Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. де ля Арп, М. Бушер, Свободные произведения с объединением и HNN-расширения равномерно экспоненциального роста, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 811–815

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm899>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:36:37

УДК 512.543.76

СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ОБЪЕДИНЕНИЕМ И HNN-РАСШИРЕНИЯ РАВНОМЕРНО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

П. де ля Арп, М. Бушер

Доказано, что группы, являющиеся свободным произведением с объединением или HNN-расширением, обладают, за редким исключением, равномерно экспоненциальным ростом.

Библиография: 8 названий.

Пусть Γ – группа с конечным множеством порождающих S . Тогда определены: *словарная длина* $\ell_S: \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, где $\ell_S(\gamma)$ – наименьшее целое число n такое, что найдутся элементы $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$, удовлетворяющие соотношению $\gamma = s_1 \cdots s_n$; *функция роста* $\beta_S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $\beta_S(k)$ – число элементов $\gamma \in \Gamma$ длины $\ell_S(\gamma) \leq k$; а также *показатель экспоненциального роста*

$$\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta_S(k)}$$

(предел существует ввиду полумультимпликативности функции роста: $\beta_S(k_1 + k_2) \leq \beta_S(k_1)\beta_S(k_2)$). Легко проверить, что $\omega(\Gamma, S) > 1$ в том и только том случае, если $\omega(\Gamma, S') > 1$ для *произвольного* конечного множества S' порождающих Γ . Определим также показатель

$$\omega(\Gamma) = \inf\{\omega(\Gamma, S)\},$$

где инфимум берется по всем S – конечным множествам порождающих группы Γ . Группа имеет *экспоненциальный рост*, если $\omega(\Gamma, S) > 1$ для некоторого (а значит, и для любого) конечного порождающего множества S , и имеет *равномерно экспоненциальный рост*, если $\omega(\Gamma) > 1$. Громовым был поставлен вопрос о существовании конечно порожденной группы экспоненциального, но не равномерно экспоненциального роста [1, замечание 5.12], однако вопрос до сих пор остается открытым [2] (см. [3], [4, гл. VII], где эта проблема обсуждается более подробно).

Цель заметки – показать, что при некоторых естественных условиях свободное произведение с объединением $A *_C B$, где C – общая подгруппа в A и B , и HNN-расширение $G *_H^\theta = \langle G, t \mid \theta(h) = tht^{-1} \forall h \in H \rangle$, где H – подгруппа в G и θ – изоморфизм между H и ее образом в G , имеют равномерно экспоненциальный рост. Точнее, мы доказываем следующий результат, используя при этом стандартное обозначение $[A : C] \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ для индекса подгруппы C в группе A .

ТЕОРЕМА. i) Пусть A, B – две конечно порожденные группы, и предположим, что C – группа, содержащаяся одновременно в A и B . Предположим, кроме того, что выполнено условие

$$([A : C] - 1)([B : C] - 1) \geq 2.$$

Тогда справедлива оценка

$$\omega(A *_C B) \geq \sqrt[4]{2}.$$

В частности, свободное произведение с объединением $A *_C B$ имеет равномерно экспоненциальный рост.

ii) Пусть H, K – изоморфные подгруппы конечно порожденной группы G и

$$\theta : H \rightarrow K$$

– изоморфизм между ними. Более того, предположим, что $[G : H] + [G : K] \geq 3$. Тогда справедлива оценка

$$\omega(G *_H^\theta) \geq \sqrt[4]{2}.$$

В частности, HNN-расширение $G *_H^\theta$ обладает равномерно экспоненциальным ростом.

Известно, что группы $\Gamma = A *_C B$ и $\Delta = G *_H^\theta$ действуют на деревьях X и Y соответственно, которые определяются следующим образом.

i) Множество вершин X^0 графа X является непересекающимся объединением фактормножеств Γ/A и Γ/B . Множество ребер состоит из дизъюнктного объединения $X^1 = X_+^1 \sqcup \overline{X_+^1}$ с положительной частью $X_+^1 = \Gamma/C$, причем ребро $\gamma C \in X_+^1$ имеет начало γA и конец γB (см. [5, № I.4.1]). Дерево X является двудольным, вершины из Γ/A (соответственно из Γ/B) имеют степень $[A : C]$ (соответственно $[B : C]$), и всякий элемент $\gamma \in \Gamma$ определяет автоморфизм X , который является четным, т.е. комбинаторное расстояние $d(x, \gamma(x))$ является четным числом для любой вершины $x \in X^0$.

ii) Множеством вершин графа Y служит $Y^0 = \Gamma/G$. Множество ребер $Y^1 = Y_+^1 \sqcup \overline{Y_+^1}$ обладает положительной частью $Y_+^1 = \Gamma/H$, и ребро $\delta H \in Y_+^1$ имеет начало δG и конец δtG (см. [5, № I.5.3]). Заметим, что Y является регулярным деревом степени

$$[G : H] + [G : K].$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – конечно порожденная группа. Если у нее существует конечное множество образующих S такое, что $\omega(G, S) < \sqrt[4]{2}$, то G не является ни свободным произведением с объединением вида $A *_C B$, где

$$([A : C] - 1)([B : C] - 1) \geq 2,$$

ни HNN-расширением вида $G *_H^\theta$, где $[G : H] + [G : \theta(H)] \geq 3$.

Сформулированная выше теорема является непосредственным следствием следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – дерево и конечно порожденная группа Γ действует автоморфизмами на X . Предположим, что либо Γ транзитивна на X^0 , либо граф X двудолен, Γ действует четными автоморфизмами на X и имеет в точности две орбиты на X^0 . Кроме того, предположим, что граф X бесконечен и не изоморфен прямой. Тогда $\omega(\Gamma, S) \geq \sqrt[4]{2}$ для произвольного конечного множества S порождающих Γ .

Напомним, что автоморфизм s графа X является гиперболическим, если у него нет неподвижных вершин и нет неподвижных геометрических ребер. Для такого $s \in \text{Aut}(X)$ найдется геодезическая L_s в X , называемая осью s , с множеством вершин

$$\left\{ x \in X^0 \mid d(x, s(x)) = \min_{y \in X^0} d(y, s(y)) \right\}.$$

ЛЕММА. Рассмотрим два гиперболических автоморфизма s, t дерева X . Пусть Γ_0 – группа, ими порожденная, и пусть $S_0 = \{s, t\}$. Если $L_s \neq L_t$, то $\omega(\Gamma_0, S_0) \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем вершины $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ оси L_s и $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ оси L_t таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- i) $d(x_m, x_n) = d(y_m, y_n) = |m - n|$, где $m, n \in \mathbb{Z}$;
- ii) если L_s и L_t не пересекаются, то геодезический отрезок в X , соединяющий L_s с L_t , имеет x_0 и y_0 своими концами;
- iii) если же L_s и L_t пересекаются, то $x_0 = y_0$ и $x_m \neq y_n$ при $m, n > 0$.

Заменив в случае необходимости s на s^{-1} и t на t^{-1} , мы можем, кроме того, предположить, что существуют числа $a, b \geq 1$ такие, что $s(x_n) = x_{n+a}$ и $t(y_n) = y_{n+b}$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Пусть P (соответственно Q) – подмножество в X^0 , состоящее из вершин z таких, что $d(z, x_1) = d(z, x_0) - 1$ (соответственно $d(z, y_1) = d(z, y_0) - 1$). Тогда $P \cap Q = \emptyset$ и $s^k(P \cup Q) \subset P$, $t^k(P \cup Q) \subset Q$, если $k \geq 1$. С помощью стандартного утверждения, называемого *пинг-понг-леммой* (см., например, [4, предложение VII.2]), получаем, что S_0 порождает свободную полугруппу M_0 с двумя образующими. Понятие экспоненциального роста аналогичным образом можно расширить и на полугруппы, тогда $\omega(M_0, S_0) = 2$. Следовательно,

$$\omega(\Gamma_0, S_0) \geq \omega(M_0, S_0) = 2$$

и лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Предположим вначале, что S содержит элемент s , являющийся гиперболическим на X с осью L_s . Если бы имели место соотношения $u(L_s) = L_s$, $u \in S$, то также имели бы место соотношения $\gamma(L_s) = L_s$, $\gamma \in \Gamma$, а значит, и соотношения $L_s = X$, так как Γ вопреки наложенным условиям имеет не более двух орбит в X^0 . Следовательно, существует $t \in S$ такое, что $t(L_s) \neq L_s$. Если $S_0 = \{s, tst^{-1}\}$ и Γ_0 является подгруппой Γ , порожденной S_0 , то $\omega(\Gamma_0, S_0) \geq 2$ по доказанной лемме.

Пусть $B(k)$ обозначает шар радиуса k с центром e в Γ по отношению к словарной длине ℓ_S , так что $S_0 \subset B(3)$. Заметим, что $\omega(\Gamma, B(k)) = \omega(\Gamma, S)^k$ при $k \geq 1$. Поэтому выполняется равенство

$$\omega(\Gamma, S)^3 = \omega(\Gamma, B(3)) \geq \omega(\Gamma_0, S_0) \geq 2,$$

что и заканчивает рассуждение в рассмотренном случае.

Предположим теперь, что любой автоморфизм $u \in S$ имеет некоторую фиксированную вершину в X^0 . Тогда найдется элемент $s \in S \cup S^2$, являющийся гиперболическим на X , ввиду [5, № I.6.5]. Те же аргументы, что и выше, показывают, что в этом случае

$$\omega(\Gamma, S)^4 = \omega(\Gamma, B(4)) \geq 2,$$

и утверждение полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для свободного произведения $\Gamma = A * B$ двух групп, удовлетворяющих условию $(|A| - 1)(|B| - 1) \geq 2$, оценка может быть улучшена до $\omega(\Gamma) \geq \sqrt{2}$. Эта оценка является строгой, так как если $A = \{1, \alpha\}$, $B = \{1, \beta, \beta^2\}$ и $S = \{\alpha, \beta\}$, то, полагая $\sigma_S(k) = \beta_S(k) - \beta_S(k - 1)$, мы получаем соотношение $\sigma_S(k + 2) = 2\sigma_S(k)$, выполненное для любого $k \geq 1$, так что

$$\omega(A * B, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_S(k + 2)}{\sigma_S(k + 1)} = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_S(k)}{\sigma_S(k + 1)} = \frac{2}{\omega(A * B, S)}$$

и, следовательно, $\omega(A * B, S) = \sqrt{2}$.

Для всех примеров групп, удовлетворяющих условиям нашей теоремы, для которых мы смогли провести точные вычисления, показатель равномерно экспоненциального роста также удовлетворяет оценке $\omega(\cdot) \geq \sqrt{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случай групп вида $\Gamma = A *_C B$ с условием $([A : C] - 1)([B : C] - 1) = 2$ не является тривиальным.

Существует пример, принадлежащий Брайдсону, в котором $C \approx \mathbb{Z}^2$ и $[A : C] = [B : C] = 2$ и для которого C не является, а $\Gamma = A *_C B$ является группой экспоненциального роста (см. [4, дополнение VII.10]). В примере Брайдсона Γ обладает подгруппой индекса 2, изоморфной полупрямому произведению вида $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$, $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, так что Γ обладает равномерно экспоненциальным ростом (конечно порожденная группа и подгруппа конечного индекса одновременно являются или не являются группами с равномерно экспоненциальным ростом, что следует из [6, предложение 3.3]).

Если $C = 1$ и группы A, B одновременно имеют порядок 2, то $A * B$ является бесконечной диэдральной группой и поэтому имеет линейный рост.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогично, если $H = K = G$, то HNN-расширение $G *_H^{\theta}$ на самом деле есть полупрямое произведение $\Delta = G \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$. Если G не обладает экспоненциальным ростом, то Δ является или не является группой экспоненциального роста в зависимости от свойств θ . Например, для $G = \mathbb{Z}^d$ и $\theta \in GL(d, \mathbb{Z}) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^d)$ группа Δ обладает полиномиальным ростом, если автоморфизм θ является унитарным, и обладает равномерно экспоненциальным ростом, если θ имеет вид, рассмотренный ниже в примере.

ПРИМЕР. Пусть d – целое число, $d \geq 2$, и пусть $\theta \in GL(d, \mathbb{Z})$ – матрица с собственным значением λ таким, что $|\lambda| > 1$. Тогда соответствующее полупрямое произведение $\Delta = \mathbb{Z}^d \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ имеет равномерно экспоненциальный рост.

В частности, группа из рассмотренного ниже примера имеет экспоненциальный рост. Этот результат получен еще в 1955 году Шварцем [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – порождающее множество группы Δ . Обозначим через $\pi: \Delta \rightarrow \mathbb{Z}$ каноническую проекцию. Тогда найдется элемент $s \in S$ такой, что $\pi(s) = m \neq 0$. Изменив в случае необходимости s на s^{-1} , можно предположить, что $m \geq 1$. Поскольку группа Δ не абелева, существует элемент $v \in S$ такой, что $sv \neq vs$.

Положим $u = sv s^{-1} v^{-1}$. Так как $u \in \mathbb{Z}^d$, можно отождествить sus^{-1} с $\theta^m(u)$. Положим $S_0 = \{s, u\}$ и пусть Δ_0 – подгруппа в Δ , порожденная множеством S_0 . Так как S_0 находится внутри шара радиуса 4 с центром e в группе Δ по отношению к словарной длине ℓ_S , то $\omega(\Delta, S)^4 \geq \omega(\Delta_0, S_0)$ и, следовательно, достаточно показать, что $\omega(\Delta_0, S_0) \geq c$ для некоторой константы $c > 1$, не зависящей от выбора S .

Обозначим через L линейную форму на $\mathbb{R}^d$ такую, что $L \circ \theta = \lambda L$. Имеем $L(u) \neq 0$, так как $u \in \mathbb{Z}^d$ и $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Мы будем предполагать, что λ является вещественным, а случай двух комплексно сопряженных значений $\lambda, \bar{\lambda}$ оставим читателю в качестве упражнения. Пусть $n \geq 1$ таково, что $|\lambda|^n \geq 2$; это число зависит от θ , но не от S . Заметим, что $|\lambda|^{mn} \geq 2$. При $k \geq 1$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ имеем

$$L(\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 s^n u s^{-n} + \dots + \varepsilon_k s^{n(k-1)} u s^{-n(k-1)}) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j \lambda^{jmn} \right) L(u),$$

причем числа

$$\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j (\lambda^{mn})^j$$

различны. С другой стороны, в группе $\Delta = \mathbb{Z}^d \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ выполнено соотношение

$$(\varepsilon_1 u, mn)(\varepsilon_2 u, mn) \dots (\varepsilon_k u, mn) = (\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 s^n u s^{-n} + \dots + \varepsilon_k s^{n(k-1)} u s^{-n(k-1)}, kmn),$$

так что ℓ_{S_0} – словарная длина этого элемента – не превосходит $(n+1)k$. Следовательно, функция роста пары (Δ_0, S_0) удовлетворяет неравенству $\beta_{S_0}((n+1)k) \geq 2^k$, и окончательно получаем $\omega(\Delta_0, S_0) \geq 2^{1/(n+1)}$ (это рассуждение в значительной степени аналогично доказательству леммы 6.2 из [8]).

Авторы выражают благодарность Р. И. Григорчуку за его замечания к первой версии этой заметки и Национальному научному фонду Швейцарии, который поддержал его визит в Женеву.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gromov M., Lafontaine J., Pansu P. Structures métriques pour les variétés riemanniennes: Cedic/F. Nathan, 1981.
- [2] Gromov M. Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces (with appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes): Birkhäuser, 1999.
- [3] Grigorchuk R. I., de la Harpe P. Limit behaviour of exponential growth rates for finitely generated groups // Preprint at <http://www.unige.ch/math/biblio/preprint/pp98.html>: Univ. of Geneva, 1999.
- [4] de la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory: Univ. of Chicago Press (to appear).
- [5] Serre J.-P. Arbres, amalgames, SL_2 . Astérisque. V. 46: Soc. Math. France, 1977.
- [6] Shalen P. B., Wagreich P. Growth rates, $\mathbb{Z}_p$ -homology, and volumes of hyperbolic 3-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331. P. 895–917.
- [7] Шварц А. С. Объемный инвариант накрытий // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. С. 32–34.
- [8] Tits J. Groupes à croissance polynomiale // Séminaire Bourbaki 1980/81. Lecture Notes in Math. V. 901: Springer, 1981. P. 176–188.

(П. де ля Арп) Отделение математики, Женевский университет, Цюрих
(М. Бушер) Отделение математики, ETH-Центр
E-mail: Pierre.delaHarpe@math.unige.ch, bucher@math.ethz.ch

Поступило
11.09.1999