Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чжэньцай Шэнь, Шижун Ли, Цзиньшань Чжан, Об SS -квазинормальных и S -квазинормально вложенных подгруппах конечных групп, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 300–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:26:04

Об SS-квазинормальных и S-квазинормально вложенных подгруппах конечных групп

Чжэньцай Шэнь, Шижун Ли, Цзиньшань Чжан

Подгруппа H группы G называется SS-квазинормальной, если в G существует подгруппа B такая, что $HB = G$ и H перестановочна с любой силовской подгруппой в B . Подгруппа H группы G называется S-квазинормально вложенной в G , если для всякой ее силовской подгруппы P найдется S-квазинормальная подгруппа K группы G такая, что P является силовской подгруппой в K . Изучаются конечные группы с определенными SS-квазинормальными или S-квазинормально вложенными примарными подгруппами.

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm8984

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются только конечные группы и используются стандартные обозначения и терминология, такие же, как в [1]–[4]. Две подгруппы H и K данной группы G перестановочны, если $HK = KH$, т.е. HK – подгруппа в G . Подгруппа H группы G называется *S-перестановочной* в G (или *S-квазинормальной* в G – прим. пер.), если H перестановочна с любой силовской подгруппой группы G . Это понятие было введено Кегелем (Kegel) и Дескинсом (Deskins) в 1962 г. и с тех пор исследовалось многими авторами – см., например, [5]–[23]. В 1998 г. авторы статьи [6] расширили это понятие до S-квазинормально вложенных подгрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Подгруппа H группы G называется *S-квазинормально вложенной* в G , если для любой силовской подгруппы P группы H найдется S-квазинормальная подгруппа K группы G такая, что P – силовская подгруппа в K .

Напомним, что формация – это класс $\mathcal{F}$ групп, удовлетворяющий следующим условиям:

- (i) если $G \in \mathcal{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in \mathcal{F}$;
- (ii) если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $G/N_1, G/N_2 \in \mathcal{F}$, то $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathcal{F}$.

Формация $\mathcal{F}$ называется *насыщенной*, если $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$ влечет $G \in \mathcal{F}$, см. [4].

Работа выполнена при частичной поддержке следующих фондов: Chinese Universities Scientific Fund, NSFC (грант № 2014XJ015) и CPSF (грант № 2012T50010).

В 2007 г. Скиба [20] ввел понятие слабо s-перестановочной подгруппы и доказал следующую интересную теорему о сверхразрешимых группах. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим еще, что всякая нециклическая силовская подгруппа P в $F^*(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) слабо s-перестановочны в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

В 2008 г. Ли, Шэнь и другие авторы дали следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Подгруппа H группы G называется SS-квазинормальной (от слов «supplement» и «Sylow»), если в G найдется добавление (supplement) B к H такое, что H перестановочна с любой силовской (Sylow) подгруппой в B .

Ясно, что любая S-квазинормальная подгруппа группы G SS-квазинормальна и S-квазинормально вложена в G . С другой стороны, SS-квазинормальная подгруппа необязательно является S-квазинормально вложенной. Например, S_3 – SS-квазинормальная подгруппа симметрической группы S_4 , но S_3 не является S-квазинормально вложенной и поэтому не S-квазинормальна. И наоборот, S-квазинормально вложенная подгруппа необязательно SS-квазинормальна. Например, силовская 3-подгруппа группы A_5 S-квазинормально вложена, но не SS-квазинормальна. Другими словами, последние два понятия независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Обозначим d – наименьшее число образующих p -группы P и $\mathcal{M}_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$ – набор максимальных подгрупп в P таких, что $\bigcap_{i=1}^d P_i = \Phi(P)$.

Вообще говоря, набор $\mathcal{M}_d(P)$ определяется для группы P не единственным образом. Известно, что

$$|\mathcal{M}(P)| = \frac{p^d - 1}{p - 1}, \quad |\mathcal{M}_d(P)| = d, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{(p^d - 1)/(p - 1)}{d} = \infty,$$

поэтому $|\mathcal{M}(P)| \gg |\mathcal{M}_d(P)|$.

В настоящей статье мы изучаем влияние SS-квазинормальных или S-квазинормально вложенных подгрупп на структуру группы G и получаем следующие основные результаты.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда G p -нильпотентна тогда и только тогда, когда любая максимальная подгруппа в P , не имеющая p -нильпотентного добавления, SS-квазинормальна в G .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G p -нильпотентна;
- (ii) P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие p -нильпотентных добавлений в G , SS-квазинормальны в G .

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$.

Предположим, что всякая нециклическая силовская подгруппа P в $F^*(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , SS-квазинормальны в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть p – наименьший простой делитель нечетного порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда G p -нильпотентна тогда и только тогда, когда любая максимальная подгруппа в P , не имеющая p -нильпотентного добавления, S-квазинормально вложена в G .

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть p – наименьший простой делитель нечетного порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G p -нильпотентна;
- (ii) P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$, не имеющие p -нильпотентных добавлений в G , S-квазинормально вложены в G .

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа нечетного порядка с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что всякая нециклическая силовская подгруппа P в $F^*(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$, не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , S-квазинормально вложены в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы не знаем, справедливы ли теоремы 1.4, 1.5 и 1.6 для группы G четного порядка.

В [11], [16], [17] мы получили следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Предположим, что каждый элемент некоторого фиксированного набора $M_d(P)$ SS-квазинормален в G . Тогда G p -нильпотентна.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G p -нильпотентна;
- (ii) каждый элемент некоторого фиксированного набора $M_d(P)$ S-квазинормально вложен в G .

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G p -нильпотентна;
- (ii) каждый элемент некоторого фиксированного набора $M_d(P)$ S-квазинормально вложен или SS-квазинормален в G .

Однако, следующие гипотезы неверны.

ГИПОТЕЗА 1.10. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Предположим, что каждый элемент некоторого фиксированного набора $M_d(P)$, не имеющий p -нильпотентного добавления, SS-квазинормален в G . Тогда G p -нильпотентна.

ГИПОТЕЗА 1.11. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Предположим, что каждый элемент некоторого фиксированного набора $\mathcal{M}_d(P)$, не имеющий p -нильпотентного добавления, S -квазинормально вложен в G . Тогда G p -нильпотентна.

Например, симметрическая группа S_4 не является 2-нильпотентной, но имеет силовскую 2-подгруппу $P = D_8$, и каждый элемент некоторого фиксированного набора $\mathcal{M}_d(P)$, не имеющий 2-нильпотентного добавления, S -квазинормально вложен (SS -квазинормален) в G .

2. Предварительные сведения.

ЛЕММА 2.1 [11]. Предположим, что H SS -квазинормальна в группе G , $K \leq G$ и N – нормальная подгруппа в G . Тогда

- (i) если $H \leq K$, то H SS -квазинормальна в K ;
- (ii) HN/N SS -квазинормальна в G/N ;
- (iii) если $N \leq K$ и K/N SS -квазинормальна в G/N , то K SS -квазинормальна в G .

ЛЕММА 2.2 [11]. Пусть H – p -подгруппа в G . Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) H S -перестановочна в G ;
- (ii) $H \leq O_p(G)$ и H S -квазинормально вложена в G ;
- (iii) $H \leq O_p(G)$ и H SS -квазинормальна в G .

ЛЕММА 2.3 [6]. Пусть H S -квазинормально вложена в группу G , $K \leq G$ и N – нормальная подгруппа в G . Тогда:

- (i) если $H \leq K$, то H S -квазинормально вложена в K ;
- (ii) HN/N S -квазинормально вложена в G/N .

Из леммы 2.11 [20] и леммы 2.2 вытекают следующие результаты.

ЛЕММА 2.4. Пусть N – элементарная абелева нормальная подгруппа группы G . Предположим, что N имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |N|$ и любая подгруппа H группы N порядка $|H| = |D|$ SS -квазинормальна или S -квазинормально вложена в G . Тогда некоторая максимальная подгруппа группы N нормальна в G .

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все nilпотентные группы, а G – группа с разрешимым $\mathcal{F}$ -остатком $P = G^{\mathcal{F}}$. Предположим, что всякая максимальная подгруппа в G , не содержащая P , принадлежит $\mathcal{F}$. Тогда P – p -группа для некоторого простого p . Кроме того, если всякая циклическая подгруппа в P простого порядка или порядка 4 (если $p = 2$ и P неабелева), не имеющая сверхразрешимого добавления в G , SS -квазинормальна или S -квазинормально вложена в G , то $|P/\Phi(P)| = p$.

ЛЕММА 2.6 [4]. Пусть M – подгруппа группы G . Тогда выполнены следующие утверждения:

- (i) если M нормальна в G , то $F^*(M) \leq F^*(G)$;
- (ii) $F^*(G) \neq 1$, если $G \neq 1$; более того, $F^*(G)/F(G) = \text{soc}(F(G)C_G(F(G))/F(G))$;
- (iii) $F^*(F^*(G)) = F^*(G) \geq F(G)$; если $F^*(G)$ разрешима, то $F^*(G) = F(G)$;
- (iv) предположим, что K – подгруппа в G , содержащаяся в $Z(G)$; тогда выполнено $F^*(G/K) = F^*(G)/K$.

ЛЕММА 2.7 [3]. Пусть A и B – подгруппы группы G , удовлетворяющие условию $G \neq AB$. Если равенство $AB^g = B^gA$ выполняется для всех $g \in G$, то A или B содержится в собственной нормальной подгруппе группы G .

Следующая лемма вытекает из леммы 2.10 [20].

ЛЕММА 2.8. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Тогда G p -нильпотентна, если и только если P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и любая подгруппа H в P порядка $|H| = |D|$ или порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) имеет p -нильпотентное добавление в G .

ЛЕММА 2.9 [5]. Пусть K – p -подгруппа группы G , где p – простое. Если K S -квазинормально вложена в G и $K_G = 1$, то K S -квазинормальна в G .

ЛЕММА 2.10. Пусть $N \trianglelefteq G$ и P – p -подгруппа группы G , где p – простой делитель порядка группы G . Если P SS -квазинормальна в G и $q \neq p$, то $P \cap N$ перестановочна со всеми силовскими q -подгруппами Q в N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – силовская q -подгруппа в N и $q \neq p$. Тогда в G найдется силовская q -подгруппа G_q такая, что $Q \leq G_q$. Поскольку P SS -квазинормальна в G , PG_q – подгруппа и $PG_q \cap NG_q = (P \cap NG_q)G_q = (P \cap N)G_q$ тоже является подгруппой. Более того,

$$(P \cap N)G_q \cap N = (P \cap N)(G_q \cap N) = (P \cap N)Q.$$

Таким образом, $(P \cap N)Q$ является подгруппой, и поэтому $(P \cap N)Q = Q(P \cap N)$, что и требовалось.

3. Доказательство основных результатов о SS -квазинормальности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Через несколько шагов мы придем к противоречию.

(1) Докажем, что в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что G/N p -нильпотентна и $\Phi(G)=1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . По лемме 2.1 G/N удовлетворяет условию теоремы. Выбор группы G влечет, что G/N p -нильпотентна. Более того, N – единственная минимальная нормальная подгруппа и $\Phi(G) = 1$.

(2) Докажем, что $O_{p'}(G)=1$.

Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то $N \leq O_{p'}(G)$ согласно (1). По лемме 2.1 G/N удовлетворяет условию теоремы. Поэтому G/N p -нильпотентна. Из p -нильпотентности G/N вытекает, что G p -нильпотентна. Противоречие.

(3) Докажем, что $O_p(G)=1$.

Если $O_p(G) \neq 1$, то $N \leq O_p(G)$ согласно (1). Таким образом, в G имеется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Согласно (1) $\Phi(O_p(G)) = 1$. Поэтому N и M – подгруппы нормализатора $O_p(G) \cap M$. Следовательно, из единственности N вытекает $N = O_p(G)$. По лемме 2.8 в P есть максимальная подгруппа P_1 , не имеющая p -нильпотентного добавления. Так как у N есть p -нильпотентное добавление M , имеем $N \not\leq P_1$. Более того, по условию P_1 SS -квазинормальна

в G . Таким образом, $P_1 G_q$ – подгруппа, где $q \neq p$ и $G_q \in \text{Syl}_q(G)$. Поскольку $P_1 \cap N = P_1 G_q \cap N \trianglelefteq P_1 G_q$, имеем $G_q \leq N_G(P_1 \cap N)$. Кроме того, $P_1 \cap N \trianglelefteq P$. Таким образом, $P_1 \cap N \trianglelefteq G$. Из единственности N имеем $P_1 \cap N = 1$, и поэтому $|N| = p$. Из p -нильпотентности M вытекает, что G p -нильпотентна. Полученное противоречие доказывает (3).

(4) Докажем, что группа G неразрешима и поэтому N является прямым произведением неабелевых простых групп.

Это следует из (2) и (3).

(5) Заключительное противоречие.

Пусть H – максимальная подгруппа в P . По условию H SS-квазинормальна или имеет p -нильпотентное добавление в G . Если H SS-квазинормальна, то по лемме 2.10 $H \cap N$ перестановочна со всеми силовскими q -подгруппами Q в N для всех $q \neq p$. Поскольку N – прямое произведение неабелевых простых групп, то по лемме 2.7 и [3; I, раздел 9.12] в N найдется собственная нормальная подгруппа M такая, что $H \cap N \leq M$. Таким образом, $|N/M|_p = p$, и поэтому N/M p -нильпотентна, что противоречит (4). Итак, всякая максимальная подгруппа группы P имеет p -нильпотентное добавление, и из леммы 2.8 следует, что G p -нильпотентна. Полученное противоречие доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Ясно, что из (i) следует (ii).

Докажем, что (ii) влечет (i). Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Мы докажем теорему в несколько шагов.

(1) Докажем, что $O_{p'}(G) = 1$.

В самом деле, если $O_{p'}(G) \neq 1$, то рассмотрим фактор-группу $G/O_{p'}(G)$. По лемме 2.1 $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условиям теоремы, следовательно, $G/O_{p'}(G)$ p -нильпотентна согласно выбору G . Поэтому G p -нильпотентна. Противоречие.

(2) Докажем, что $|D| > p$.

Если $|D| = p$, то согласно лемме 2.1 поскольку G – минимальная не p -нильпотентная группа, $G = [P]Q$, где P и Q – силовские p - и q -подгруппы в G соответственно. Положим $\Phi = \Phi(P)$, и пусть X/Φ – подгруппа в P/Φ порядка p , $x \in X \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда L имеет порядок p или 4. По условию L либо имеет p -нильпотентное добавление в G , либо L SS-квазинормальна в G . Если L имеет p -нильпотентное добавление T в G , то $T \neq G$. Поэтому $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$. Следовательно, $T\Phi/\Phi \trianglelefteq G/\Phi$ и $P/\Phi \cap T\Phi/\Phi = 1$, откуда $|P/\Phi| = p$. Таким образом, P циклическая, а G p -нильпотентна. Противоречие. Итак, L SS-квазинормальна в G . По лемме 2.2 L S-перестановочна в G . Лемма 2.5 влечет, что $|P/\Phi| = p$, откуда следует, что G p -нильпотентна.

(3) Докажем, что $|P : D| > p$.

Если $|P : D| = p$, то G p -нильпотентна по теореме 1.1. Противоречие.

(4) Докажем, что если $N \leq P$ и N – минимальная нормальная подгруппа в G , то $|N| \leq |D|$.

Пусть $|N| > |D|$. Поскольку $N \leq O_p(G)$, N – элементарная абелева группа. Если подгруппа $H \subset N$ порядка $|D|$ имеет p -нильпотентное добавление T в G , то $G = HT = NT$. Поэтому $N \cap T \trianglelefteq G$. Из минимальности N следует, что $N \cap T = 1$ или $N \cap T = N$. Если $N \cap T = 1$, то $N = N \cap HT = H(N \cap T) = H$; противоречие.

Таким образом, $N \cap T = N$ и $G = NT = T$; это также противоречие. Следовательно, все подгруппы в N порядка $|D|$ SS-квазинормальны в G . Согласно лемме 2.4 некоторая максимальная подгруппа N_1 группы N нормальна в G . Из минимальности N следует, что $N_1 = 1$, поэтому $|N| = |D| = p$. Противоречие.

(5) Докажем, что если $N \leq P$ и N – минимальная нормальная подгруппа в G , то G/N p -нильпотентна.

Если $|N| < |D|$, то G/N p -нильпотентна по лемме 2.1. Согласно (4) $|N| = |D|$. Пусть $N \leq K \leq P$ и $|K/N| = p$. Согласно (2) N нециклическая, поэтому и K нециклическая, следовательно, K имеет максимальную подгруппу $L \neq N$ и $K = LN$. Если L имеет p -нильпотентное добавление в G , то и у K есть p -нильпотентное добавление в G . Если L SS-квазинормальна в G , то $K/N = LN/N$ SS-квазинормальна в G/N по лемме 2.1. Если P/N абелева, то утверждение доказано. Предположим теперь, что P/N – неабелева 2-группа. Тогда любая подгруппа в P порядка $2|D|$, не имеющая p -нильпотентного добавления в G , SS-квазинормальна в G . В этом случае можно аналогично показать, что любая подгруппа X группы P , содержащая N и такая, что $|X : N| = 4$, либо имеет p -нильпотентное добавление в G , либо SS-квазинормальна в G . Таким образом, опять получаем требуемое.

(6) Докажем, что $O_p(G) = 1$.

Если $O_p(G) \neq 1$, то рассмотрим в G минимальную нормальную подгруппу N , содержащуюся в $O_p(G)$. По предположению $N = O_p(G)$. Поэтому в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $M \cap N = 1$. Согласно (5) M p -нильпотентна. Поэтому $M = M_p O^p(M)$ и $G = NM_p O^p(M)$. Пусть M_0 – максимальная подгруппа в M_p . Тогда $|G : (NM_0 O^p(M))| = p$. Поскольку p – наименьшее простое, $NM_0 O^p(M) \leq G$. Более того, согласно (2) и условию группа $NM_0 O^p(M)$ p -нильпотентна. Поэтому $O^p(M) \leq G$ и $O^p(M) = O^p(G)$. Следовательно, G p -нильпотентна, и мы получаем (6).

(7) Докажем, что G – неабелева простая группа.

Если это не так, то найдется минимальная нормальная подгруппа L . Если $|L_p| > |D|$, то по предположениям L p -нильпотентна. Согласно (1) $O_{p'}(G) = 1$, поэтому L – p -группа. Из (6) следует $L = 1$, это противоречие. Таким образом, $|L_p| \leq |D|$. Поэтому найдется подгруппа P_0 такая, что $P_0 \geq L \cap P$ и $|P_0| = p|D|$. Более того, P_0 – силовская p -подгруппа в $P_0 L$. По теореме 1.1 $P_0 L$ p -нильпотентна. Следовательно, L p -нильпотентна. Противоречие.

(8) Заключительное противоречие.

Пусть H – подгруппа в P порядка $|D|$. Если H SS-квазинормальна в G , то в G существует силовская q -подгруппа Q такая, что $HQ^g = Q^g H$, где $q \neq p$ и $g \in G$. По лемме 2.7 $G = HQ$, что противоречит (7). Поэтому любая подгруппа H группы P порядка $|H| = |D|$ или порядка $2|D|$ (если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) имеет p -нильпотентное добавление в G , откуда согласно лемме 2.8 следует, что p -нильпотентна. Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что любая нециклическая силовская подгруппа P в E имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и

порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , SS-квазинормальны в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример наименьшего порядка. Докажем следующие утверждения.

(1) $G/Q \in \mathcal{F}$, где Q – силовская q -подгруппа в E и q – наибольший простой делитель $|E|$.

Согласно лемме 2.1 и теореме 1.2 в группе E имеется силовская матрешка. Пусть q – наибольший простой делитель $|E|$ и Q – силовская q -подгруппа в E . Из наличия силовской матрешки в E следует, что Q нормальна в E . Но Q – характеристическая подгруппа в E и $E \trianglelefteq G$, поэтому $Q \trianglelefteq G$. Далее, соотношение $(G/Q)/(E/Q) \cong G/E \in \mathcal{F}$ и лемма 2.1 показывают, что G/Q удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом, согласно выбору группы G получаем $G/Q \in \mathcal{F}$.

(2) Всякая подгруппа H в Q порядка $|H| = |D|$, не имеющая сверхразрешимого добавления в G , S-перестановочна в G .

Это следует из леммы 2.2.

(3) Если $N \leq Q$ и N – минимальная нормальная подгруппа в G , то $G/N \in \mathcal{F}$.

Если $|N| < |D|$ или $|Q : D| = q$, то утверждение очевидно. Итак, пусть $|N| = |D|$ и $|Q : D| > q$. Пусть еще $N \leq K \leq P$, где $|K/N| = p$. По лемме 2.5 $|D| > q$, следовательно, N нециклическая, поэтому и K нециклическая. Получаем, что K имеет максимальную подгруппу $L \neq N$ и $K = LN$. Если L имеет сверхразрешимое добавление в G , то и K имеет сверхразрешимое добавление в G . Если L S-перестановочна в G , то $K/N = LN/N$ S-перестановочна в G/N . Таким образом, утверждение (3) доказано.

(4) Заключительное противоречие.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G , содержащаяся в Q . Тогда согласно (3) N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , содержащаяся в Q , и поэтому $N = Q$. Но по лемме 2.4 это невозможно, так как Q – минимальная нормальная подгруппа в G . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Согласно теореме 1.3 из [20] и лемме 2.2 имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с разрешимой нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что любая нециклическая силовская подгруппа P в $F(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , SS-квазинормальны в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть G – группа с нормальной подгруппой E такой, что G/E сверхразрешима. Предположим, что любая нециклическая силовская подгруппа P в $F^*(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , SS-квазинормальны в G . Тогда G сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример наименьшего порядка. Разобьем доказательство на несколько шагов и придем к противоречию.

(1) Докажем, что всякая собственная нормальная подгруппа в G , содержащая $F^*(E)$, сверхразрешима.

Если N – собственная нормальная подгруппа в G , содержащая $F^*(E)$, то $N/N \cap E = NE/E$ сверхразрешима. Согласно лемме 2.6

$$F^*(E) = F^*(F^*(E)) \leq F^*(E \cap N) \leq F^*(E),$$

поэтому $F^*(E \cap N) = F^*(E)$. По лемме 2.1 $(N, N \cap E)$ удовлетворяет предположениям теоремы, поэтому минимальность контрпримера G влечет сверхразрешимость N .

(2) Докажем, что $E = G$ и $F^*(E) = F(G) < G$.

Если $E < G$, то E сверхразрешима согласно (1). В частности, E разрешима, поэтому G тоже разрешима и $F^*(E) = F(E)$ по лемме 2.6, откуда, применяя теорему 3.1, получаем, что G сверхразрешима. Противоречие. Если $F^*(G) = G$, то G сверхразрешима по теореме 3.1. Противоречие. Таким образом, $F^*(E) < G$ и $F^*(E)$ сверхразрешима согласно (1), откуда $F^*(E) = F^*(G) = F(G)$ по лемме 2.6.

(3) Заключительное противоречие.

Пусть P – силовская p -подгруппа в $F(G)$ для некоторого простого p , P_1 – произвольная подгруппа в P порядка $|D|$ и $P_1 \trianglelefteq P \trianglelefteq F(G) \trianglelefteq G$. Согласно предположениям группа P_1 , не имеющая сверхразрешимого добавления в G , SS-квазинормальна в G . Поэтому P_1 , не имеющая сверхразрешимого добавления в G , S-перестановочна в G по лемме 2.2. Таким образом, все подгруппы в P порядка $|D|$, не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , S-перестановочны в G . Применяя теорему 3.1, получаем сверхразрешимость G . Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. По лемме 2.1 все подгруппы любой силовской подгруппы порядка $|D|$ в $F^*(E)$ SS-квазинормальны в $F^*(E)$, поэтому теорема 3.3 влечет сверхразрешимость $F^*(E)$. Следовательно, $F^*(E) = F(E)$ по лемме 2.6. Пусть P – силовская p -подгруппа в $F(E)$ для некоторого простого p и H – произвольная подгруппа порядка $|D|$ в P . Поскольку P нормальна в G , H субнормальна в G . По предположениям и лемме 2.2 группа H , не имеющая сверхразрешимого добавления в G , S-перестановочна в G . Таким образом, все подгруппы в P порядка $|D|$, не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , S-перестановочны в G . Применяя теорему 3.2, получаем, что G принадлежит $\mathcal{F}$.

4. Доказательство основных результатов о S-квазинормально вложенных подгруппах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Через несколько шагов мы придем к противоречию.

(1) Аналогично доказательству теоремы 1.1 G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что G/N p -нильпотентна и $\Phi(G)=1$.

(2) Аналогично доказательству теоремы 1.1 имеем $O_{p'}(G)=1$.

(3) Докажем, что $O_p(G)=1$.

Если $O_p(G) \neq 1$, то $N \leq O_p(G)$ согласно (1). Поэтому G имеет максимальную подгруппу M такую, что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Согласно (1) $\Phi(O_p(G)) = 1$. Таким образом, N и M – подгруппы нормализатора $O_p(G) \cap M$. Следовательно, из единственности N вытекает, что $N = O_p(G)$. По лемме 2.8 в P найдется максимальная подгруппа P_1 такая, что P_1 не имеет p -нильпотентного добавления. Поскольку у N имеется p -нильпотентное добавление M , $N \not\leq P_1$. Более того, по предположениям P_1 S-квазинормально вложена в G , следовательно, в G существует S-квазинормальная подгруппа K такая, что $P_1 \cap T \in \text{Syl}_p(K)$. Предположим, что $K_G \neq 1$, тогда $N \leq K_G \leq K$. Откуда следует, что $N \leq P_1$, и поэтому $P = NP_1 = P_1$. Противоречие. Итак, $K_G = 1$. По лемме 2.9 P_1 S-квазинормальна в G . Таким образом, $P_1 \leq N = O_p(G)$, что является противоречием. Утверждение (3) доказано.

(4) Заключительное противоречие.

Так как G – группа нечетного порядка, G разрешима, что противоречит (2) и (3). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Ясно, что из (i) следует (ii).

Докажем, что (ii) влечет (i). Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Мы докажем теорему в несколько шагов.

(1) Аналогично доказательству теоремы 1.2 имеем $O_{p'}(G) = 1$.

(2) Аналогично доказательству теоремы 1.2 имеем $O_p(G) = 1$.

(3) Заключительное противоречие.

Так как G – группа нечетного порядка, G разрешима, что противоречит (1) и (2). Теорема доказана.

Согласно п. 3 и теореме 1.5 имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа нечетного порядка с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что любая нециклическая силовская подгруппа P в E имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$, не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , S-квазинормально вложены в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

Согласно теореме 1.3 из [20] и лемме 2.2 имеем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа нечетного порядка с разрешимой нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что любая нециклическая силовская подгруппа P в $F(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$, не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , S-квазинормально вложены в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть G – группа нечетного порядка с нормальной подгруппой E такой, что G/E сверхразрешима. Предположим, что любая нециклическая силовская подгруппа P в $F^*(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$, не имеющие сверхразрешимых добавлений в G , S-квазинормально вложены в G . Тогда G сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6 следует из теорем 4.2 и 4.3.

5. Приложения.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть для любого простого делителя p порядка группы G всякая подгруппа $P \in \text{Syl}_p(G)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) SS-квазинормальны в G . Тогда G сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Если P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $2|D|$ (если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) SS-квазинормальны в G , то G p -нильпотентна.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть для любого простого делителя p порядка группы G все максимальные подгруппы любой подгруппы $P \in \text{Syl}_p(G)$ SS-квазинормальны в G . Тогда G сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Если все максимальные подгруппы группы P SS-квазинормальны в G , то G p -нильпотентна.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть G – группа. Если все минимальные подгруппы или все циклические подгруппы порядка 4 SS-квазинормальны в G , то G сверхразрешима.

Авторы благодарны рецензенту и редактору за их ценные предложения и помощь. В особенности авторы признательны рецензенту за подробный отзыв.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [2] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper's Ser. in Modern Math., Harper & Row Publ., New York, 1968.
- [3] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [4] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [5] M. Assad, A. A. Heliel, "On S-quasinormally embedded subgroups of finite groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **165**:2 (2001), 129–135.
- [6] A. Ballester-Bolinchés, M. C. Pedraza-Aguilera, "Sufficient conditions for supersolubility of finite groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **127**:2 (1998), 113–118.
- [7] В. Го, А. Н. Скиба, К. П. Шам, "X-перестановочные подгруппы", *Сиб. матем. журн.*, **48**:4 (2007), 742–759.
- [8] Го Веньбинь, К. П. Шам, А. Н. Скиба, "G-накрывающие системы подгрупп для классов p -сверхразрешимых и p -нильпотентных конечных групп", *Сиб. матем. журн.*, **45**:3 (2004), 527–539.
- [9] Го Вэньбинь, Е. В. Легчекова, А. Н. Скиба, "Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами", *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 350–359.
- [10] O. H. Kegel, "Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen", *Math. Z.*, **78** (1962), 205–221.
- [11] Sh. Li, Zh. Shen, J. Liu, X. Liu, "The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups", *J. Algebra*, **319**:10 (2008), 4275–4287.

- [12] Sh. Li, Zh. Shen, X. Kong, "On SS-quasinormal subgroups of finite groups", *Comm. Algebra*, **36**:12 (2008), 4436–4447.
- [13] Лонг Миао, "Конечные группы с максимальными подгруппами $\mathcal{M}$ -дополняемых силовских подгрупп", *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 692–704.
- [14] Y. Li, Y. Wang, "On S-quasinormally embedded subgroups of finite group", *J. Algebra*, **281**:1 (2004), 109–123.
- [15] M. Ramadan, "The influence of S-quasinormality of some subgroups of prime power order on the structure of finite groups", *Arch. Math. (Basel)*, **77**:2 (2001), 143–148.
- [16] Zh. Shen, Sh. Li, W. Shi, "Finite groups with normally embedded subgroups", *J. Group Theory*, **13**:2 (2010), 257–265.
- [17] Zh. Shen, W. Shi, Q. Zhang, "S-quasinormality of finite groups", *Front. Math. China*, **5**:2 (2010), 329–339.
- [18] Zh. Shen, W. Shi, "The influence of SNS-permutability of some subgroups on the structure of finite groups", *Publ. Math. Debrecen*, **78**:1 (2011), 159–168.
- [19] L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, "On the $\mathcal{X}\Phi$ -hypercentre of finite groups", *J. Algebra*, **322**:6 (2009), 2106–2117.
- [20] A. N. Skiba, "On weakly s -permutable subgroups of finite groups", *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 192–209.
- [21] А. Н. Скиба, О. В. Титов, "Конечные группы с C -квазинормальными подгруппами", *Сиб. матем. журн.*, **48**:3 (2007), 674–688.
- [22] A. N. Skiba, "A note on c -normal subgroups of finite groups", *Algebra Discrete Math.*, 2005, № 3, 85–95.
- [23] И Сяолан, Л. А. Шеметков, "Формация конечных групп со сверхразрешимой π -холловой подгруппой", *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 280–286.

Чжэньцай Шэнь

China Agricultural University

E-mail: zhencai688@163.com, zhencai688@sina.com

Поступило

08.04.2010

Шижун Ли

Guangxi University, China

Цзиньшань Чжан

Sichuan University of Science and Engineering, China