Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сюли Чэнь, Хайянь Чжу, Фан Ли, Размерности кокру-
чения и действия алгебры Хопфа, *Матем. заметки*,
2013, том 93, выпуск 4, 614–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:12:36

Размерности кокручения и действия алгебры Хопфа

Сюли Чэнь, Хайянь Чжу, Фан Ли

Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа над полем k , и пусть A – H -модульная алгебра. В статье рассматривается размерность кокручения smash-произведения $A \# H$. Доказано, что

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A) + \text{r.D}(H);$$

этот результат обобщает соответствующее утверждение о групповых кольцах. Кроме того, получены некоторые достаточные условия выполнения равенства

$$\text{l.cot.D}(A \# H) = \text{l.cot.D}(A).$$

В качестве приложений исследуются инварианты свойств IF и глобальные размерности Горенштейна.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8985

1. Введение. Всюду в статье под модулями подразумеваются произвольные левые модули, а под пространствами – k -пространства над фиксированным полем k . Через H мы всегда обозначаем конечномерную алгебру Хопфа, а через A – H -модульную алгебру. Для кольца A и A -модуля M обозначение $\text{pd}_A(M)$ используется для проективной размерности кольца M , а обозначения $\text{Gpd}_A(M)$, $\text{Gid}_A(M)$ и $\text{Gfd}_A(M)$ – соответственно для проективной, инъективной и плоской размерности в смысле Горенштейна кольца M . Левая (правая) глобальная и слабая размерности алгебры A обозначаются через $\text{l.D}(A)$ ($\text{r.D}(A)$) и $\text{w.D}(A)$.

Пусть A – H -модульная алгебра, и пусть $A \# H$ – соответствующее smash-произведение. Изучение теории действий алгебр Хопфа (в частности, действий групповых алгебр) имеет длинную историю. Довольно подробная информация о действиях алгебр Хопфа содержится в [1]. Развитие теории Галуа привело к появлению многих работ, в которых исследовалась связь между свойствами алгебры A и произведения $A \# H$. Было показано, что тип представления и другие алгебраические свойства сохраняются расширениями Хопфа–Галуа [2], [3]. Кроме того, были рассмотрены инвариантные свойства глобальных размерностей [4], [5]. Как

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (ранты 11271318, 11171296, 11201424), Чжецзянского провинциального национального фонда естественных наук Китая (грант LY12A01026) и Специального научного фонда для подготовки докторов наук Министерства высшего образования Китая (грант 20110101110010).

известно, совершенные кольца – это те кольца, над которыми все плоские модули проективны. Доказано также, что кольцо A левосовершенно тогда и только тогда, когда левая глобальная размерность кокручения алгебры A равна нулю (см. [6; следствие 19.2.9]). Глобальная размерность кокручения кольца измеряет «несовершенство» этого кольца. Поэтому возникает естественный вопрос о совпадении размерностей кокручения алгебры A и произведения $A \# H$.

Пусть G – абелева мультипликативная группа, и пусть R – кольцо с единицей. Согласно [7] групповое кольцо RG совершенно тогда и только тогда, когда кольцо R совершенно, а группа G конечна. В [8] было доказано более общее утверждение:

$$\text{cot.D}(R) \leq \text{cot.D}(RG) \leq \text{cot.D}(R) + \text{pd}_{RG}(R).$$

Кроме того, если размерность $\text{pd}_{RG}(R)$ конечна и G – конечная группа, то

$$\text{cot.D}(R) = \text{cot.D}(RG).$$

В этой статье мы распространим некоторые результаты о действиях групп на действия алгебр Хопфа.

Напомним некоторые понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Размерность кокручения A -модуля M , обозначаемая через $\text{cd}_A(M)$, – это наименьшее натуральное n , для которого все плоские A -модули F удовлетворяют условию $\text{Ext}_A^{n+1}(F, M) = 0$. В частности, если $\text{cd}_A(M) = 0$, то модуль M называется *модулем кокручения*. *Левая глобальная размерность* алгебры A , обозначаемая через $\text{l.cot.D}(A)$, определяется как точная верхняя грань размерностей кокручения всех A -модулей [6].

Глобальная размерность кокручения колец используется также для оценки сверху глобальной размерности колец [6; теорема 19.2.14] при помощи следующего неравенства, которое выполнено для любого кольца A :

$$\text{l.D}(A) \leq \text{w.D}(A) + \text{l.cot.D}(A).$$

Некоторые результаты теории классической гомологической размерности можно распространить на гомологическую размерность в смысле Горенштейна. Определим *левую глобальную размерность по Горенштейну* кольца A как

$$\sup\{\text{Gpd}_A(M) \mid M \text{ является } A\text{-модулем}\}$$

и обозначим ее через $\text{l.GD}(A)$ [9]. Аналогично, число

$$\text{l.wGD}(A) = \sup\{\text{Gfd}_A(M) \mid M \text{ является левым } A\text{-модулем}\}$$

называется *левой слабой глобальной размерностью по Горенштейну* кольца A . Глобальная размерность в смысле Горенштейна измеряет степень «неквазифробениусовости» кольца A (см. [9; предложение 2.6]).

Главная цель этой статьи состоит в исследовании связи между глобальными размерностями кокручения smash-произведения $A \# H$ и алгебры A . В п. 2 мы обобщаем одну теорему о групповых кольцах (а именно, теорему 2.9 из [8]) на алгебры Хопфа. Мы показываем, что

$$\text{cd}_{A \# H}(M) \leq \text{cd}_A(M) + \text{pd}(k_H)$$

(теорема 2.4). Кроме того, мы выводим неравенство

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A) + \text{r.D}(H),$$

из которого вытекает, в частности, что если H полупроста, то

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A)$$

(предложение 2.6). В п. 3 мы доказываем, что если H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа, то

$$\text{l.cot.D}(A \# H) = \text{l.cot.D}(A)$$

в случае, когда H^* полупроста или A коммутативна, а также в случае, когда A/A^H является H^* -алгеброй Галуа. В качестве приложения мы показываем, что в некоторых предположениях кольцо A левосовершенно тогда и только тогда, когда произведение $A \# H$ совершенно; если коммутативное кольцо A удовлетворяет условию $\text{wGD}(A) = 0$, то

$$\text{wGD}(A \# H) = 0 \quad \text{и} \quad \text{GD}(A \# H) = \text{GD}(A).$$

2. Размерности кручения. Пусть M и N – $A \# H$ -модули. Рассмотрим правый H -модуль $\text{Hom}_A(M, N)$ с операцией

$$(f \cdot h)(x) = \Sigma s(h_1)f(h_2x),$$

где $h \in H$ и $x \in M$.

ЛЕММА 2.1. Для $A \# H$ -модулей M и N существует естественный изоморфизм между билинейной функцией $\text{Hom}_{A \# H}(\cdot, \cdot)$ и $\text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(\cdot, \cdot))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M и N – $A \# H$ -модули. Начнем с того, что по лемме 2.1 из [10] найдется канонический k -линейный изоморфизм

$$\eta_{M,N}: \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(M, N)) \rightarrow \text{Hom}_{A \# H}(M, N),$$

определенный правилом $\eta_{M,N}: f \mapsto f(1)$. Предположим, что $g: M' \rightarrow M$ – морфизм $A \# H$ -модулей и

$$\tilde{g} \triangleq \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(g, N)): \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(M, N)) \rightarrow \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(M', N)).$$

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(M, N)) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(M', N)) \\ \downarrow \eta_{M,N} & & \downarrow \eta_{M',N} \\ \text{Hom}_{A \# H}(M, N) & \xrightarrow{\text{Hom}_{A \# H}(g, N)} & \text{Hom}_{A \# H}(M', N) \end{array}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A \# H}(g, N) \circ \eta_{M,N}(f) &= \text{Hom}_{A \# H}(g, N)(f(1)) = f(1)g, \\ \eta_{M',N} \circ \tilde{g}(f) &= \eta_{M',N}(\text{Hom}_A(g, N)f) = (\text{Hom}_A(g, N)f)(1) = f(1)g. \end{aligned}$$

Естественность относительно N легко проверяется двойственным образом.

ЛЕММА 2.2. Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа, а M и N – два $A \# H$ -модуля, удовлетворяющих условию

$$\text{Ext}_A^p(M, N) = 0 \quad \text{для всех } p > 0.$$

Тогда

$$\text{Ext}_{A \# H}^n(M, N) \cong \text{Ext}_H^n(k, \text{Hom}_A(M, N)) \quad \text{для всех } n > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность $A \# H$ -модулей, где P – проективный $A \# H$ -модуль. Поскольку $\text{Ext}_A^p(M, N) = 0$ для всех $p > 0$, имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N) \rightarrow \text{Hom}_A(C, N) \rightarrow 0,$$

и имеем

$$\text{Ext}_A^p(C, N) \cong \text{Ext}_A^{p+1}(M, N) = 0 \quad \text{для любого } p > 0.$$

Кроме того, применяя теорему 11.56 из [11], лемму 2.1 и равенство

$$\text{Ext}_H^n(k, \text{Hom}_A(P, N)) = 0,$$

которое выполнено для любого $n > 1$, получаем точные коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(P, N)) & \longrightarrow & \text{Hom}_H(k, \text{Hom}_A(C, N)) & \longrightarrow & \text{Ext}_H^1(k, \text{Hom}_A(M, N)) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Hom}_{A \# H}(P, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A \# H}(C, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_{A \# H}^1(M, N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_H^n(k, \text{Hom}_A(C, N)) & \longrightarrow & \text{Ext}_H^{n+1}(k, \text{Hom}_A(M, N)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{A \# H}^n(C, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_{A \# H}^{n+1}(M, N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ясно, что

$$\text{Ext}_H^1(k, \text{Hom}_A(M, N)) \cong \text{Ext}_{A \# H}^1(M, N)$$

(по лемме 2.1). Наконец, заменяя M на C и применяя индукцию к указанным выше диаграммам, мы получаем требуемый результат.

ЛЕММА 2.3. Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа. Тогда для любого $A \# H$ -модуля M имеет место неравенство

$$\text{cd}_A(M) \leq \text{cd}_{A \# H}(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$\text{cd}_{A \# H}(M) = n < \infty.$$

Пусть F – плоский A -модуль. Поскольку $A \# H$ является свободным A -модулем, произведение $A \# H \otimes_A F$ является плоским $A \# H$ -модулем. Значит, по предположению

$$\operatorname{Ext}_{A \# H}^{n+1}(A \# H \otimes_A F, M) = 0.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Ext}_A^{n+1}(F, M) \cong \operatorname{Ext}_{A \# H}^{n+1}(A \# H \otimes_A F, M)$$

по теореме 11.65 из [11]; поэтому $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(F, M) = 0$. Таким образом, $\operatorname{cd}_A(M) \leq n$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа, и пусть M – $A \# H$ -модуль. Тогда

$$\operatorname{cd}_{A \# H}(M) \leq \operatorname{cd}_A(M) + \operatorname{pd}(k_H).$$

Если, кроме того, алгебра H полупроста, то

$$\operatorname{cd}_{A \# H}(M) \leq \operatorname{cd}_A(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\operatorname{cd}_A(M) = i < \infty$ и $\operatorname{pd}(k_H) = j < \infty$. Согласно [12] для любого $A \# H$ -модуля M существует точная последовательность $A \# H$ -модулей

$$0 \rightarrow M \rightarrow C^0 \rightarrow \dots \rightarrow C^{i-1} \rightarrow C \rightarrow 0,$$

где $C^0, \dots, C^{i-1}$ – $A \# H$ -модули кокручения. Заметим, что выполнено $\operatorname{cd}_A(M) = i$ и $C^0, \dots, C^{i-1}$ являются A -модулями кокручения по лемме 2.3, поэтому согласно теореме 19.2.5 из [6] C тоже является A -модулем кокручения. Таким образом, $\operatorname{Ext}_A^n(F, C) = 0$ для всех $n > 0$ и всех плоских A -модулей F . Поскольку $\operatorname{pd}(k_H) = j$, по лемме 2.2 имеем

$$\operatorname{Ext}_{A \# H}^{j+1}(F, C) \cong \operatorname{Ext}_H^{j+1}(k, \operatorname{Hom}_A(F, C)) = 0$$

для любого плоского $A \# H$ -модуля F , откуда $\operatorname{cd}_{A \# H}(C) \leq j$. Снова применяя теорему 19.2.5 из [6], получаем точную последовательность $A \# H$ -модулей

$$0 \rightarrow C \rightarrow C^i \rightarrow C^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow C^{i+j} \rightarrow 0,$$

где $C^i, \dots, C^{i+j}$ – $A \# H$ модули кокручения. Значит, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow C^0 \rightarrow \dots \rightarrow C^{i-1} \rightarrow C^i \rightarrow \dots \rightarrow C^{i+j} \rightarrow 0,$$

в которой каждый C^i – модуль кокручения, откуда $\operatorname{cd}_{A \# H}(M) \leq i + j$, что и требовалось.

Если при этом алгебра H полупроста, то $\operatorname{pd}(k_H) = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{cd}_{A \# H}(M) \leq \operatorname{cd}_A(M).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Предположим, что H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа. Тогда

$$\operatorname{cd}_A(M) = \operatorname{cd}_{A \# H}(M) \quad \text{для любого } A \# H\text{-модуля } M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.3 и теоремы 2.4 немедленно вытекает необходимое равенство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа. Тогда

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A) + \text{r.D}(H).$$

В частности, если алгебра H полупроста, то

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, по теореме 2.4 имеем

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A) + \text{pd}(k_H).$$

Как известно, $\text{r.D}(H) = \text{pd}(k_H)$ для любой алгебры Хопфа H (см. [10]), откуда

$$\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A) + \text{r.D}(H).$$

3. Приложения. В этом пункте мы построим некоторые инварианты относительно расширений Хопфа с использованием размерностей кокручения.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа. Тогда

$$\text{l.cot.D}(A \# H) = \text{l.cot.D}(A),$$

если выполнено одно из следующих условий:

- 1) H^* полупроста;
- 2) A коммутативна;
- 3) A/A^H является H^* -алгеброй Галуа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.6 имеем $\text{l.cot.D}(A \# H) \leq \text{l.cot.D}(A)$.

- 1) Заметим, что $A \# H$ – H^* -модульная алгебра относительно операции

$$f \cdot (a \# h) = \sum_{(h)} a \# f(h_2)h_1.$$

Если алгебра H^* полупроста, то

$$\text{l.cot.D}(A) \leq \text{l.cot.D}(A \# H)$$

в силу теоремы Блаттнера–Монтгомери о двойственности и предложения 2.6.

- 2) Предположим, что $\text{l.cot.D}(A \# H) = n$ конечно. Согласно [6; теорема 19.2.5] имеем

$$\text{l.cot.D}(A) = \sup\{\text{pd}_A(F) \mid F \text{ является плоским } A\text{-модулем}\}.$$

Пусть F – плоский A -модуль; тогда $A \# H \otimes_A F$ является плоским $A \# H$ -модулем. Из полупростоты алгебры H вытекает неравенство $\varepsilon(t) \neq 0$. Выберем $t \in \int_H^l$, для которого $\varepsilon(t) = 1$; тогда $t \cdot c = 1$, где $c = 1 \in A$. Согласно [3; предложение 2.1] отображение $\varepsilon_l: A \# H \rightarrow A$, определенное правилом $\varepsilon_l: a \# h \mapsto \varepsilon(h)a$, является

расщепляющим $A \# H$ -эпиморфизмом. Поскольку алгебра A коммутативна, $A \# H$ является (A, A) -бимодулем относительно

$$b \rightarrow (a \# h) \leftarrow c = abc \# h, \quad \text{где } a, b, c \in A, \quad h \in H.$$

При этом ε_l является гомоморфизмом (A, A) -бимодулей. Действительно, имеем

$$\varepsilon_l(b \rightarrow (a \# h) \leftarrow c) = \varepsilon_l(abc \# h) = \varepsilon_l(ab \# h) \leftarrow c = b \rightarrow \varepsilon_l(a \# h) \leftarrow c.$$

Поэтому A является прямым слагаемым в $A \# H$ как A -бимодуль. Следовательно,

$$A \# H \otimes_A F \cong F \oplus (X \otimes_A F).$$

Отсюда вытекает, что $\text{pd}_A(F) \leq \text{pd}_A(A \# H \otimes_A F)$. Легко показать, что

$$\text{pd}_A(A \# H \otimes_A F) \leq \text{pd}_{A \# H}(A \# H \otimes_A F) \leq n.$$

Значит,

$$\text{l.cot.D}(A) \leq \text{l.cot.D}(A \# H).$$

3) Поскольку H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа, из теоремы Машке, примененной к расширению $A \# H/A$, вытекает сепарабельность этого расширения. Пусть $A/A^H - H^*$ -алгебра Галуа; тогда A является прямым слагаемым в $A \# H$ как A -бимодуль согласно [3; следствие 5.2]. Таким образом, имеет место изоморфизм A -бимодулей $A \# H \cong A \oplus X$. Пусть $M - A$ -модуль; тогда

$$A \# H \otimes_A M \cong M \oplus (X \otimes_A M),$$

откуда вытекает неравенство

$$\text{cd}_A(M) \leq \text{cd}_A(A \# H \otimes_A M).$$

По лемме 2.3 имеем

$$\text{cd}_A(A \# H \otimes_A M) \leq \text{cd}_{A \# H}(A \# H \otimes_A M) \leq \text{l.cot.D}(A \# H),$$

что и требовалось.

Кольцо R левосовершенно тогда и только тогда, когда $\text{l.cot.D}(R) = 0$ [6; следствие 19.2.9]; отсюда вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа. Если выполнено одно из следующих условий:

- 1) H^* полупроста;
- 2) A коммутативна;
- 3) A/A^H является H^* -алгеброй Галуа,

то кольцо A левосовершенно тогда и только тогда, когда $A \# H$ левосовершенно.

Пусть R – кольцо. Левый R -модуль M называется FP -инъективным, если выполнено $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$ для каждого конечно копредставимого левого R -модуля F

(см. [13]). Для R -модуля M его FP -инъективная размерность $\text{FP-id}(M)$ определяется как *наименьшее целое n* , при котором $\text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0$ для каждого конечно копредставимого R -модуля F . Если такого n нет, полагаем $\text{FP-id}(M) = \infty$.

Напомним, что кольцо R является *левокогерентным*, если каждый конечнопорожденный левый идеал в R конечно копредставим. Кольцо R называется *левым FC -кольцом*, если R левокогерентно и является левым FP -инъективным R -модулем. Кольцо R называется *левым (правым) IF -кольцом*, если каждый левый (соответственно правый) инъективный R -модуль является плоским; R называется *IF -кольцом (FC-кольцом)*, если оно является левым и правым IF -кольцом (FC-кольцом). Кольцо R является FC -кольцом тогда и только тогда, когда оно является IF -кольцом (см. [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть A – коммутативное кольцо такое, что $\text{wGD}(A) = 0$. Если H – конечномерная полупростая алгебра, то

$$\text{wGD}(A \# H) = 0 \quad \text{и} \quad \text{GD}(A \# H) = \text{GD}(A).$$

В доказательстве этого предложения используются следующие леммы.

ЛЕММА 3.4. Если H – конечномерная полупростая алгебра и A левокогерентно, то произведение $A \# H$ тоже левокогерентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из леммы 3.1 в [15].

ЛЕММА 3.5. Пусть A – левокогерентное кольцо и H – конечномерная полупростая алгебра. Тогда $\text{FP-id}_A(A) = n$ в том и только том случае, если

$$\text{FP-id}_{A \# H}(A \# H) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{FP-id}_A(A) = n < \infty$; тогда имеет место точная последовательность A -модулей

$$0 \rightarrow A \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_n \rightarrow 0,$$

где $E_0, \dots, E_n$ FP -инъективны как A -модули по лемме 3.1 [13]. Поскольку $A \# H \otimes_A$ точно, последовательность

$$0 \rightarrow A \# H \otimes_A A \cong A \# H \rightarrow A \# H \otimes_A E_0 \rightarrow \cdots \rightarrow A \# H \otimes_A E_n \rightarrow 0,$$

в которой все $A \# H \otimes_A E_i$ FP -инъективны как $A \# H$ -модули по лемме 3.3 из [15], точна. Значит,

$$\text{FP-id}_{A \# H}(A \# H) \leq \text{FP-id}_A(A) = n.$$

Из полупростоты алгебры H вытекает неравенство $\varepsilon(t) \neq 0$. Выберем $t \in \int_H^l$, для которого $\varepsilon(t) = 1$; тогда $t \cdot c = 1$, где $c = 1 \in A$. Таким образом, A является прямым слагаемым в $A \# H$ как $A \# H$ -модуль в силу теоремы 2.2 из [5]. Следовательно,

$$\text{FP-id}_{A \# H}(A) \leq \text{FP-id}_{A \# H}(A \# H).$$

Мы утверждаем, что

$$\text{FP-id}_A(A) \leq \text{FP-id}_{A \# H}(A).$$

Предположим, что

$$\text{FP-id}_{A\#H}(A) = n < \infty.$$

Тогда имеет место точная последовательность $A \# H$ -модулей

$$0 \rightarrow A \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_n \rightarrow 0,$$

где все E_i FP-инъективны как $A \# H$ -модули. Снова применяя лемму 3.3 из [15], мы видим, что все E_i являются также FP-инъективными A -модулями, откуда получаем $\text{FP-id}_A(A) \leq n$.

Очевидно,

$$\text{FP-id}_A(A) = \text{FP-id}_{A\#H}(A),$$

что и требовалось.

Как известно, кольцо R является IF-кольцом тогда и только тогда, когда выполнено $\text{l.wGD}(R) = 0$ [16; предложение 1.5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3. Поскольку $\text{wGD}(A) = 0$, A является IF-кольцом. Произведение $A \# H$ также является IF-кольцом (по лемме 3.5), а значит, $\text{wGD}(A \# H) = 0$. Согласно [8; теорема 2.1] имеем

$$\text{GD}(A) = \text{l.cot.D}(A) \quad \text{и} \quad \text{GD}(A \# H) = \text{l.cot.D}(A \# H).$$

Поскольку H – конечномерная полупростая алгебра, имеем также

$$\text{l.cot.D}(A) = \text{l.cot.D}(A \# H)$$

(по теореме 3.1, (2)). Значит,

$$\text{GD}(A \# H) = \text{GD}(A).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Если H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа и A коммутативна, то A является IF-кольцом тогда и только тогда, когда $A \# H$ является IF-кольцом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [2] G. X. Liu, *Classification of Finite Dimensional Basic Hopf Algebras and Related Topics*, Dissertation for the Doctoral Degree, Zhejiang University, Hangzhou, 2005.
- [3] F. van Oystaeyen, Y. Xu, Y. Zhang, “Inductions and coinduction for Hopf Extensions”, *Sci. China. Ser. A*, **39**:3 (1996), 246–263.
- [4] G. Liu, “A note on the global dimension of smash products”, *Comm. Algebra*, **33**:8 (2005), 2625–2657.
- [5] S. Yang, “Global dimension for Hopf actions”, *Comm. Algebra*, **30**:8 (2002), 3653–3667.
- [6] L. Mao, N. Ding, “The cotorsion dimension of modules and rings”, *Abelian Groups, Rings, Modules, and Homological Algebra*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **249**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005, 217–233.
- [7] S. M. Woods, “On perfect group rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 49–52.

- [8] D. Bennis, N. Mahdou, “Gorenstein global dimensions and cotorsion dimension of rings”, *Comm. Algebra*, **37**:5 (2009), 1709–1718.
- [9] D. Bennis, N. Mahdou, “Global Gorenstein dimensions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:2 (2010), 461–465.
- [10] M. E. Lorenz, M. Lorenz, “On crossed products of Hopf algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:1 (1995), 33–38.
- [11] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Pure Appl. Math., **85**, Academic Press, New York, 1979.
- [12] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [13] B. Stenström, “Coherent rings and FP-injective modules”, *J. London Math. Soc.* (2), **2** (1970), 323–329.
- [14] N. Ding, J. Chen, “Coherent rings with finite self-FP-injective dimension”, *Comm. Algebra*, **24**:9 (1996), 2963–2980.
- [15] X. Chen, H. Zhu, F. Li, “Invariants of FP-projective dimensions under Hopf Algebra actions” (to appear).
- [16] N. Mahdou, M. Tamekkante, *Note on (Weak) Gorenstein Global Dimensions*, [arXiv: math.AC/0910.5752](https://arxiv.org/abs/math.AC/0910.5752).

Сюли Чэнь

Zhejiang University, Китай

E-mail: xiulicheng1021@126.com

Поступило

08.09.2010

Исправленный вариант

06.01.2011

Хайянь Чжу

Zhejiang University, Китай

E-mail: haiyzhu@gmail.com

Фан Ли

Zhejiang University, Китай

E-mail: fangli@zju.edu.cn