y_1 u_1 u_2 & \int_{\Omega} \rho y_1 u_1 u_3 & \cdots & \int_{\Omega} \rho y_1 u_1 u_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\Omega} \rho y_n u_1 u_2 & \int_{\Omega} \rho y_n u_1 u_3 & \cdots & \int_{\Omega} \rho y_n u_1 u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с QR-теоремой факторизации (ортогонализация Грама–Шмидта), мы знаем, что существует ортогональная $(n \times n)$ -матрица $Q = (q_{rs})_{n \times n}$ такая, что $B = QA$ – верхнетреугольная матрица. Иначе говоря, мы имеем

$$\sum_{l=1}^n q_{rl} \int_{\Omega} \rho y_l u_1 u_{s+1} = 0, \quad 1 \leq s < r \leq n. \quad (2.3)$$

Определим функции x_r так:

$$x_r = \sum_{l=1}^n q_{rl} y_l.$$

С помощью (2.3) мы можем заключить, что функции x_r , $r = 1, \dots, n$, удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\int_{\Omega} \rho x_r u_1 u_{s+1} = 0, \quad 1 \leq s < r \leq n. \quad (2.4)$$

Мы определим пробные функции φ_r так:

$$\varphi_r = x_r u_1 - b_r u_1, \quad r = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

где

$$b_r = \int_{\Omega} \rho x_r u_1^2. \quad (2.6)$$

Используя (2.4), нетрудно проверить, что

$$\int_{\Omega} \rho \varphi_r u_{s+1} = 0, \quad 0 \leq s < r \leq n. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega} \rho \varphi_r x_r u_1 = \int_{\Omega} \rho \varphi_r^2. \quad (2.8)$$

Отсюда неравенство Релея–Ритца в вариационной теории имеет вид

$$\Lambda_{r+1} \leq \frac{\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \varphi_r D_{ij}(a_{ij}(x) D_{ij} \varphi_r)}{\int_{\Omega} \rho \varphi_r^2}. \quad (2.9)$$

Непосредственными вычислениями мы можем получить

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n D_{ij}[a_{ij}(x) D_{ij}(x_r u_1)] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta_{ir} D_{ij}(a_{ij}(x) D_j u_1) \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \delta_{jr} D_{ij}(a_{ij}(x) D_i u_1) + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ir} D_j(a_{ij}(x) D_{ij} u_1) \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \delta_{jr} D_i(a_{ij}(x) D_{ij} u_1) + \sum_{i,j=1}^n x_r D_{ij}(a_{ij}(x) D_{ij} u_1) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [D_{ir}(a_{ir}(x) D_i u_1) + D_i(a_{ir}(x) D_{ir} u_1)] + \Lambda_1 \rho x_r u_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.7), (2.8) и (2.10) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \varphi_r D_{ij}(a_{ij}(x) D_{ij} \varphi_r) \\
 &= \int_{\Omega} \varphi_r \left\{ \sum_{i,j=1}^n D_{ij}[a_{ij}(x) D_{ij}(x_r u_1)] - b_r \sum_{i,j=1}^n D_{ij}(a_{ij}(x) D_{ij} u_1) \right\} \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi_r [D_{ir}(a_{ir}(x) D_i u_1) + D_i(a_{ir}(x) D_{ir} u_1)] + \Lambda_1 \int_{\Omega} \rho \varphi_r^2. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Подставляя (2.11) в (2.9), мы получим

$$(\Lambda_{r+1} - \Lambda_1) \int_{\Omega} \rho \varphi_r^2 \leq 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi_r [D_{ir}(a_{ir}(x) D_i u_1) + D_i(a_{ir}(x) D_{ir} u_1)]. \quad (2.12)$$

С помощью интегрирования по частям, мы находим

$$\int_{\Omega} u_1 [D_{ir}(a_{ir}(x) D_i u_1) + D_i(a_{ir}(x) D_{ir} u_1)] = 0 \quad (2.13)$$

и

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_r u_1 [D_{ir}(a_{ir}(x) D_i u_1) + D_i(a_{ir}(x) D_{ir} u_1)] \\
 &= -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_1 D_i [a_{ir}(x) D_{il}(x_r u_1)] + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_r u_1 D_i (a_{ir}(x) D_{ir} u_1) \\
 &= -2 \int_{\Omega} \left[u_1 \sum_{i=1}^n D_i (a_{ir}(x) D_i u_1) + u_1 D_r (a_{rr}(x) D_r u_1) + u_1 a_{rr}(x) D_{rr} u_1 \right] \\
 &= 2 \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n a_{ir}(x) |D_i u_1|^2 + 2 a_{rr}(x) |D_r u_1|^2 + u_1 D_r u_1 D_r (a_{rr}(x)) \right]. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Следовательно, подставляя (2.13) и (2.14) в (2.12), мы находим

$$\begin{aligned}
 & (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1) \int_{\Omega} \rho \varphi_r^2 \\
 & \leq 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} x_r u_1 [D_{ir}(a_{ir}(x) D_i u_1) + D_i(a_{ir}(x) D_{ir} u_1)] \\
 &= 2 \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n a_{ir}(x) |D_i u_1|^2 + 2 a_{rr}(x) |D_r u_1|^2 + u_1 D_r u_1 D_r (a_{rr}(x)) \right]. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\Omega} x_r u_1 D_r u_1 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2,$$

мы имеем

$$-2 \int_{\Omega} \varphi_r D_r u_1 = -2 \int_{\Omega} x_r u_1 D_r u_1 + 2 b_r \int_{\Omega} u_1 D_r u_1 = \int_{\Omega} u_1^2. \quad (2.16)$$

Умножая обе части (2.16) на $(\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2}$ и учитывая (2.15), мы получим

$$\begin{aligned}
 & (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \int_{\Omega} u_1^2 \\
 &= -2(\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \int_{\Omega} \varphi_r D_r u_1 \\
 &\leq \delta(\Lambda_{r+1} - \Lambda_1) \int_{\Omega} \rho \varphi_r^2 + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} |D_r u_1|^2 \\
 &\leq 2\delta \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n a_{ir}(x) |D_i u_1|^2 + 2a_{rr}(x) |D_r u_1|^2 + u_1 D_r u_1 D_r(a_{rr}(x)) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} |D_r u_1|^2.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом, неравенство (2.2) выполняется. Это завершает доказательство теоремы 1.

Теперь мы получим оценки для членов в (2.2) и выберем соответствующую постоянную δ , чтобы получить требуемое неравенство для собственных значений малого порядка в задаче (1.7).

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Λ_r r -е собственное значение в задаче (1.7). Предположим, что функции $a_{ij}(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \xi \leq a_{ij}(x) \leq \eta, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где ξ и η – две положительные постоянные. Положим

$$\sigma = \left(\min_{x \in \Omega} \rho(x) \right)^{-1} \quad \text{и} \quad \tau = \left(\max_{x \in \Omega} \rho(x) \right)^{-1}.$$

Обозначим через

$$\mathbf{a}(x) = (a_{11}(x), \dots, a_{rr}(x), \dots, a_{nn}(x))$$

векторнозначную функцию из Ω в $\mathbb{R}^n$. Тогда мы имеем

$$\sum_{r=1}^n (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \leq \left[\frac{8(n+2)\eta\sigma^2}{\xi\tau^2} \Lambda_1 + \frac{8\sigma^{9/4}}{\xi^{3/4}\tau^2} \max_{x \in \Omega} |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| \Lambda_1^{3/4} \right]^{1/2}, \tag{2.18}$$

где ∇ обозначает градиентный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с предположениями теоремы имеем

$$0 < \tau = \tau \int_{\Omega} \rho u_1^2 \leq \int_{\Omega} u_1^2 = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \rho u_1^2 \leq \sigma \int_{\Omega} \rho u_1^2 = \sigma. \tag{2.19}$$

С помощью интегрирования по частям мы находим

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_1 D_{ij}(a_{ij}(x) D_{ij} u_1) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) |D_{ij} u_1|^2 \geq \xi \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |D_{ij} u_1|^2 \\
 &= \xi \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} D_{ii} u_1 D_{jj} u_1 = \xi \int_{\Omega} |\Delta u_1|^2.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Объединяя (2.20) и

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_1 D_{ij}(a_{ij}(x) D_{ij} u_1) = \Lambda_1 \int_{\Omega} \rho u_1^2 = \Lambda_1,$$

мы получим

$$\int_{\Omega} |\Delta u_1|^2 \leq \xi^{-1} \Lambda_1. \quad (2.21)$$

Отсюда находим

$$\int_{\Omega} \sum_{r=1}^n |D_r u_1|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 = - \int_{\Omega} u_1 \Delta u_1 \leq \left[\int_{\Omega} u_1^2 \int_{\Omega} |\Delta u_1|^2 \right]^{1/2} \leq \sigma^{1/2} \xi^{-1/2} \Lambda_1^{1/2}. \quad (2.22)$$

В то же время, так как

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n u_1 D_r u_1 D_r(a_{rr}(x)) &\leq |u_1| \left(\sum_{r=1}^n |D_r u_1|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{r=1}^n |D_r(a_{rr}(x))|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |u_1| |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| |\nabla u_1|, \end{aligned}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \int_{\Omega} u_1 D_r(a_{rr}(x)) D_r u_1 &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| \int_{\Omega} |u_1| |\nabla u_1| \\ &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| \left[\int_{\Omega} u_1^2 \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \right]^{1/2} \leq \sigma^{3/4} \xi^{-1/4} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| \Lambda_1^{1/4}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Суммируя по l от 1 до n в (2.2), мы получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_1^2 \sum_{r=1}^n (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \\ \leq 2\delta \int_{\Omega} \sum_{i,r=1}^n a_{ir}(x) |D_i u_1|^2 + 4\delta \sum_{r=1}^n \int_{\Omega} a_{rr}(x) |D_r u_1|^2 \\ + 2\delta \sum_{r=1}^n \int_{\Omega} u_1 D_r u_1 D_r(a_{rr}(x)) + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \sum_{r=1}^n |D_r u_1|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Подставляя (2.19), (2.22) и (2.23) в (2.24), мы находим

$$\begin{aligned} \tau \sum_{r=1}^n (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \\ \leq \sigma^{1/2} \xi^{-1/2} \left\{ \delta \left[(2n+4) \eta \Lambda_1^{1/2} + 2(\sigma \xi)^{1/4} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| \Lambda_1^{1/4} \right] + \frac{1}{\delta} \sigma \Lambda_1^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставляя

$$\delta = \left[\frac{\sigma \Lambda_1^{1/2}}{(2n+4) \eta \Lambda_1^{1/2} + 2(\sigma \xi)^{1/4} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| \Lambda_1^{1/4}} \right]^{1/2}$$

в (2.25), мы получим (2.18), что завершает доказательство теоремы 2.

Из неравенства (2.18) мы можем выяснить влияние переменных коэффициентов $a_{ij}(x)$ и весовой функции $\rho(x)$ на оценки для собственных значений задачи (1.7). Кроме нижних и верхних оценок для $a_{ij}(x)$, (2.18) зависит от $|\nabla \cdot \mathbf{a}(x)|$ – векторно-значной функции $\mathbf{a}(x) = (a_{11}(x), \dots, a_{nn}(x))$. Иначе говоря, если $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$ обозначает $(n \times n)$ -матрицу с компонентами $a_{ij}(x)$, оценка (2.18) также зависит от диагональных элементов матрицы $A(x)$.

Теперь мы рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 1. Если все $a_{rr}(x)$ – постоянные при $r = 1, \dots, n$, то выполняется соотношение $|\nabla \cdot \mathbf{a}(x)| = 0$. Отсюда мы получим следствие для данного частного случая.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что $a_{rr}(x)$ – постоянные при $r = 1, \dots, n$. Другие предположения те же, что и в теореме 2. Тогда*

$$\sum_{r=1}^n (\Lambda_{r+1} - \Lambda_1)^{1/2} \leq \frac{\sigma \eta^{1/2}}{\tau \xi^{1/2}} [8(n+2)\Lambda_1]^{1/2}. \quad (2.26)$$

Далее, если весовая функция $\rho(x) \equiv 1$ и переменные коэффициенты $a_{ij}(x) \equiv 1$ на Ω для $i, j = 1, \dots, n$, то задача (1.7) переходит в задачу (1.5). Нетрудно видеть, что (2.18) и (2.26) содержат как частный случай результат (1.6) Ченга, Хуанга и Вей [9].

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. E. Payne, G. Pólya, H. F. Weinberger, “On the ratio of consecutive eigenvalues”, *J. Math. and Phys.*, **35**:5 (1956), 289–298.
- [2] M. S. Ashbaugh, R. D. Benguria, “Proof of the Payne–Pólya–Weinberger conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **25**:1 (1991), 19–29.
- [3] M. S. Ashbaugh, R. D. Benguria, “A sharp bound for the ratio of the first two eigenvalues of Dirichlet Laplacians and extensions”, *Ann. of Math. (2)*, **135**:3 (1992), 601–628.
- [4] M. S. Ashbaugh, R. D. Benguria, “More bounds on eigenvalue ratios for Dirichlet Laplacians in n dimension”, *SIAM J. Math. Anal.*, **24**:6 (1993), 1622–1651.
- [5] H. Sun, Q.-M. Cheng, H. Yang, “Lower order eigenvalues of Dirichlet Laplacian”, *Manuscripta Math.*, **125**:2 (2008), 139–156.
- [6] D. Chen, Q.-M. Cheng, “Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplace operator”, *J. Math. Soc. Japan*, **60**:2 (2008), 325–339.
- [7] M. S. Ashbaugh, “Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues”, *Spectral Theory and Geometry* (Edinburgh, 1998), London Math. Soc. Lecture Notes, **273**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 95–139.
- [8] Q.-M. Cheng, T. Ichikawa, S. Mametsuka, “Inequalities for eigenvalues of Laplacian with any order”, *Commun. Contemp. Math.*, **11**:4 (2009), 639–655.
- [9] Q.-M. Cheng, G. Huang, G. Wei, “Estimates for lower order eigenvalues of a clamped plate problem”, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **38**:3–4 (2010), 409–416.
- [10] E. B. Davies, “Uniformly elliptic operators with measurable coefficients”, *J. Funct. Anal.*, **132**:1 (1995), 141–169.
- [11] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Front. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

- [12] S. M. Hook, “Domain-independent upper bounds for eigenvalues of elliptic operator”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **318**:2 (1990), 615–642.
- [13] C. Qian, Z. Chen, “Estimates of eigenvalues for uniformly elliptic operator of second order”, *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, **10**:4 (1994), 349–355.
- [14] H. J. Sun, “Yang-type inequalities for weighted eigenvalues of a second order uniformly elliptic operator with a nonnegative potential”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:8 (2010), 2827–2837.

Хе-Джун Сун

Nanjing University of Science and Technology, China

E-mail: hejunsun@163.com

Поступило

30.11.2010