Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Гуанвей Чен, Нелинейное эллиптическое уравнение
с младшим членом и вырождающейся коэрцитивностью,
Матем. заметки, 2013, том 93, выпуск 2, 179–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:16:54

Нелинейное эллиптическое уравнение с младшим членом и вырождающейся коэрцитивностью

Гуаньвэй Чэнь

В статье изучается регуляризующее влияние младшего члена в нелинейной эллиптической задаче с вырождающейся коэрцитивностью. Показано, что наличие младших членов определенного вида оказывает регуляризующее воздействие на решение. Полученные результаты являются обобщением некоторых известных результатов.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8989

1. Введение и основные результаты. Мы рассматриваем следующую задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-1}u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

В данной работе мы хотим изучить регуляризующее влияние младшего члена $|u|^{q-1}u$ в случае эллиптического оператора с вырождающейся коэрцитивностью. Более подробно, рассмотрим дифференциальный оператор

$$A(u) = -\operatorname{div}(a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \quad (1.2)$$

при следующих предположениях: Ω – открытое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, а $a: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условию Каратеодори и такая, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $s \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$a(x, s) \geq \frac{\alpha}{(1 + |s|)^\gamma}, \quad (1.3)$$

$$|a(x, s)| \leq \beta \quad (1.4)$$

с некоторыми положительными постоянными α, β, γ . Из предположения (1.3) следует, что дифференциальный оператор A корректно определен на $W_0^{1,p}(\Omega)$, но он не является коэрцитивным на этом пространстве при больших u (см. [1]). Из-за

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда естественных наук Китая.

отсутствия коэрцитивности неприменима классическая теория эллиптических операторов, действующих между двойственными пространствами (см. [2]). Несмотря на эту трудность, некоторые статьи о задачах Дирихле с дифференциальным оператором A (при $p = 2$) все же существуют (см. [3]–[9]). В частности, в работах [3], [4], [6] доказано существование решений дифференциальной задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

для случая, когда $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$ и $\gamma \in (0, 1]$.

Изучена задача (1.1) для случая $p = 2$, т.е. задача

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + |u|^{q-1}u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Для различных значений q автор [10] изучал регуляризующее действие младшего члена $|u|^{q-1}u$ в (1.6) на решения для случая $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$, $\gamma \in (0, 1]$. О других относящихся к теме исследования работах можно прочесть в [11], [12].

Мы изучим существование решений в смысле распределений, т.е. существование функции u по крайней мере из $W_0^{1,1}(\Omega)$ такой, что $|u|^q \in L^1(\Omega)$, $a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in L^1(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} |u|^{q-1}u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.7)$$

Будем также использовать более слабое понятие решения, а именно, энтропийное решение. Напомним, что решения такого типа были введены в [13]. Положим

$$T_k(s) := \max\{-k, \min\{k, s\}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Измеримая функция u называется *энтропийным решением* задачи (1.1), если $|u|^q \in L^1(\Omega)$, $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ для любого $k > 0$ и

$$\int_{\Omega} a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla T_k(u - \varphi) \, dx + \int_{\Omega} |u|^{q-1}u T_k(u - \varphi) \, dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) \, dx \quad (1.8)$$

для любой функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство Марцинкевича $M^s(\Omega)$, $s > 0$, состоит из всевозможных измеримых функций $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующему условию: существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\operatorname{meas}\{|v| \geq k\} \leq \frac{c}{k^s} \quad \text{для всех } k > 0.$$

Если $|\Omega| < \infty$ и $0 < \varepsilon < s - 1$, то можно показать, что $L^s(\Omega) \subset M^s(\Omega) \subset L^{s-\varepsilon}(\Omega)$. Пусть

$$p_0 := 1 + \frac{(N-1)(\gamma+1)}{N}.$$

Основные результаты данной работы следующие.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, $1 < p < N$. Тогда

- (1) если $q > (1 + \gamma)/(p - 1)$, то у задачи (1.1) имеется решение u в смысле распределений такое, что $u \in W_0^{1,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, где $1 < r < pq/(q + 1 + \gamma)$;
- (2) если $0 < q \leq (1 + \gamma)/(p - 1)$, то у задачи (1.1) имеется энтропийное решение u такое, что $|u|^q \in L^1(\Omega)$ и $|\nabla u| \in M^{pq/(q+1+\gamma)}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L^1(\Omega)$, $p_0 < p < N$. Тогда

- (1) если $0 < q \leq N/(N - 1)$, то у задачи (1.1) существует решение u в смысле распределений такое, что $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$, где $1 < r < N(p - 1 - \gamma)/(N - 1 - \gamma)$;
- (2) если $N/(N - 1) < q < N(p - 1 - \gamma)/(N - p)$, то справедливо утверждение (2) теоремы 1;
- (3) если $q \geq N(p - 1 - \gamma)/(N - p)$, то справедливо утверждение (1) теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in L^m(\Omega)$, $m > 1$, $1 < p < N$. Тогда

- (1) если $q \geq (1 + \gamma)/(m - 1)$, то у задачи (1.1) существует решение u в смысле распределений такое, что $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{qm}(\Omega)$;
- (2) если $(1 + \gamma)/(pm - 1) < q < (1 + \gamma)/(m - 1)$, то у задачи (1.1) существует решение u в смысле распределений такое, что $|u|^{qm} \in L^1(\Omega)$ и $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, $1 < \sigma = pqt/(q + 1 + \gamma)$;
- (3) если $0 < q \leq (1 + \gamma)/(pm - 1)$, то у задачи (1.1) имеется энтропийное решение u такое, что $|u|^{qm} \in L^1(\Omega)$ и $|\nabla u| \in M^{pqt/(q+1+\gamma)}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in L^m(\Omega)$, $m > 1$, $p_0 < p < N$. Тогда

- (1) если $0 < q \leq N/(m(N - 1))$, то у задачи (1.1) существует решение u в смысле распределений такое, что $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, где

$$1 < \sigma = \frac{N[p + q(m - 1) - 1 - \gamma]}{N + q(m - 1) - 1 - \gamma};$$

- (2) если $q \geq N/(m(N - 1))$, то справедливо утверждение (2) теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 1 и 3 являются обобщениями теорем 1.4 и 1.5 из [10] соответственно. В работе [10] изучался только частный случай $p = 2$. В теореме 2 легко проверить, что интервал $N/(N - 1) < q < N(p - 1 - \gamma)/(N - p)$ имеет смысл, поскольку $p > p_0$; кроме того, из условия $q \leq N/(N - 1)$ вытекает, что $q \leq r^*$ для $r \geq 1$. В теореме 4 из условия $q \leq N/(m(N - 1))$ следует, что $qt \leq \sigma^*$ при $\sigma \geq 1$.

План оставшейся части работы следующий. В п. 2 приведены некоторые предварительные результаты, которые понадобятся в следующем пункте. В п. 3 даны подробные доказательства основных результатов.

2. Предварительные сведения. Для доказательства теорем 1–4 мы будем использовать следующую приближенную задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) + |u_n|^{q-1}u_n = T_n(f) & \text{в } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Чтобы доказать основные результаты, нам нужна следующая

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ у задачи (2.1) существует решение $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такое, что

$$\int_{\Omega} |u_n|^{qm} dx \leq \int_{\Omega} |f|^m dx \quad (2.2)$$

и u_n удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, T_n(u_n)) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |u_n|^{q-1} u_n \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} T_n(f) \varphi dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, T_n(u_{n_k})) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k}) + T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k}) = T_n(f) & \text{в } \Omega, \\ u_{n_k} = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Оператор

$$u_{n_k} \rightarrow -\operatorname{div}(a(x, T_n(u_{n_k})) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k}) + T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k})$$

удовлетворяет условиям стандартных теорем для эллиптических операторов (см. [2]), поэтому у задачи (2.4) существует решение $u_{n_k} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, T_n(u_{n_k})) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k}) \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} T_n(f) \varphi dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выбирая $\varphi = u_{n_k}$ в (2.5), в силу (1.3) и того факта, что $T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k}) u_{n_k} \geq 0$, получаем

$$C \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^p dx \leq C_0 \int_{\Omega} |u_{n_k}| dx.$$

Из неравенства Гёльдера и ε -неравенства Юнга, примененных к правой части, следует, что

$$\int_{\Omega} |u_{n_k}| dx \leq \varepsilon C_1 \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^p dx + C_2,$$

так что

$$C \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^p dx \leq \varepsilon C_1 \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^p dx + C_2.$$

Выберем подходящее ε , тогда

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^p dx \leq C \quad \forall k > 0.$$

Следовательно, существует функция $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_n \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_{n_k} \rightarrow u_n \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Выбирая $\varphi = u_{n_k} - u_n$ в (2.5), легко показать, что

$$\int_{\Omega} [a(x, T_n(u_{n_k})) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - a(x, T_n(u_{n_k})) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n] (\nabla u_{n_k} - \nabla u_n) dx \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$.

Как следствие [14; лемма 5] получаем

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u_n \quad \text{почти всюду в } \Omega \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Мы собираемся доказать, что условие (2.3) выполнено, переходя к пределу в (2.5). Так как $u_{n_k} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u_n$ почти всюду в Ω , то

$$|\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \rightharpoonup |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $p' = p/(p-1)$. Очевидно, что $a(x, T_n(u_{n_k})) \nabla \varphi \in L^p(\Omega)$. Поэтому для любого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ и для любого $k > 0$ имеем

$$\int_E |a(x, T_n(u_{n_k})) \nabla \varphi|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \text{meas } E \rightarrow 0.$$

При этом $a(x, T_n(u_{n_k})) \nabla \varphi \rightarrow a(x, T_n(u_n)) \nabla \varphi$ почти всюду в Ω . По теореме Витали получаем

$$a(x, T_n(u_{n_k})) \nabla \varphi \rightarrow a(x, T_n(u_n)) \nabla \varphi \quad \text{в } L^p(\Omega),$$

так что можно перейти к пределу в первом члене в левой части в (2.5). Так же, как и в [15], получаем

$$\int_{\{|u_{n_k}| > t\}} |T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k})| dx \leq \int_{\{|u_{n_k}| > t\}} |T_n(f)| dx.$$

Поэтому для любого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ верно, что

$$\begin{aligned} \int_E |T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k})| dx &\leq t^q (\text{meas } E) + \int_{E \cap \{|u_{n_k}| > t\}} |T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k})| dx \\ &\leq t^q (\text{meas } E) + \int_{\{|u_{n_k}| > t\}} |T_n(f)| dx. \end{aligned}$$

Поскольку $f \in L^1(\Omega)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что

$$\int_{\{|u_{n_k}| > t\}} |T_n(f)| \leq \varepsilon.$$

По теореме Витали получаем

$$T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k}) \rightarrow |u_n|^{q-1} u_n \quad \text{в } L^1(\Omega),$$

а следовательно,

$$T_k(|u_{n_k}|^{q-1} u_{n_k}) \varphi \rightarrow |u_n|^{q-1} u_n \varphi \quad \text{в } L^1(\Omega).$$

Таким образом, можно получить условие (2.3), переходя к пределу в (2.5).

Чтобы доказать (2.2), рассмотрим случаи $m > 1$ и $m = 1$.

Случай $m > 1$. Выбирая $\varphi = |u_n|^{q(m-1)} \text{sign}(u_n)$ в (2.3), получаем

$$\int_{\Omega} |u_n|^{qm} dx \leq \int_{\Omega} |f| |u_n|^{q(m-1)} dx.$$

Применение неравенства Гёльдера к правой части дает

$$\int_{\Omega} |f| |u_n|^{q(m-1)} dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^m dx \right)^{1/m} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{qm} dx \right)^{1-1/m},$$

поэтому

$$\int_{\Omega} |u_n|^{qm} dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^m dx \right)^{1/m} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{qm} dx \right)^{1-1/m},$$

откуда следует (2.2).

Случай $m = 1$. Выбирая $\varphi = T_k(u_n)/k$ в (2.3), получаем

$$\int_{\Omega} |u_n|^{q-1} u_n \frac{T_k(u_n)}{k} dx \leq \int_{\Omega} T_n(f) \frac{T_k(u_n)}{k} dx \leq \int_{\Omega} |f| dx.$$

При $k \rightarrow 0$ из леммы Фату следует, что выполнена оценка (2.2).

ЛЕММА 2. Пусть u – измеримая функция из $M^s(\Omega)$, $s > 0$, и пусть существует положительная постоянная $\rho > 0$ такая, что

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq C k^{\rho} \quad \forall k > 0.$$

Тогда $|\nabla u| \in M^{ps/(\rho+s)}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – фиксированное положительное число. Для любого $k > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{meas}\{|\nabla u| > \lambda\} &= \text{meas}\{|\nabla u| > \lambda, |u| \leq k\} + \text{meas}\{|\nabla u| > \lambda, |u| > k\} \\ &\leq \text{meas}\{|\nabla u| > \lambda, |u| \leq k\} + \text{meas}\{|u| > k\} \end{aligned}$$

и

$$\text{meas}\{|\nabla u| > \lambda, |u| \leq k\} \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq C \frac{k^{\rho}}{\lambda^p}.$$

Так как $u \in M^s(\Omega)$, то

$$\text{meas}\{|\nabla u| > \lambda\} \leq C \frac{k^{\rho}}{\lambda^p} + \frac{C}{k^s},$$

и последнее неравенство выполнено при любом $k > 0$. Минимизируя по k , легко получаем

$$\text{meas}\{|\nabla u| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda^{ps/(\rho+s)}}.$$

Таким образом, $|\nabla u| \in M^{ps/(\rho+s)}(\Omega)$.

ЛЕММА 3. Пусть u_n – последовательность измеримых функций такая, что последовательность $T_k(u_n)$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$ при любом $k > 0$. Тогда существует измеримая функция u такая, что $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, причем

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $u_n \rightarrow u$ локально по мере. Прежде всего заметим, что при $t, \varepsilon > 0$ справедливо включение

$$\{|u_n - u_m| > t\} \subset \{|u_n| > k\} \cup \{|u_m| > k\} \cup \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{meas}\{|u_n - u_m| > t\} \\ \leq \text{meas}\{|u_n| > k\} + \text{meas}\{|u_m| > k\} + \text{meas}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}. \end{aligned}$$

Выбирая достаточно большое k , получаем

$$\text{meas}\{|u_n| > k\} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \text{meas}\{|u_m| > k\} < \varepsilon.$$

Можно считать, что $\{T_k(u_n)\}$ – последовательность Коши в $L^q(\Omega)$ для любого $q < p^* = Np/(N-p)$. Тогда

$$\text{meas}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\} \leq t^{-q} \int_{\Omega} |T_k(u_n) - T_k(u_m)|^q dx \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(k, t).$$

Это доказывает, что $\{u_n\}$ – последовательность Коши по мере в Ω . Поэтому существует измеримая функция u такая, что $u_n \rightarrow u$ по мере. Из этого вытекает, что $u_n \rightarrow u$ почти всюду в Ω , так что

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega).$$

3. Доказательства основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Разделим доказательство на две части в зависимости от значений q .

Часть I. Пусть $q > (1 + \gamma)/(p - 1)$. Возьмем

$$\varphi = [(1 + |u_n|)^{1-\lambda} - 1] \text{sign}(u_n), \quad \lambda > 1,$$

в (2.3), тогда второе слагаемое неотрицательно. Используя предположение (1.3), получаем

$$C \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{\gamma+\lambda}} dx \leq \int_{\Omega} |f| dx < \infty. \quad (3.1)$$

Пусть $r < p$; записывая

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^r}{(1 + |u_n|)^{r(\gamma+\lambda)/p}} (1 + |u_n|)^{r(\gamma+\lambda)/p} dx$$

и используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^r}{(1 + |u_n|)^{r(\gamma+\lambda)/p}} (1 + |u_n|)^{r(\gamma+\lambda)/p} dx \leq C \left[\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{r(\gamma+\lambda)/(p-r)} dx \right]^{1-r/p}.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx \leq C \left[\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{r(\gamma+\lambda)/(p-r)} dx \right]^{1-r/p}.$$

В силу леммы 1, если $r(\gamma + \lambda)/(p - r) \leq q$, т.е. $r \leq pq/(q + \lambda + \gamma) < pq/(q + 1 + \gamma)$, то из неравенства $q > (1 + \gamma)/(p - 1)$ вытекает, что $pq/(q + 1 + \gamma) > 1$. Тогда правая часть равномерно ограничена, и поэтому

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx \leq C, \quad r < \frac{pq}{q + 1 + \gamma}.$$

Следовательно, существует функция $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ такая, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } W_0^{1,r}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Пусть

$$h_n = T_n(f) - T_n(|u_n|^{q-1}u_n).$$

Поскольку последовательность h_n ограничена в $L^1(\Omega)$, а u_n — решение задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = h_n, \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

из леммы 1 (см. [16]) вытекает, что

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{почти всюду в } \Omega. \quad (3.2)$$

Мы собираемся доказать, что u — решение задачи (1.1) в смысле распределений, переходя к пределу в (2.3). Будем предполагать, что $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \in L^{r/(p-1)}(\Omega)$ и выполнено (3.2), получаем, что

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \text{слабо в } L^{r/(p-1)}(\Omega).$$

По теореме Витали

$$a(x, T_n(u_n))\nabla \varphi \rightarrow a(x, u)\nabla \varphi \quad \text{в } L^{(r/(p-1))'}(\Omega),$$

где $(r/(p-1))' = (p-1-r)/(p-1)$. Поэтому мы можем перейти к пределу в первом члене в левой части (2.3). Покажем, что

$$|u_n|^{q-1}u_n \rightarrow |u|^{q-1}u \quad \text{в } L^1(\Omega).$$

В духе [15] получаем

$$\int_{\{|u_n|>t\}} |u_n|^q dx \leq \int_{\{|u_n|>t\}} |f| dx. \quad (3.3)$$

Используя предположение (3.3), для любого $t > 0$ имеем

$$\int_E |u_n|^q dx \leq t^q(\operatorname{meas} E) + \int_{E \cap \{|u_n|>t\}} |u_n|^q dx \leq t^q(\operatorname{meas} E) + \int_{\{|u_n|>t\}} |f| dx.$$

Так как $f \in L^1(\Omega)$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что

$$\int_{\{|u_n| > t_\varepsilon\}} |f| dx \leq \varepsilon.$$

Пусть $E \subset \Omega$ – любое измеримое множество; тогда для любого n имеем

$$\int_E |u_n|^q dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \text{meas } E \rightarrow 0.$$

По теореме Витали

$$|u_n|^{q-1} u_n \rightarrow |u|^{q-1} u \quad \text{в} \quad L^1(\Omega).$$

Поэтому можно перейти к пределу во втором слагаемом в левой части условия (2.3). К первому слагаемому в правой части (2.3) можно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Таким образом, получаем, что u – решение задачи (1.1) в смысле распределений.

Часть II. Пусть $0 < q \leq (1 + \gamma)/(p - 1)$. Выберем $T_k(u_n)$ в качестве пробной функции в (2.3), тогда второе слагаемое неотрицательно. Используя предположение (1.3), получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^p dx \leq Ck(1 + k)^\gamma. \quad (3.4)$$

Из леммы 3 вытекает существование измеримой функции u такой, что $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ при любом $k > 0$, причем, переходя при необходимости к подпоследовательности, получаем, что

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Из леммы Фату следует, что $|u|^q \in L^1(\Omega)$. Переходя к пределу в (3.4), получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq Ck(1 + k)^\gamma.$$

Теперь по лемме 2 $|\nabla u| \in M^{pq/(q+1+\gamma)}(\Omega)$.

Покажем, что u – энтропийное решение задачи (1.1). Действительно, возьмем $T_k(u_n - \varphi)$, $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ в качестве пробной функции в (2.3), тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, T_n(u_n)) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) dx + \int_{\Omega} |u_n|^{q-1} u_n T_k(u_n - \varphi) dx \\ &= \int_{\Omega} T_n(f) T_k(u_n - \varphi) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Перейдем к пределу в (3.5). Для этого во втором слагаемом в левой части и в правой части можно использовать теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Для первого слагаемого в левой части мы сначала покажем, что $\nabla T_k(u_n) \rightarrow \nabla T_k(u)$ почти всюду в Ω . Пусть $\varphi = T_k(u_n) - T_k(u)$ в (2.3), тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, T_n(T_k(u_n))) |\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \nabla T_k(u_n) [\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)] dx \\ &+ \int_{\Omega} |u_n|^{q-1} u_n [T_k(u_n) - T_k(u)] dx \\ &= \int_{\Omega} T_n(f) [T_k(u_n) - T_k(u)] dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} a(x, T_n(T_k(u_n))) \\
 & \quad \times [|\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u)] [\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)] dx \\
 & = \int_{\Omega} T_n(f) [T_k(u_n) - T_k(u)] dx - \int_{\Omega} |u_n|^{q-1} u_n [T_k(u_n) - T_k(u)] dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} a(x, T_n(T_k(u_n))) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) [\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)] dx. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Покажем, что все три слагаемых в правой части (3.6) сходятся к нулю. Для перехода к пределу в первом слагаемом можно воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Из доказательства в части I получаем, что $|u_n|^{q-1} u_n \rightarrow |u|^{q-1} u$ в $L^1(\Omega)$. Поэтому

$$\int_{\Omega} |u_n|^{q-1} u_n [T_k(u_n) - T_k(u)] dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Легко видно, что $a(x, T_n(T_k(u_n))) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) \in L^{p'}(\Omega)$. Поэтому для любого измеримого множества $E \subset \Omega$ имеем

$$\int_E |a(x, T_n(T_k(u_n)))| |\nabla T_k(u)|^{p-1} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \text{meas } E \rightarrow 0.$$

Так как

$$\begin{aligned}
 & a(x, T_n(T_k(u_n))) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) \\
 & \rightarrow a(x, T_k(u)) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) \quad \text{почти всюду в } \Omega,
 \end{aligned}$$

то

$$a(x, T_n(T_k(u_n))) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) \rightarrow a(x, T_k(u)) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) \quad \text{в } L^{p'}(\Omega)$$

по теореме Витали. Из леммы 3 следует, что

$$\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в } L^p(\Omega).$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} a(x, T_n(T_k(u_n))) |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u) [\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)] dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} a(x, T_n(T_k(u_n))) \\
 & \quad \times [|\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2} \nabla T_k(u)] [\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)] dx \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Как следствие, из леммы 5 в [14] вытекает, что $\nabla T_k(u_n) \rightarrow \nabla T_k(u)$ в $L^p(\Omega)$. Поэтому

$$\nabla T_k(u_n) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Пусть $m = k + |\varphi|$. Первое слагаемое в левой части (3.5) можно записать в виде

$$\int_{\Omega} a(x, T_n(u_n)) |\nabla T_m(u_n)|^{p-2} \nabla T_m(u_n) \nabla T_k(u_n - \varphi) dx.$$

Так как $\nabla T_m(u_n) \rightarrow \nabla T_m(u)$ почти всюду в Ω , то из леммы Фату вытекает, что

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x, T_n(u_n)) |\nabla T_m(u_n)|^{p-2} \nabla T_m(u_n) \nabla T_k(u_n - \varphi) dx \\ & \geq \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla T_m(u)|^{p-2} \nabla T_m(u) \nabla T_k(u - \varphi) dx \\ & = \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx. \end{aligned}$$

Итак, u является энтропийным решением задачи (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Разделим доказательство на три части в соответствии со значениями q .

Часть I. Пусть $0 < q \leq N/(N-1)$. Очевидно, что из неравенства $q \leq N/(N-1)$ вытекает неравенство $q \leq r^*$ при $r \geq 1$. Из (3.1) получаем

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{\gamma+\lambda}} dx \leq C.$$

Пусть $1 \leq r < p$; запишем

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^r}{(1 + |u_n|)^{(r/p)(\gamma+\lambda)}} (1 + |u_n|)^{(r/p)(\gamma+\lambda)} dx.$$

Согласно неравенству Гёльдера

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx \leq C \left[\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{r(\lambda+\gamma)/(p-r)} dx \right]^{1-r/p}. \quad (3.7)$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что

$$\left(\int_{\Omega} |u_n|^{r^*} dx \right)^{1/r^*} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx \right)^{1/r}, \quad r^* = \frac{Nr}{N-r}.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} |u_n|^{r^*} dx \leq C \left[\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{r(\lambda+\gamma)/(p-r)} dx \right]^{(p-r)r^*/(pr)}.$$

Предположим, что $r(\lambda + \gamma)/(p - r) \leq r^*$, т.е.

$$r \leq \frac{N(p - \lambda - \gamma)}{N - \lambda - \gamma} < \frac{N(p - 1 - \gamma)}{N - 1 - \gamma}, \quad \lambda > 1.$$

Тогда из неравенства $p > p_0$ вытекает, что $N(p - 1 - \gamma)/(N - 1 - \gamma) > 1$. Получаем

$$\int_{\Omega} |u_n|^{r^*} dx \leq C \left[\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{r^*} dx \right]^{(p-r)r^*/(pr)} \leq C + C \left[\int_{\Omega} |u_n|^{r^*} dx \right]^{(p-r)r^*/(pr)}.$$

Из этого неравенства с помощью ε -неравенства Юнга получаем

$$\int_{\Omega} |u_n|^{r^*} dx \leq C,$$

откуда в сочетании с (3.7) и неравенством $r(\lambda + \gamma)/(p - r) \leq r^*$ следует, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^r dx \leq C, \quad r < \frac{N(p - 1 - \gamma)}{N - 1 - \gamma}.$$

Аналогично доказательству части I теоремы 1, можно показать, что u – решение задачи (1.1) в смысле распределений.

Часть II. Пусть

$$\frac{N}{N - 1} < q < \frac{N(p - 1 - \gamma)}{N - p}.$$

Тот факт, что u – энтропийное решение задачи (1.1), можно доказать тем же методом, что и в части II доказательства теоремы 1.

Часть III. Пусть $q \geq N(p - 1 - \gamma)/(N - p)$. Поскольку $p > p_0$, отсюда следует, что

$$\frac{N(p - 1 - \gamma)}{N - p} > \frac{1 + \gamma}{p - 1}.$$

Поэтому доказательство в этой части совпадает с доказательством в части I теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Разделим доказательство на три части в соответствии со значениями q .

Часть I. Пусть $q \geq (1 + \gamma)/(m - 1)$. Выберем

$$\varphi = [(1 + |u_n|)^{1+\gamma} - 1] \operatorname{sign}(u_n)$$

в (2.3), тогда второе слагаемое неотрицательно. В силу (1.3) имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \leq C \int_{\Omega} |f| |u_n|^{1+\gamma} dx.$$

Применяя к правой части неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_{\Omega} |f| |u_n|^{1+\gamma} dx \leq C \left[\int_{\Omega} |u_n|^{m(1+\gamma)/(m-1)} dx \right]^{1-1/m}.$$

Итак, имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \leq C \left[\int_{\Omega} |u_n|^{m(1+\gamma)/(m-1)} dx \right]^{1-1/m}. \quad (3.8)$$

Так как $m(1 + \gamma)/(m - 1) \leq qm$, то $q \geq (1 + \gamma)/(m - 1)$. Из леммы 1 вытекает, что правая часть в (3.8) равномерно ограничена, так что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что существует функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

По лемме Фату $u \in L^{qm}(\Omega)$. Получаем (см. [14; лемма 5]), что

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{почти всюду в } \Omega. \quad (3.9)$$

Перейдем затем к пределу в (2.3). Из (3.9) легко получить, что

$$|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega).$$

При этом

$$a(x, T_n(u_n)) \nabla \varphi \rightarrow a(x, u) \nabla \varphi \text{ в } L^p(\Omega).$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} a(x, T_n(u_n)) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx.$$

Оставшиеся две части в (2.3) такие же, как часть I в теореме 1.

Часть II. Пусть

$$\frac{1+\gamma}{pm-1} < q < \frac{1+\gamma}{m-1}.$$

Возьмем $\varphi = [(1 + |u_n|)^{q(m-1)} - 1] \operatorname{sign}(u_n)$ в (2.3), тогда второе слагаемое неотрицательно. Используя предположение (1.3), имеем

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\gamma-p(m-1)}} \, dx \leq C \int_{\Omega} |f| |u_n|^{q(m-1)} \, dx.$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера к правой части предыдущего неравенства, получаем

$$\int_{\Omega} |f| |u_n|^{q(m-1)} \, dx \leq C \left[\int_{\Omega} |u_n|^{qm} \, dx \right]^{1-1/m} \leq C.$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\gamma-p(m-1)}} \, dx \leq C. \quad (3.10)$$

Пусть $1 \leq \sigma < p$; запишем

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^\sigma \, dx = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^\sigma}{(1 + |u_n|)^{(\sigma/p)[1+\gamma-q(m-1)]}} (1 + |u_n|)^{(\sigma/p)[1+\gamma-q(m-1)]} \, dx.$$

Из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^\sigma}{(1 + |u_n|)^{(\sigma/p)[1+\gamma-q(m-1)]}} (1 + |u_n|)^{(\sigma/p)[1+\gamma-q(m-1)]} \, dx \\ & \leq C \left(\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{(\sigma/(p-\sigma))[1+\gamma-q(m-1)]} \, dx \right)^{1-\sigma/p}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{\sigma} dx \leq C \left(\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{(\sigma/(p-\sigma))[1+\gamma-q(m-1)]} dx \right)^{1-\sigma/p}. \quad (3.11)$$

Если $(\sigma/(p-\sigma))[1+\gamma-q(m-1)] \leq qm$, т.е. $\sigma \leq pqm/(q+1+\gamma)$, то из леммы 1 следует, что правая часть в (3.11) равномерно ограничена. Из неравенства $(1+\gamma)/(pm-1) < q$ вытекает, что $pqm/(q+1+\gamma) > 1$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{\sigma} dx \leq C, \quad \sigma = \frac{pqm}{q+1+\gamma} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что существует функция $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$ такая, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } W_0^{1,\sigma}(\Omega) \quad \text{и} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

По лемме 5 (см. [14]) $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ почти всюду в Ω . Из леммы Фату следует, что $|u|^{qm} \in L^1(\Omega)$.

Далее перейдем к пределу в (2.3). Легко получаем, что

$$|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \quad \text{слабо в } L^{\sigma/(p-1)}(\Omega)$$

и

$$a(x, T_n(u_n)) \nabla \varphi \rightarrow a(x, u) \nabla \varphi \quad \text{в } L^{(\sigma/(p-1))'}(\Omega), \quad \left(\frac{\sigma}{p-1} \right)' = \frac{\sigma}{\sigma+1-p}.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} a(x, T_n(u_n)) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx.$$

Оставшиеся две части в (2.3) такие же, как часть I в теореме 1.

Часть III. Пусть $0 < q \leq (1+\gamma)/(pm-1)$. Из (3.10) следует, что

$$\int_{\Omega \cap \{|u_n| < k\}} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\gamma-p(m-1)}} dx \leq C,$$

и поэтому

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^p dx = \int_{\Omega \cap \{|u_n| < k\}} |\nabla T_k(u_n)|^p dx \leq C(1+k)^{1+\gamma-q(m-1)}. \quad (3.12)$$

По лемме 3 существует функция u такая, что $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, причем

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0 \quad \text{и} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Поэтому можно перейти к пределу в (3.12) и получить

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq C(1+k)^{1+\gamma-q(m-1)}.$$

Поскольку

$$q \leq \frac{1+\gamma}{pm-1} < \frac{1+\gamma}{m-1},$$

имеем $1+\gamma-q(m-1) > 0$. Из леммы 2 следует, что $|\nabla u| \in M^{pqm/(q+1+\gamma)}$. Тем же методом, что и в части II доказательства теоремы 1, можно показать, что u – энтропийное решение задачи (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Разделим доказательство на две части в соответствии со значениями q .

Часть I. Пусть $0 < q \leq N/(m(N-1))$. Тогда $q \leq N/(m(N-1))$, откуда следует, что $qm \leq \sigma^*$ при $\sigma \geq 1$. Из (3.11) и теоремы вложения Соболева получаем

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\sigma^*} dx \leq C \left(\int_{\Omega} (1+|u_n|)^{\sigma/(p-\sigma)[1+\gamma-q(m-1)]} dx \right)^{(p-\sigma)\sigma^*/(p\sigma)}.$$

Если $(\sigma/(p-\sigma))[1+\gamma-q(m-1)] \leq \sigma^*$, т.е.

$$\sigma \leq \frac{N[p+q(m-1)-1-\gamma]}{N+q(m-1)-1-\gamma},$$

то в силу того, что $m > 1$, $p > p_0$, получаем $p > p_0 > 1 + (1-1/N)[1+\gamma-q(m-1)]$, откуда следует, что

$$\frac{N[p+q(m-1)-1-\gamma]}{N+q(m-1)-1-\gamma} > 1.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\sigma^*} dx \leq C + C \left(\int_{\Omega} |u_n|^{\sigma^*} dx \right)^{(p-\sigma)\sigma^*/(p\sigma)}. \quad (3.13)$$

Применяя к (3.13) ε -неравенство Юнга, получаем

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\sigma^*} dx \leq C,$$

откуда, в сочетании с (3.11) и $(\sigma/(p-\sigma))[1+\gamma-q(m-1)] \leq \sigma^*$ следует, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{\sigma} dx \leq C, \quad \sigma \leq \frac{N[p+q(m-1)-1-\gamma]}{N+q(m-1)-1-\gamma}.$$

Остальное доказательство в этой части таково же, как и в части II доказательства теоремы 3; мы можем показать, что u – решение задачи (1.1) в смысле распределений.

Часть II. Пусть $q \geq N/(m(N-1))$. Поскольку из неравенства $p > p_0$ вытекает, что $N/(m(N-1)) > (1+\gamma)/(pm-1)$, мы можем тем же методом, что и в части II доказательства теоремы 3 показать, что u – решение задачи (1.1) в смысле распределений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Porretta, “Uniqueness and homogenization for a class of noncoercive operators in divergence form”, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **46**, Suppl. (1998), 915–936.
- [2] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Etudes mathématiques, Dunod, Paris, 1969.
- [3] A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, G. Trombetti, “Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **182**:1 (2003), 53–79.
- [4] L. Boccardo, A. Dall’Aglio, L. Orsina, “Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity”, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **46**, Suppl. (1998), 51–81.
- [5] L. Boccardo, H. Brezis, “Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity”, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8), **6**:3 (2003), 521–530.
- [6] L. Boccardo, “Some elliptic problems with degenerate coercivity”, *Adv. Nonlinear Stud.*, **6**:1 (2006), 1–12.
- [7] G. R. Cirmi, “On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data”, *Ricerche Mat.*, **42**:2 (1993), 315–329.
- [8] D. Giachetti, M. M. Porzio, “Existence results for some nonuniformly elliptic equations with irregular data”, *J. Math. Anal. Appl.*, **257**:1 (2001), 100–130.
- [9] D. Giachetti, M. M. Porzio, “Elliptic equations with degenerate coercivity: gradient regularity”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **19**:2 (2003), 349–370.
- [10] G. Croce, “The regularizing effects of some lower order terms in an elliptic equation with degenerate coercivity”, *Rend. Mat. Appl.* (7), **27**:3-4 (2007), 299–314.
- [11] L. Boccardo, T. Gallouët, J. L. Vázquez, “Nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$ without growth restrictions on the data”, *J. Differential Equations*, **105**:2 (1993), 334–363.
- [12] G. R. Cirmi, “Regularity of the solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term”, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, **25**:6 (1995), 569–580.
- [13] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vázquez, “An L^1 theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **22**:2 (1995), 241–273.
- [14] L. Boccardo, F. Murat, J. P. Puel, “Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **152**:1 (1988), 183–196.
- [15] L. Boccardo, T. Gallorët, “Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data”, *J. Funct. Anal.*, **87**:1 (1989), 149–169.
- [16] L. Boccardo, T. Gallorët, “Nonlinear elliptic equations with right hand side measure”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:3-4 (1992), 641–655.

Гуаньвэй Чэнь

E-mail: guanweic@163.com

Поступило

23.09.2010